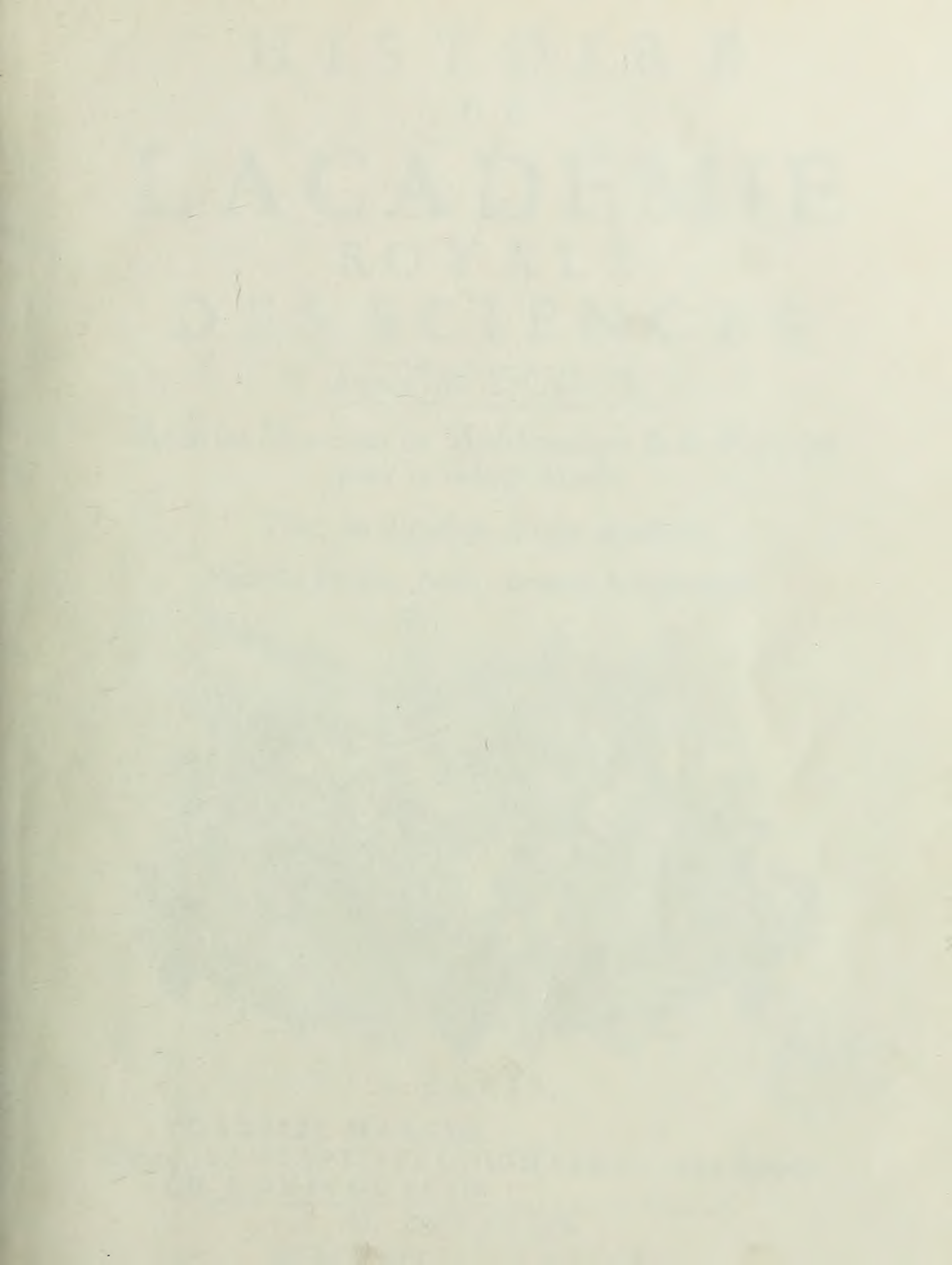
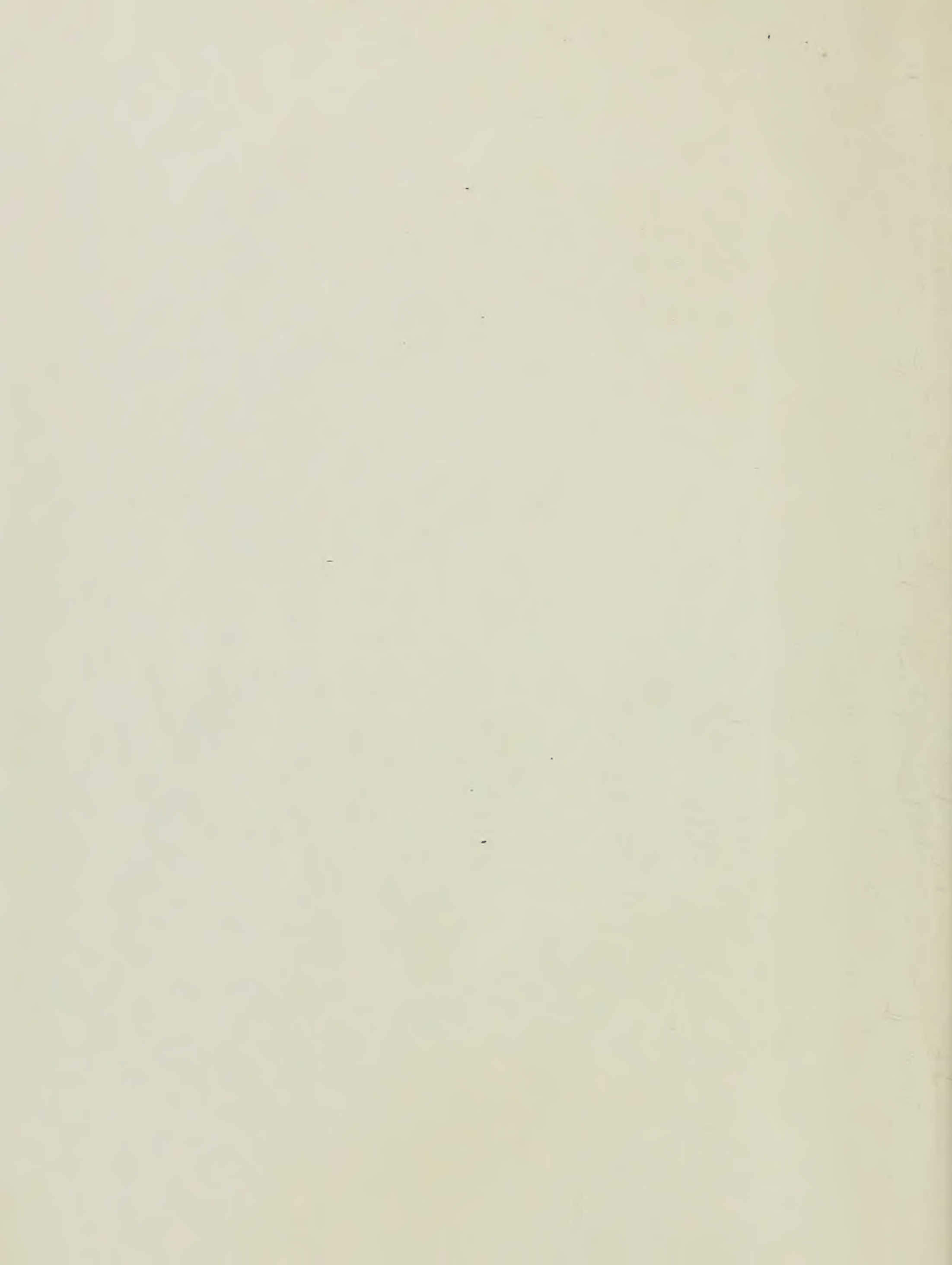






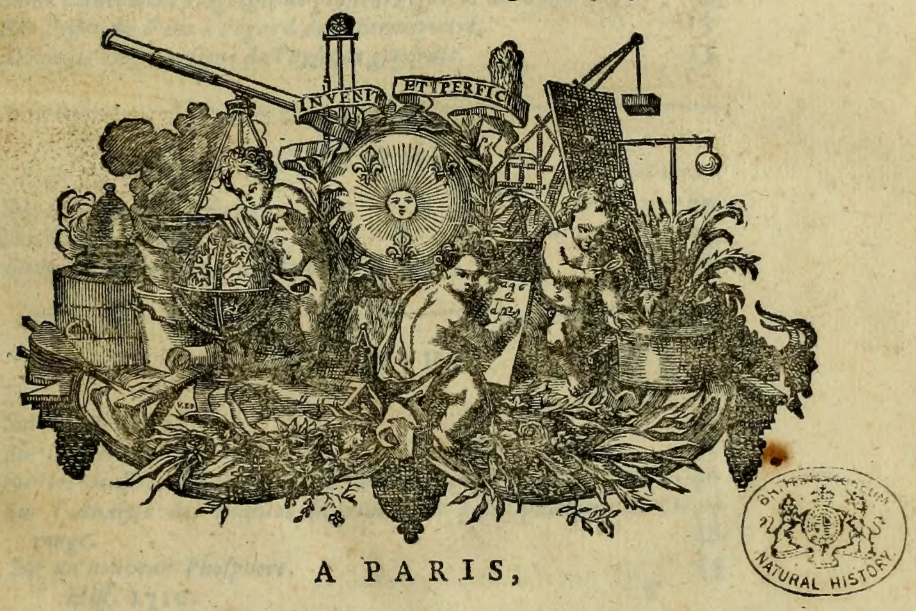
HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

Année M. DCC. X.

Avec les Memoires de Mathématique & de Physique pour la même Année.

Tirez des Registres de cette Académie.

Nouvelle Edition, revûë, corrigée & augmentée.



A PARIS,

Chez { GABRIEL MARTIN. JEAN-BAPTISTE COIGNARD fils. H. LOUIS GUERIN. } ruë S. Jacques.

M. DCCXXXII.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.



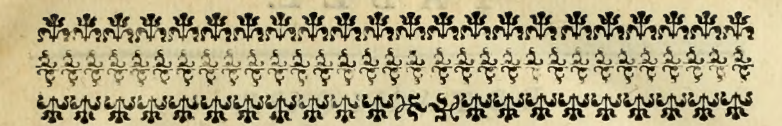


TABLE POUR L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GENERALE.

ANATOMIE.

CHIMIE.

TABLE.

BOTANIQUE.

ARITHMETIQUE.

ALGEBRE.

GEOMETRIE.

ASTRONOMIE.

CATOPTRIQUE.

DIOPTRIQUE.

MECHANIQUE.



TABLE
POUR
LES MEMOIRES.

Fin des Tables.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos amez & feaux Conſeillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de nôtre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra: SALUT. Nôtre Académie Royale des Sciences Nous ayant très-humblement fait expoſer, que depuis qu'il Nous a plû lui donner par un Reglement nouveau de nouvelles marques de nôtre affection, Elle s'eſt appliquée avec plus de ſoin à cultiver les Sciences qui font l'objet de ſes exercices; enſorte qu'outre les Ouvrages qu'Elle a déja donnez au public, Elle ſeroit en état d'en produire encore d'autres, s'il Nous plaiſoit lui accorder de nouvelles Lettres de Privilege, attendu que celles que Nous lui avons accordées en datte du 6. Avril 1699. n'ayant point de tems limité, ont été déclarées nulles par un Arrêt de nôtre Conſeil d'Etat du 13. du mois d'Aouſt dernier. Et deſirant donner à ladite Académie en corps, & en particulier à chacun de ceux qui la compoſent, toutes les facilitez & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leurs travaux utiles au public; Nous avons permis & permettons par ces Preſentes à ladite Académie, de faire imprimer, vendre & debiter dans tous les lieux de nôtre obéïſſance, par tel Imprimeur qu'Elle voudra choiſir, en telle forme, marge, caractere, & autant de fois que bon lui ſemblera: *Toutes les Recherches ou Obſervations journalieres, & Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Aſſemblées de l'Académie Royale des Sciences*; comme auſſi *les Ouvrages, Memoires ou Traitez de chacun des particuliers qui la compoſent*, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître ſous ſon nom, lorſqu'après avoir examiné & approuvé leſdits Ouvrages aux termes de l'article xxx. dudit Reglement, elle les jugera dignes d'être imprimez: & ce pendant le tems de dix années conſecutives, à compter du jour de la datte deſdites Preſentes. Faiſons très-expreſſes deffenſes à tous Imprimeurs, Libraires, & à toutes ſortes de perſonnes de quelque qualité & condition que ce ſoit, d'imprimer, faire imprimer en tout ni en partie, aucun des Ouvrages imprimez par l'Imprimeur de ladite Académie, comme auſſi d'en introduire, vendre & debiter d'impreſſion étrangere dans nôtre Royaume ſans le conſentement par écrit de ladite Académie ou de ſes ayans cauſe, à peine contre chacun des contrevenans de confiſcation des Exemplaires contrefaits au profit de ſon-

dit Imprimeur, de trois mille livres d'amende, dont un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, un tiers audit Imprimeur, & l'autre tiers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & interêts; à condition que ces presentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs-Libraires de Paris, & ce dans trois mois de ce jour: Que l'impression de chacun desdits Ouvrages sera faite dans nôtre Royaume & non ailleurs, & ce en bon papier & en beaux caracteres, conformement aux Reglemens de la Librairie; & qu'avant que de les exposer en vente il en sera mis de chacun deux Exemplaires dans nôtre Bibliotheque publique, un dans celle de nôtre Château du Louvre, & un dans celle de nôtre très-cher & feal Chevalier Chancelier de France le sieur Phelyppeaux Comte de Pontchartrain Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Presentes; du contenu desquelles Vous mandons & enjoignons de faire joüir ladite Académie ou ses ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchemens. Voulons que la copie desdites Presentes qui sera imprimée au commencement ou à la fin desdits Ouvrages soit tenuë pour dûëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conseillers & Secretaires foi soit ajoûtée comme à l'original: Commandons au premier nôtre Huissier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & necessaires sans autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Chartre Normande & Lettres à ce contraires: CAR tel est nôtre plaisir. DONNE' à Versailles le neuviéme jour de Février, l'an de grace mil sept cens quatre, & de nôtre Regne le soixante & uniéme. Par le Roy en son Conseil, LE COMTE.

L'Académie Royale des Sciences par déliberation du 17 Février 1707. a cedé le present Privilege à JEAN BOUDOT fils son Libraire, pour en joüir conformément au Traité fait par l'Académie avec feu le sieur Boudot son Pere le 13. Juillet 1699. En foi de quoi j'ai signé, à Paris ce 27. Février 1707.

FONTENELLE, *Secretaire de l'Académie Royale des Sciences.*

Registré sur le Livre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, Numero CVI. *page* 126. *conformément aux Reglemens, & notamment à l'Arrêt du Conseil du* 13. *Aoust dernier. A Paris, ce* 13. *Février* 1704.

P. EMERY, *Syndic.*

HISTOIRE



HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES SCIENCES.

ANNE'E M. DCCX.

PHYSIQUE GENERALE.

SUR LE RESSORT DE L'AIR.



COMME le Reſſort de l'Air eſt preſentement fort établi, M. Carré a voulu verifier des expériences de M. Parent qui l'attaquoient, rapportées dans l'Hiſt. de 1708 *. Nous y avons dit que des Phioles de verre miſes ſur des charbons ardens, ne faiſoient que ſe fondre doucement quand elles étoiênt pleines d'air, & que quand elles en avoient été bien vuidées, & qu'elles contenoient ſeulement un peu de quelque autre matiere, elles ſautoient en éclats avec un grand bruit, ce qui paroît aſſés contraire à l'idée que l'on a de la grande force élaſtique de l'Air.

V. les M. p. 1.

* p. 18.

M. Carré ayant refait ces expériences sur un grand nombre de Phioles, a trouvé que presque toûjours dans l'un & dans l'autre cas elles crevoient ou s'éclatoient avec bruit, & que par conséquent on n'en pouvoit rien conclure contre le Ressort de l'Air, car il faudroit pour cela que les deux cas eussent un succès contraire, c'est à-dire que les Phioles ne crevassent avec bruit que quand elles ont été vuidées d'air.

Si elles ne contiennent ni air ni aucune autre matiere, il arrive quelquefois que l'hemisphere inferieur de la Phiole, & celui qui pose sur les charbons, s'amolissant par le feu & se fondant à demi, va s'appliquer contre la surface interieure de l'hemisphere superieur, de sorte que la boule se change en un hemisphere creux en forme de Tasse. C'est que la boule vuide d'air ne peut résister à la pression de l'air exterieur, qui fait rentrer une de ses moitiés. Cet effet est si naturel qu'il sembleroit devoir toûjours arriver, mais cette moitié de boule ne se fond pas toûjours si également en toutes ses parties au degré qu'il faut; dès qu'il y en a quelqu'une trop fonduë, elle se détache des autres, & il se fait un trou par où entre l'air exterieur, qui ne laisse plus de lieu à ce petit phenomene. Si dans la Phiole vuide d'air il y a quelque peu d'une autre matiere, comme de l'Eau, de l'Esprit de vin, &c. cette matiere se rarefie, & se fait bientôt une ouverture pour sortir.

Quelquefois, comme M. Carré l'a vû dans quelqu'une de ses expériences, aussi-bien que M. Parent, l'air s'échape d'une Phiole paisiblement & sans bruit. Mais alors ce n'est pas à dire qu'il n'ait point de ressort, il suffit pour rendre sa sortie tranquille qu'il ait trouvé une ouverture proportionnée à sa vitesse.

Enfin le ressort de l'air a paru à M. Carré subsister en son entier. Ce n'est pas que les expériences qu'il a faites pour s'éclaircir, ne lui produisissent elles-mêmes de nouvelles difficultés, mais il s'en fait dans les matieres de Physique une regeneration continuelle, qu'il ne faut pas prétendre épuiser entierement.

SUR LA DECLINAISON DE L'AIMAN.

LA beauté & l'importance du Syſtême de M. Halley, ne permettent pas que l'on ſe relâche ſur le ſoin de le verifier.

V. les M. p. 353.

M. Deliſle ayant eu entre les mains 10 Journaux de Voyages de long cours faits en 1706, 7, 8, & 9. a trouvé par les variations de l'Eguille qui y avoient été obſervées, que cette Ligne courbe exempte de variation, tracée par M. Halley ſur le Globe terreſtre, avance toûjours vers l'Oüeſt à nôtre égard, ſelon ce que nous avions déja dit dans l'Hiſt. de 1706 *. Cela ſuit évidemment de ce que les Vaiſſeaux qui vont de France en Amérique, obſervent en deçà de cette Ligne que la variation qui eſt Nord-Oüeſt eſt plus grande que celle de M. Halley, & plus petite au delà où elle eſt Nord-Eſt, & d'autant plus differente que l'année où ſe fait la Navigation eſt plus éloignée de 1700, époque de la Carte de M. Halley. Ce n'eſt pas que toutes les obſervations particulieres donnent une regularité ſi parfaite, elle ne réſulte que du gros des obſervations, il n'eſt pas poſſible qu'il n'y en ait quantité de fautives, & d'ailleurs le mouvement de cette Ligne ſuppoſée pourroit bien n'être pas lui-même fort regulier.

* p. 4.

Par les Voyages que M. Deliſle a vûs, les variations obſervées du Cap de Bonne-Eſperance aux Indes Orientales, different ſi peu de celles de M. Halley, que l'on peut compter que de ce côté-là tout eſt preſque dans le même état, ce qui pourroit faire naître quelque difficulté dans le ſyſtême général; car il ſeroit bon que les changemens de l'Orient répondiſſent à ceux de l'Occident.

Ce que M. Caſſini le fils avoit déja commencé à l'égard de la Mer du Sud *, qui manque à la Carte de M. Halley,

* V. l'Hiſt. de 1708. p. 20.

M. Delisle l'a poursuivi, il a donné de nouvelles observations de la variation de l'Eguille, faites sur cette Mer. Il confirme ce qu'avoit remarqué M. Cassini le fils, que dans ces parages la variation augmentoit avec la latitude méridionale, & il y ajoûte que sous une même latitude la variation diminuoit à mesure qu'on s'éloignoit en longitude vers l'Occident.

Il n'a pas manqué d'examiner avec grand soin les observations d'un Vaisseau, qui pour la premiere fois, que l'on sçache, a été du Détroit de Magellan au Cap de Bonne Esperance. Ce qui en résulte commence par s'éloigner assés de la Carte de M. Halley, & y revient ensuite. Mais dans une matiere aussi nouvelle & aussi délicate, il ne faut pas s'attendre que toutes les observations conspirent si promptement en faveur d'un sistême.

M. Delisle a tiré encore de ces Journaux quelques remarques Geographiques, importantes pour la Navigation.

SUR LE FLUX

ET LE REFLUX.

V. les M. p. 318. 366. & 380.

* p. 11. & suiv.

LE Memoire circulaire sur le Flux & le Reflux envoyé par ordre de M. le Comte de Pontchartrain dans les Ports de l'Ocean, & dont il a été parlé dans l'Hist. de 1701*, a déja eu une partie de son effet.

Mrs Baërt & du Bocage, Professeurs en Hidrographie, le premier à Dunquerque, & le second au Havre de Grace, ont envoyé à l'Académie le Journal des observations qu'ils ont faites, chacun dans son Port, pendant plus d'une année en 1701. & 1702. M. Cassini le fils a examiné ces deux Journaux, & en a fait les Résultats.

Ce que nous avons dit en 1701. se confirme. *On pourroit plûtôt se flater d'avoir le systême du Flux & du Reflux, que s'assurer d'avoir les Phenomenes avec assés d'exactitude.*

On apprend des faits nouveaux & importans, mais tout s'accommode assés bien avec la pression de la Lune sur l'Ocean, imaginée par M. Descartes.

Ce n'est pas que cette pression n'ait de grandes difficultés. Comment concevoir seulement qu'elle se fasse ? La Lune est dans le Tourbillon de la Terre, comme y seroit un volume égal de la matiere céleste dans laquelle elle nage, elle y est en équilibre, & en vertu de quoi presse-t'elle ? Quand même elle entreroit pour la premiere fois dans le Tourbillon de la Terre, & y entreroit de force, il n'arriveroit autre chose sinon que dans toute l'étenduë de ce Tourbillon la matiere qui le remplit se condenseroit également & uniformément, autant qu'il seroit necessaire pour faire place à la Lune, & par consequent il ne se feroit pas une plus grande pression sur l'étenduë de l'Ocean qui répond à la route de cette Planete, que par tout ailleurs ; cependant l'inégalité de pression est necessaire pour abaisser les eaux entre les Tropiques, & les élever vers les deux Poles.

On pourroit peut-être rectifier cette idée en donnant à la Lune un Tourbillon particulier, qui comme le Tourbillon général de la Terre tourneroit d'Occident en Orient, & dont par conséquent la moitié inferieure iroit à l'égard de la Terre d'Orient en Occident. Le mouvement de la matiere qui composeroit cette moitié, seroit donc opposé au mouvement de la matiere du Tourbillon général de la Terre, & delà il suit que celle qui devroit passer sous la Lune, toûjours en même quantité, étant retardée par cette espece d'obstacle qu'elle trouveroit, & pressée entre la Lune & la Terre, presseroit réciproquement l'une & l'autre, & par conséquent enfonceroit les eaux de l'Ocean qui seroient au-dessous d'elle.

Que cette Hipothese soit recevable ou non, il n'importe. Seulement il est bon de se faire cette image, ou quelque autre semblable pour entrer plus facilement dans les phenomenes du Flux & du Reflux, qui parois-

ſent fort liés avec le mouvement de la Lune.

Comme l'enfoncement des Eaux ſe fait entre les Tropiques, elles prennent en s'élevant vers les Poles un mouvement qui ne peut être que ſucceſſif. Delà il ſuit, & que dans nôtre Hemiſphere ſeptentrional, elles arrivent plûtôt à une Côte moins ſeptentrionale, qu'à une qui l'eſt d'avantage, plûtôt au Havre, par exemple, qu'à Dunquerque, & que dans un lieu déterminé, comme le Havre, le temps de la haute mer dépend du paſſage de la Lune par un certain Meridien, qui n'eſt pas pour cela le Meridien du lieu, mais celui où la Lune ſe trouve, lorſque les eaux dans leur plus grande hauteur arrivent à ce lieu-là. Il eſt manifeſte que ce Meridien eſt toûjours le même, & puiſque le paſſage de la Lune par un Meridien quelconque retarde tous les jours de 49′ à peu près, il faut que les Marées en quelque lieu que ce ſoit retardent autant.

On ſçait depuis long-temps que les plus grandes Marées, c'eſt-à-dire celles où la Mer monte le plus haut, ſont vers les Nouvelles & Pleines Lunes, & les plus petites vers les Quadratures. Si l'on veut ſe faire quelque idée de la cauſe, on peut s'imaginer que ce Tourbillon ſuppoſé de la Lune eſt elliptique, comme le grand Tourbillon du Soleil, & que dans les Conjonctions & Oppoſitions, ſon plus grand diametre paſſe à peu près par le centre de la Terre, & que dans les Quadratures c'eſt le petit. Cela rendra la preſſion de la matiere céleſte ſous le Tourbillon de la Lune plus grande dans un tems que dans un autre.

Pour avoir un point fixe d'où l'on compte dans un certain lieu le retardement de la Marée pour tous les jours d'une Lunaiſon, on prend le tems de la haute mer de la Nouvelle ou Pleine Lune. Mais ce tems par pluſieurs raiſons n'eſt pas préciſement le même d'une Lunaiſon à l'autre.

1°. Ce n'eſt pas le retour de la Lune à la même Phaſe de Conjonction ou d'Oppoſition, mais c'eſt ſon retour à

un certain Meridien à la même heure, qui fait le retour de la Marée à la même heure dans un certain lieu. Si donc dans une seconde Lunaison la Lune est revenuë à la même Phase avant que d'être revenuë à ce Meridien, la haute mer de cette Lunaison doit arriver plus tard que celle de la premiere ; & si c'est le contraire elle arrivera plûtôt.

2°. Quelques causes particulieres, & principalement le Vent, avancent ou retardent les Marées. Si la direction du Vent concourt avec celle du mouvement de l'eau, elle en doit aller plus vîte, sans compter qu'elle s'élevera aussi plus haut. S'il arrive des changemens dans la disposition du fond de la Mer, il en pourra arriver aussi dans la Marée, qui trouvera une nouvelle facilité, ou un nouvel obstacle. Les irrégularités de la Marée d'un lieu peuvent influer sur celle d'un autre, & tout cela ensemble se combinera de mille manieres differentes.

Il y a donc de la variation dans le temps de la Marée d'un certain lieu à la même Phase de la Lune. Par les observations du Havre & de Dunquerque, M. Cassini le fils a trouvé que cette variation y est d'une heure dans les Pleines Lunes, & prenant un tems moyen, il a fixé celui de la haute mer au Havre dans la Pleine Lune à 9 heures du matin 26′, & à Dunquerque à $11^h\ 54'$ du matin.

Ces deux tems seroient toûjours ceux de la haute mer pour ces deux Ports dans les oppositions, si effectivement la Lune au moment de son opposition passoit toûjours à ces heures-là par les Meridiens d'où la marée de ces deux Ports dépend. Mais il s'en faut bien que cela soit ainsi. Supposons qu'à Dunquerque où la haute mer arrive près de Midi, ou, ce qui est la même chose, près de Minuit, le Meridien d'où la marée dépend soit le Meridien même de Dunquerque, car cela reviendra toûjours au même. La Lune peut être pleine lorsqu'il sera 6 heures du soir à Dunquerque, & cependant elle

ne peut paſſer par le Meridien de cette Ville que vers minuit. La haute mer qui dépend de ce paſſage tardera donc par rapport à l'heure qui a été fixée pour les Pleines Lunes, & par conſequent arrivera plus tard que minuit. Mais de combien ſera ce retardement ? Il doit être proportionné au temps dont la Pleine Lune a précedé minuit, & de plus comme c'eſt le retardement du paſſage de la Lune par un Meridien déterminé, M. Caſſini le prend pour le même que celui de 49′ dont la Lune revient tous les jours plus tard au même Meridien. Ces 49′ donnent 2′ par heure, & puiſque dans l'exemple propoſé la Pleine Lune a précedé minuit de 6^h, la haute mer n'arrivera à Dunquerque qu'à minuit 12′. Ce ſera la même choſe, mais renverſée, ſi la Pleine Lune arrive après minuit.

Par cette regle, M. Caſſini trouve le temps vrai de la haute mer dans les Nouvelles ou Pleines Lunes pour tous les Lieux où l'on aura déterminé par obſervation le temps moyen. Mais il faut bien remarquer que cette regle pour le temps vrai ne remedie qu'à l'irrégularité aſtronomique, qui vient du mouvement de la Lune, mais non pas aux irrégularités phyſiques dont nous avons parlé. Elles ne peuvent être aſſujetties à aucune regle, & par-là le calcul de M. Caſſini, quoiqu'il approche plus près du vrai que ceux qu'on faiſoit auparavant, s'en éloigne toûjours un peu, ou ne s'y rencontre juſte que par une eſpece de bonheur.

La pluſpart croyoient que les plus grandes marées arrivoient aux environs des Nouvelles ou Pleines Lunes, c'eſt-à-dire quelques jours avant ou après; mais M. Caſſini a remarqué qu'elles n'arrivent qu'après, du moins au Havre & à Dunquerque, & il a déterminé le tems moyen à deux jours.

De même le tems moyen des plus petites marées eſt deux jours après les Quadratures.

Des Nouvelles ou Pleines Lunes aux Quadratures le retardement journalier des marées eſt plus petit que des Quadratures aux Nouvelles ou Pleines Lunes. La raiſon en

en eſt, ſelon M. Caſſini, que depuis les Quadratures la preſſion qui éleve la Mer l'éleve tous les jours davantage, ce qui eſt plus difficile à cauſe du poids des eaux, & demande plus de tems.

On eſt perſuadé communément que comme les plus grandes marées d'une Lunaiſon ou d'un Mois, ſont celles des Nouvelles ou Pleines Lunes, les plus grandes d'une Année ſont celles des Equinoxes ou des environs. Cela ne ſe trouve pas vrai par les obſervations préſentes. Mais ce qui eſt très-conſidérable, & que M. Caſſini a bien remarqué, c'eſt que la grandeur des marées a toûjours rapport au plus ou au moins de diſtance de la Lune à la Terre. Plus cette diſtance eſt grande, plus la marée eſt petite, tout le reſte étant égal. Rien ne convient mieux à l'hipotheſe du Tourbillon de la Lune. Plus la Lune, ou ce Tourbillon dont elle eſt le centre, eſt proche de la Terre, plus le paſſage de la matiere céleſte eſt rétreci, & ſa preſſion augmentée.

Il y a donc dans le ſiſtême du Tourbillon deux principes qui ſe combinent enſemble pour la grandeur des marées, la proximité de ce Tourbillon à la Terre qui varie dans tout le cours d'une Lunaiſon, & la perpendicularité de ſon grand Axe à la Terre qui eſt attachée aux Nouvelles & Pleines Lunes. De-là il eſt aiſé de tirer les conſéquences. La marée d'une Quadrature où la Lune aura été dans ſon Perigée, peut être auſſi grande que celle d'une Conjonction ou d'une Oppoſition où la Lune aura été dans ſon Apogée, &c. Ces conſéquences ſont des faits conſtants par les obſervations, & indépendants de toute hipotheſe.

Voilà les principaux fondemens ſur leſquels M. Caſſini établit de nouvelles Regles pour déterminer à quelque jour que ce ſoit l'heure de la marée dans les Ports du Havre & de Dunquerque, & ces Regles plus ſûres que les anciennes, ſerviront en même-tems de modéles à l'égard des autres Ports où l'on aura fait les mêmes obſervations. Le ſalut ou la perte d'un Vaiſſeau, & même

d'une Armée navale, dépend quelquefois de la connoiſſance de l'heure de la marée dans un Port ; il faut ſçavoir ſi l'on y peut entrer ou en ſortir. L'incertitude de quelques Minutes que laiſſent les Regles, ne peut être préjudiciable.

M. Caſſini pour embraſſer cette matiere dans la plus grande étenduë qu'il lui étoit poſſible, a comparé aux obſervations du Havre & de Dunquerque celles qui furent faites il y a pluſieurs années à Breſt & à Dunquerque par Mrs. de la Hire & Picard. Il confirme ce qu'ils avoient avancé, que les marées ont plus de rapport au moyen mouvement de la Lune qu'au vrai, car aſſés ſouvent quand le mouvement vrai retarde à l'égard du moyen, la marée avance, & au contraire. Du reſte, il ſe trouve que les Regles de M. Caſſini pour le Havre & pour Dunquerque s'appliquent très-facilement & très-heureuſement aux obſervations de Breſt & de Bayonne, de ſorte qu'on apperçoit déja quelque choſe d'aſſés général ſur le Flux & le Reflux. Le tems nous développera le reſte.

SUR LE MOUVEMENT PROGRESSIF DE PLUSIEURS ESPECES *DE COQUILLAGES.*

* V. les M. p. 439.

QUoique les Animaux en général ayent un beſoin indiſpenſable du mouvement progreſſif, ſoit pour aller chercher leur pâture, ſoit enfin que les Mâles & les Femelles puiſſent ſe rencontrer, il y en a cependant quantité qui par leur figure ſeule en paroiſſent incapables ; tels ſont pluſieurs eſpeces de Coquillages, & c'eſt pour cela que M. de Reaumur les a obſervés avec beau-

coup de ſoin ; car ils pourroient, pour ainſi dire, nous dérober leur marche, & ſouvent un ſemblable fait qui n'eſt qu'exterieur, eſt auſſi difficile à découvrir, que la ſtructure interieure d'une partie.

Déja feu M. Poupart avoit obſervé * que les Moules de riviere étant couchées ſur le plat de leur coquille en faiſoient ſortir quand elles vouloient une partie, qu'on peut nommer jambe ou bras pour ſon uſage, qu'elles s'en ſervoient pour creuſer le ſable ſous elles, & par conſéquent baiſſer doucement d'un côté, de ſorte qu'elles ſe trouvaſſent à la fin ſur le tranchant de leur coquille, après quoi elles avançoient ce même bras le plus qu'il étoit poſſible, & enſuite s'appuyoient ſur ſon extremité pour attirer leur coquille à elles, & ſe traîner ainſi dans une eſpece de rainure qu'elles formoient elles-mêmes dans le ſable, & qui ſoûtenoit la coquille des deux côtés. A la vûë d'une Moule on ne devineroit pas cet expedient, & cette reſſource de méchanique.

* V. les M. de 1706. p. 56.

M. de Reaumur en a vû une ſemblable dans les Moules de Mer. Ce qu'on peut appeller leur jambe, ou leur bras, & qui dans ſon état naturel eſt long de 2 lignes, peut ſortir de 2 pouces hors de la coquille, & l'Animal ayant ſaiſi quelque endroit fixe avec ce bras ſi étendu, le raccourcit enſuite, & par conſéquent avance en ſe traînant.

Par une manœuvre à peu près pareille, & dont il faut laiſſer tout le détail à celui qui l'a découverte, le Lavignon, autre Coquillage, marche ſur la vaſe, ou s'y enfonce. Mais M. de Reaumur a remarqué que s'il s'y enfonce, ce n'eſt qu'autant que le lui permet la longueur de deux Cornes ou Tuyaux qu'il peut pouſſer hors de ſa coquille, & avec quoi il prend & rejette l'eau dont apparemment il a beſoin pour ſa reſpiration. Il faut que ces Cornes puiſſent toûjours avoir communication avec l'eau qui eſt au deſſus de lui, & de là vient que dans les tems mêmes où il ne les employe pas, car elles ne ſont pas toûjours en fonction, il y a dans la vaſe qui le couvre

un ou deux petits trous du diametre de ſes cornes, qui le décelent.

La longueur de ces Cornes, dans les autres Coquillages qui en ont, détermine auſſi la profondeur où ils ſe mettent dans la bouë.

L'Oeil de Bouc, qui eſt un Coquillage d'une ſeule piece, toûjours attaché à une pierre ſur laquelle la circonference inferieure de la Coquille peut exactement s'appliquer, ne paroît avoir d'autre mouvement que de ſoulever cette Coquille de la hauteur d'une ligne, de ſorte que ſon corps ait une circonference de cette grandeur découverte & nuë. Dès qu'on y touche, la coquille ſe rebaiſſe & le recouvre. Cependant M. de Reaumur a trouvé à cet Animal un mouvement progreſſif ſur la pierre à laquelle il ſe colle.

L'Ortie de Mer, qui a la figure d'un Cône tronqué, eſt pareillement toûjours appliquée à une pierre par la plus grande baſe de ce Cône. Des Muſcles circulaires ſont le plan des deux baſes, & des Muſcles droits vont d'une baſe à l'autre. Tout le jeu du mouvement progreſſif conſiſte en général en ce que toute la moitié des muſcles tant circulaires que droits, qui ſont du côté vers lequel l'Animal veut aller, s'enfle & s'étend, & par conſéquent occupe une petite partie d'une nouvelle place, tandis que l'autre moitié affaiſſée, ou eſt tirée par celle qui avance, ou la pouſſe elle-même du même ſens. Ce mouvement n'eſt pas plus prompt, ni plus ſenſible que celui d'une Aiguille d'Horloge.

Il y a une autre Ortie de Mer qui ne s'attache à rien, & c'eſt le plus biſarre de tous les Animaux par ſa figure, & le plus ſingulier par ſon peu de conſiſtence, puiſqu'il ſe fond entre les mains. Il ne ſeroit pas mis au nombre des Animaux ſi on ne lui voyoit un mouvement de Siſtole & de Diaſtole, ſeul ſigne de vie qu'il donne.

Enfin l'Etoile de Mer pour avoir 304. jambes à chacun des 5. rayons qui la compoſent, & qui lui ont fait donner le nom d'Etoile, n'en va pas plus vîte. Ses 1520. jambes

ne lui donnent point d'avantage ſur la Moule qui n'en a qu'une. Quelle prodigieuſe varieté dans les Ouvrages de la Nature ! non-ſeulement la grande vîteſſe du mouvement, mais même l'extrême lenteur s'execute en differentes manieres.

SUR L'EFFET DU VENT

A L'EGARD DU THERMOMETRE.

QUoiqu'il n'y ait pas d'autre voye pour parvenir aux découvertes Phyſiques que les Expériences, il ſemble qu'il ſoit en quelque ſorte dangereux d'en trop faire, parce que dans un grand nombre elles ſe détruiſent les unes les autres, & rendent les faits auſſi difficiles à établir, que les cauſes même le ſont à trouver. C'eſt ce qui paroît être arrivé aux expériences que M. de la Hire avoit faites anciennement ſur le Thermometre, & qui ont donné occaſion à celles de M. l'Abbé Teinturier Archidiacre de Verdun, de M. Caſſini le fils, & de M. de la Hire le fils, qui ſe ſont ſuivies ſelon l'ordre qu'elles ſont rapportées ici. Nous en éviterons le détail, il ſeroit trop grand par la difference des circonſtances, qui toutes cependant ont part à l'effet ; & nous tâcherons de ſaiſir quelques connoiſſances générales, les plus indépendantes qu'il ſe pourra de la variation perpetuelle des cas particuliers.

* V. les M. p. 544. & 546.

Il s'agit principalement de l'effet du Vent ſur le Thermometre. Si on ſouffle contre ma main avec un ſoufflet, je ſens du froid, quoique l'air pouſſé contre ma main ne ſoit pas plus froid que celui dont elle étoit environnée auparavant, mais c'eſt qu'elle étoit envelopée, auſſi-bien que le reſte de mon Corps, d'une Atmoſphere chaude formée par la tranſpiration, le ſouffle l'en dépoüille, & fait que l'air exterieur plus froid que cette Atmoſphere

s'applique immédiatement ſur elle. Il eſt viſible que cette maniere de recevoir une impreſſion du froid n'eſt que pour les Animaux, & non pour le Thermometre. De même ſi je mets ma main dans de la neige, je ſens d'abord du froid, & enſuite du chaud, parce que des particules très fines de la neige qui ſe fond un peu, entrent dans les pores de ma peau, & s'appliquent très-exactement aux petites fibres des nerfs, mais auſſi ces mêmes particules bouchent les pores, & arrêtent la vapeur chaude qui ſortiroit; il faut donc qu'elle s'amaſſe en un certain temps, & cauſe un plus grand ſentiment de chaleur. Cette ſucceſſion du froid & du chaud par la même cauſe n'eſt point encore pour le Thermometre.

Il juge, pour ainſi dire, plus ſimplement que nous, mais auſſi fort délicatement. S'il monte, lorſqu'on pouſſe de l'air contre la Boule avec un ſoufflet, il faut que cet air ſoit plus chaud que celui qui l'environnoit auparavant, quoique cela paroiſſe d'abord difficile à imaginer, & même ne s'offre pas trop naturellement à l'eſprit. Mais le ſoufflet peut avoir été pris dans un lieu plus chaud que celui où étoit le Thermometre, & par conſéquent échauffer l'air qu'on lui fait prendre; il peut s'échauffer lui-même par les mouvemens continuels & réïterés qu'on lui donne pendant peut-être un demi quart-d'heure; la ſeule multitude des ſpectateurs qui verront l'Expérience peut échauffer l'air; il peut s'échauffer même par la ſeule agitation que le ſoufflet lui donne, & ce qui le prouve, c'eſt qu'un Thermometre ſimplement agité pendant un demi quart-d'heure, monte après qu'on l'a laiſſé en repos. Toutes ces réflexions, qui ſont de Monſieur de la Hire le Fils, marquent combien il eſt facile que les expériences ayent des ſuccès imprévûs. Il y a même bien de l'apparence qu'on ne penſe pas encore à tout.

Le Thermometre au contraire pourra deſcendre, ſi l'expérience ſe fait dans un temps de gelée, & où l'air ſoit fort rempli de ces particules nitreuſes, que l'on peut

concevoir qui contribuent au froid. On en fera entrer une plus grande quantité dans la liqueur. La difference des Saifons peut beaucoup influer fur ces effets, & c'eft-pourquoi on a deffein de faire les expériences dans les états extrêmes de l'air.

Quand on envelopera de neige la boule d'un Thermometre, il montera fi la neige eft moins froide que l'air, ce qui peut arriver; il defcendra, fi la neige même, moins froide que l'air, fait entrer dans la liqueur de nouvelles particules nitreufes jufqu'à une certaine quantité.

Que la boule du Thermometre foit plongée dans l'eau, ou couverte d'un linge ou d'un drap fec ou moüillé, le Thermometre montera ou defcendra, felon que fon envelope agira fur lui, ou le défendra de l'action de l'air, ou la modifiera.

Que l'on fouffle contre le Thermometre enveloppé de ce qu'on voudra, ce n'eft qu'une combinaifon des expériences précedentes, fufceptible par conféquent d'un grand nombre de varietés, aifées à imaginer en general, fort difficiles à prévoir en particulier.

DIVERSES OBSERVATIONS

DE PHYSIQUE GENERALE.

I.

MOnfieur de la Hire a appris par un Mémoire qui lui a été envoyé de Pondichery dans l'Inde par le P. Tachard Miffionnaire Jefuite en 1709. que le Vernix de l'Inde, qui n'eft pas beau comme celui de la Chine ou du Japon, fe fait avec une gomme d'Arbre de couleur d'Ambre blanc, ou de Karabé, qu'on fait fondre dans un quart d'huile de lin.

I I.

M. de la Mare, Officier de Marine, ayant apporté des

Indes Orientales, du Bresil & du Perou, plusieurs especes de Drogues, les mit entre les mains de M. Sauveur, qui les fit voir à l'Académie. M. Geoffroy se chargea de les examiner. C'étoient des Racines, des Graines, des Bois, des Pierres, &c. Il compara ces Drogues telles qu'il les voyoit, & ce qu'en disoient les Mémoires de M. de la Mare, avec ce qu'en ont dit les Auteurs qui ont traité de ces matieres, & par-là il tâcha de reconnoître si ce qu'il avoit devant les yeux étoit ce que ces Auteurs ont décrit. Nous supprimons la principale partie de l'Ouvrage, quoique recherchée avec beaucoup de soin, mais qui n'étoit que de pure érudition, & nous en détacherons seulement ici & dans quelqu'autre endroit, ce qui appartient à la Physique.

Il y a à la Côte de Coromandel un Arbre assés semblable à nos Chênes, qui porte une espece de Gland, dont on tire de l'Huile comme l'Huile d'Olive. Les Malabars s'en servent dans leurs Alimens, pour brûler, & pour teindre leurs Toiles. M. de la Mare à leur exemple en mangeoit en salade & en friture avec du Poisson, & il avoit appris à en manger à tous les autres Officiers de la Côte qui s'en trouvoient fort bien.

III.

Les Noix qu'on appelle Bicuiba, brûlent comme du linge imbibé de poix, & c'est en les brûlant qu'on en tire l'huile, comme M. de la Mare l'a éprouvé chez M. Boudin, premier Medecin de feuë Madame la Dauphine. M. Jean Verdois, Consul de la Nation Françoise, atteste qu'il a guéri plusieurs Cancers avec cette huile, & qu'en mangeant une de ces Noix, on appaise la Colique.

IV.

Feu M. l'Evêque de Sées a assuré qu'un homme de son Diocese, & qu'il connoissoit, âgé de 94. ans, avoit épousé une femme de 83. grosse de lui, qui étoit accouchée à terme d'un garçon. Le tems des Patriarches est revenu, ou plûtôt n'est pas tout-à-fait passé.

V.

Un Boulanger de Chartres avoit mis dans ſa Cave, qui eſt de 36. marches de profondeur & bien voûtée, 7 ou 8 poinçons de braiſe de ſon four. Son fils, jeune homme fort & robuſte, allant y porter encore de nouvelle braiſe avec une Chandelle à la main, la Chandelle s'éteignit à moitié de l'eſcalier, il remonta, la ralluma, & redeſcendit. Lorſqu'il fut au bas de la Cave, il cria qu'il n'en pouvoit plus, & qu'on vînt à ſon ſecours, après quoi on ne l'entendit plus. Son frere auſſi fort que lui deſcendit auſſi-tôt, cria de même, & ceſſa de crier. Sa femme deſcendit après lui, une ſervante après elle, & ce fut toûjours la même choſe. Un accident ſi étrange mit le voiſinage en émotion, mais perſonne ne ſe preſſoit de deſcendre dans la Cave. Il n'y eut qu'un Voiſin plus zelé & plus hardi, qui ne croyant pas ces quatre perſonnes mortes deſcendit pour leur donner la main, & leur aider à ſortir. Il cria, & on ne le revit plus. Un Paſſant, homme fort vigoureux, demanda un Croc pour retirer quelqu'un des gens de la Cave ſans deſcendre juſqu'au bas, il jetta le Croc, & retira la ſervante, qui ayant pris l'air fit un ſoûpir. On la ſaigna auſſi tôt, mais le ſang ne vint point, & elle mourut ſur la place.

Le lendemain un homme de la Campagne, ami du Boulanger, dit qu'il retireroit tous ces corps avec un Croc, mais de peur de ſe trouver mal ſans pouvoir remonter, il ſe fit deſcendre dans la Cave avec des cordes ſur un poulin de bois, & on devoit le retirer dès qu'il crieroit. Il cria bien vîte, mais comme on le remontoit, la corde caſſa malheureuſement, & il retomba. On renoüa le plus promptement qu'il ſe pût cette corde qui s'étoit caſſée aſſés près du haut de la Cave, mais on ne pût le remonter que mort. On l'ouvrit. Il avoit le Cerveau comme ſec, les Meninges extraordinairement tenduës, les Poûmons tachetés de marques noires, les Boyaux enflés & gros comme le bras, enflamés & rouges comme du ſang, & ce qui étoit le plus particulier,

tous les muſcles des bras, des cuiſſes, & des jambes comme ſeparés de leurs parties.

Le Magiſtrat prit connoiſſance de cet évenement pour l'interêt public, & fit défenſe qu'aucun deſcendît dans la Cave, juſqu'à ce qu'on eût eu les avis des Medecins, des Chirurgiens, & même des Maçons. Il fut conclu que la braiſe que le Boulanger avoit miſe dans ſa Cave, devoit être mal éteinte, que comme il y a beaucoup de ſalpêtre dans toutes les Caves de Chartres, la grande chaleur avoit excité dans celle-là une vapeur très-maligne, qui avoit cauſé tant de funeſtes effets, qu'il faloit y jetter une grande quantité d'eau qui éteindroit le feu, & feroit tomber la vapeur nitreuſe. Cela fut executé, & au bout de quelques jours on deſcendit dans la Cave un Chien lié ſur une planche avec une Chandelle allumée. Ce Chien ne mourut point, & la Chandelle ne s'éteignit point, ſignes certains que tout le peril étoit paſſé. On retira les morts, mais ſi corrompus par l'eau qu'on n'en pût faire aucune viſite, Ils étoient fort enflés, & l'un avoit la langue hors de la bouche comme s'il eût été étranglé. L'Académie tient cette hiſtoire de M. de la Hire. Il y en a une à peu près de la même eſpece dans l'Hiſtoire de 1701 *.

* p. 18.

VI.

M. l'Abbé Teinturier, Archidiacre de Verdun, dont nous avons déja parlé ci-deſſus *, a envoyé à M. Caſſini le fils la relation d'un Echo, qu'il a vû à 3. lieuës de Verdun. Il eſt formé par deux groſſes Tours détachées d'un Corps de logis, & éloignées l'une de l'autre de 26. Toiſes. L'une a un appartement bas de pierre de taille voûté, l'autre n'a que ſon veſtibule qui le ſoit. Chacune a ſon eſcalier. Comme tout ce qui appartient aux Echos peut être appellé la Catoptrique du ſon, parce que le ſon ſe reflêchit ſelon les mêmes loix que la Lumiere, on peut regarder ces deux Tours comme deux Miroirs poſés vis à vis l'un de l'autre, qui ſe renvoyent mutuellement les rayons d'un même Objet, en multiplient l'image quoi-

* p. 13.

qu'en l'affoibliffant toûjours, & la font toûjours paroitre plus éloignée. Ainfi lorfqu'on eft fur la ligne qui joint les deux Tours, & qu'on prononce un mot d'une voix affés élevée, on l'entend repeter 12 ou 13 fois, par intervalles égaux, & toûjours plus foiblement. Si l'on fort de cette ligne jufqu'à une certaine diftance on n'entend plus d'Echo, par la même raifon qu'on ne verroit plus d'image fi l'on s'éloignoit trop de l'efpace qui eft entre les deux Miroirs. Si l'on eft fur la ligne qui joint une des Tours au Corps de logis, on n'entend plus qu'une repetition, parce que les deux Echos ne joüent plus enfemble à l'égard de celui qui parle, mais un feul. Les Memoires que l'Académie imprima en 1692. ont parlé d'un Echo plus fingulier *.

* p. 158. & fuiv.

MOnfieur Jean Scheuchzer étant venu à Paris, & ayant affifté plufieurs fois aux affemblées de l'Académie, dont il eft un des plus fçavans & des plus utiles Correfpondants, lui lût une Differtation Latine qu'il lui adreffoit fur les *Pierres figurées* qu'il avoit obfervées dans fon voyage de Flandre & de France.

Les Carrieres des environs de Paris ont à differentes profondeurs des Lits quelquefois affés épais, de differentes efpeces de Coquillages, fortement liés enfemble par de la terre ou du fable. Quand ces Coquillages ont confervé leur fubftance ou leur confiftance naturelle, ils ne meritent pas encore le nom de Pierres figurées, ce n'eft proprement que quand ils font petrifiés ; mais ils le meritent encore mieux quand après avoir fervi de moule à une matiere encore fluide qui les a entierement remplis, & s'eft durcie enfuite, leur fubftance a été abfolument détruite par le tems, & qu'il ne refte que cette matiere petrifiée qui repréfente très-exactement leur figure interieure. Alors tout ce que l'on voit n'eft veritablement qu'une Pierre figurée, & cette apparence eft fi forte qu'il eft befoin de prouver que quelque partie

d'Animal ait contribué à la formation de cette Pierre? La parfaite conformité des figures en est la démonstration, à quoi M. Scheuchzer ajoûte qu'autour de ces Pierres il y a toûjours dans la carriere un espace vuide, qui est précisement celui que remplissoit le Coquillage.

Il peut se trouver des Pierres figurées dont le Moule nous soit présentement inconnu. Les Coquillages qui les auront formées ne seront plus dans nos Mers, ou nous auront échapé. La grande quantité de Pierres qui certainement ont été moulées de cette maniere, nous met en droit de faire cette supposition. Peut être même quelques Moules seroient-ils perdus, c'est-à-dire que quelques especes de Coquillages auront peri, mais pour employer cette idée un peu hardie, il faut appercevoir dans une Pierre des traces assés sensibles de cette sorte de formation.

Aussi ne s'en sert-on pas jusqu'à present pour expliquer une Pierre qu'on croyoit qui ne se trouvoit qu'en Hongrie & en Transilvanie, & que M. Scheuchzer a trouvée en Suisse, & encore en plus grande quantité en Picardie aux environs de Noyon. Clusius l'a appellée *Numismale* à cause de sa figure ; cependant elle ne ressemble pas tant à une Medaille ou à une piece de Monnoye qu'à un Verre convexe des deux côtés, mais plus élevé au milieu que ne demande la courbure sphérique. Ses deux moitiés convexes se séparent facilement, & quelquefois se trouvent naturellement séparées. Alors on voit dans la pierre des tours faits en spirale, comme ceux d'une corde roulée autour d'elle-même. Ces tours sont liés par des especes de petits filaments, qui s'étendent obliquement vers la circonference. La surface exterieure de la Pierre est quelquefois polie, mais le plus souvent herissée de petits points, dont differentes suites font des especes de canelures irregulieres. La génération de ces sortes de Pierres, si l'on ne peut jamais les soupçonner d'avoir été moulées, réduira peut-être les

Physiciens à l'Hypothese des Semences hazardée par feu M. Tournefort *.

* V. l'Hist. de 1702. pag. 30. & suiv.

Pour expliquer les Coquillages petrifiés, & quelquefois ensevelis sous la terre à de grandes profondeurs, ou ceux qui par une longue suite de siécles se sont consumés après avoir laissé seulement l'empreinte de leurs figures, M. Scheuchzer a recours à son Hypothese du Déluge déja expliquée dans l'Hist. de 1708. *, & qui lui est commune sur ces sortes de sujets avec M. son frere. Si ce que nous avons rapporté d'après M. Saulmon dans l'Hist. de 1707 *. ne demande pas absolument cette même hypothese, du moins faut-il qu'une partie considerable de ce qui est aujourd'hui Terre, ait été Mer autrefois.

* Pag. 30. & suiv.

* Pag. 5. & suiv.

Nous ne passerons point ici sous silence une idée, sur laquelle cependant M. Scheuchzer a declaré qu'il ne prétendoit point insister, & qu'il n'a proposée que comme une espece de songe philosophique. Si l'on fait tourner avec assés de vîtesse autour de son centre un grand Bassin rond à demi plein d'eau, jusqu'à ce qu'enfin l'eau ait pris toute la vîtesse du Bassin, & qu'on vienne à l'arrêter brusquement, l'eau ne laissera pas de continuer à se mouvoir, & même avec tant de force qu'elle pourra surmonter les bords du vaisseau. De même si Dieu arrêtoit en un instant le tournoyement de la Terre sur son Axe, les eaux de la Mer se répandroient de toutes parts sur les terres avec violence. Cette maniere d'expliquer le Déluge n'est pas moins simple que nouvelle ; lors même que Dieu fait des coups de sa puissance extraordinaire, & s'affranchit de ces loix si simples qu'il a établies, on peut croire que le Miracle s'execute encore avec le plus de simplicité qu'il soit possible.

De là il suivroit, qu'au tems que Josué arrêta le Soleil, c'est-à-dire la terre selon Copernic, il a dû arriver un Déluge.

L'*Herbarium Diluvianum* de M. Jean-Jacques Scheuchzer imprimé à Zuric en 1709. & envoyé à l'Académie par son Auteur roule sur le même principe, & que l'Ouvrage dont nous venons de parler, & que tous ceux

de ces deux freres dont l'Hist. de 1708 * a fait mention. Cet Herbier extraordinaire n'est composé que de Plantes, qui du tems du Déluge ayant été ensevelies dans des matieres molles, ont laissé l'empreinte de leurs figures sur ces mêmes matieres lorsqu'elles sont venuës ensuite à se petrifier. Ce ne sont que de simples figures sans substance, mais si parfaites & si exactes, jusques dans les plus petites particularités de ce qu'elles représentent, qu'il est impossible de l'y méconnoître. Parmi un grand nombre de Plantes, qui sont toutes de ce Païs cy, il y en a une Indienne, dont la Pierre a été trouvée en Saxe, ce qui s'accorde avec une observation déja faite dans l'Histoire de 1706 *. L'étrange bouleversement que le Déluge a dû causer sur la surface de la Terre, rend fort possible ce transport d'une Plante des Indes en Allemagne. Selon la maniere dont l'Ecriture Sainte s'explique, on peut également mettre le commencement du Déluge ou au Printemps ou en Automne, mais M. Scheuchzer leve cette incertitude par quelques-unes des Plantes de son Herbier, & principalement par un Epi d'Orge. Leur âge n'est que celui qu'elles ont ici à la fin de Mai. Cela se confirme encore par un Insecte ou deux, dont on connoît assés la Vie, & qui ne sont pas plus âgés. Voilà de nouvelles especes de Medailles, dont les dates sont & sans comparaison plus anciennes, & plus importantes, & plus sûres, que celles de toutes les Medailles Grecques & Romaines.

* p. 30. & suiv.

* p. 11.

Il y a de certaines Pierres qui représentent sur leur surface, non pas comme celles de cet Herbier, une seule partie d'une Plante, ou une seule feüille, mais des Buissons, & de petites forests très-agréables. Celles-là à force de représenter, ne représentent rien, & en effet, à les examiner tant soit peu, on voit que ces Arbres ou Buissons ne ressemblent à aucune Plante veritable. Ils sont même quelquefois accompagnés de petits Châteaux, ou de Figures, qui à la verité embelissent le Tableau, mais le rendent indigne de l'Herbier du Déluge. Ce sont-là

de veritables Jeux de la Nature. M. Scheuchzer entreprend d'expliquer ce qu'il y a de Physique dans ces Jeux, c'est-à-dire, comment de certains sucs qui exudoient des pores d'une Pierre à mesure qu'elle se formoit, ont pû se répandre entre deux des feüilles ou des couches qui la composoient, & y tracer de certaines représentations à peu près regulieres, ausquelles ensuite notre imagination prête quelquefois un peu de ce qui leur manque. Il a même rendu son explication sensible aux yeux par l'expérience toute semblable de deux plaques de Marbre poli, qu'il frote l'un contre l'autre, après avoir mis de l'huile entre-deux. Elle s'y répand de maniere qu'elle forme des Troncs & des Branches.

Entre les restes du Déluge, qu'on pourroit appeller Reliques, M. Scheuchzer compte un gros Tronc d'Arbre, qu'il sçait qui est couché sur le sommet du Mont Stella, la plus haute de toutes les Montagnes des Alpes. M. Jean Scheuchzer a tenté deux fois d'aller le voir de ses propres yeux, quoique les plus déterminés Chasseurs n'ayent jamais été là qu'avec crainte, mais les Neiges ont été un obstacle invincible. Selon son estime, ce Tronc est élevé de 4000 pieds au dessus du lieu le plus élevé de ces Montagnes, où il croisse naturellement des Arbres, car passé une certaine hauteur il n'en croît plus. Qui pourroit l'avoir porté là? à quel dessein? de quelles Machines se seroit on servi?

MOnsieur le Comte Marsigli a envoyé à l'Académie un Ouvrage manuscrit intitulé *Essai de Physique sur l'Histoire de la Mer*, qu'il lui a fait l'honneur de lui dédier. Il avoit mis à profit pour la Philosophie un séjour qu'il avoit fait sur les Côtes de Provence & de Languedoc, & s'étoit mis à y étudier particulierement la Mer. La maniere dont il s'y est pris suffiroit pour faire bien entendre ce que c'est que le Genie d'observation, & pour en donner un modele. Il a formé un dessein aussi

vaste que le sujet, il en a embrassé toutes les parties, il a entrepris de faire par lui-même toutes les expériences qui pouvoient y avoir rapport. Si l'on avoit un nombre suffisant d'aussi bons Mémoires faits par des Observateurs qui eussent été postés en differens endroits du Monde, on auroit enfin une Histoire naturelle.

L'Ouvrage de M. le Comte Marsigli est si considerable que les Extraits que l'Académie en fit faire par Messieurs Maraldi & Geoffroy furent eux-mêmes d'assés grands Ouvrages. Nous n'en donnerons ici qu'une idée sans comparaison plus abregée, & nous nous aiderons beaucoup de leur travail. L'Histoire de la Mer est divisée en cinq parties. La premiere, traite de la disposition du fond ou du Bassin de la Mer. La seconde, de la nature de l'eau. La troisiéme, de ses mouvemens. La quatriéme, des Plantes qui y croissent. La cinquiéme, des Poissons. Cette derniere partie n'est pas achevée, & l'Académie n'en a encore rien vû. Tout est accompagné d'une grande quantité de figures faites avec beaucoup de soin.

Pour reconnoître la nature & la disposition des Côtes, il a fait dans des Barques differens petits voyages, qui sont tous compris entre le Cap de Sissé près de Toulon, & le Cap d'Agde en Languedoc. Il en a fait d'autres en Mer, & quelquefois jusqu'à onze lieuës pour examiner la profondeur & la nature du fond. Il a trouvé que le Golphe de Lyon est coupé en deux par une Côte cachée sous l'eau, que la partie qui est depuis la terre jusqu'à cette Côte ne passe pas soixante-dix brasses de profondeur, & que l'autre qui est vers le large en a cent cinquante en quelques endroits, & quelquefois tant, qu'elle ne peut être sondée. Il la nomme l'*Abisme*. Il a recherché quelle étoit la conformation du terrein, c'est-à-dire, l'arrangement des differens bancs ou lits de terre, de sable, de roche, &c. non seulement dans la Côte, mais dans les Isles ou Ecueils voisins. Cette conformation s'est trouvée semblable, desorte que les Isles ne sont que des fragmens de la Terre ferme, & qu'apparemment le fond de la Mer en

en est une continuation. De-là on peut conjecturer, comme M. Marsigli, que le Globe de la Terre a une structure déterminée, organique, & qui n'a pas souffert de grands changemens, du moins depuis un temps considerable.

Il fait voir que des lits de Sel & de Bitume sont mêlés entre des lits de pierre, & que sur le fond *naturel* de la mer il s'est formé un fond *accidentel* par le mêlange de differentes matieres, sable, coquillages, vase, &c. que la glutinosité de la mer a fortement unies & collées ensemble, & qui se sont ensuite durcies, même quelquefois jusqu'à se pétrifier. Comme ces incrustations se font nécessairement par couches, il y en a telle où les Pescheurs distinguent les augmentations annuelles. Elles ont une varieté surprenante de Couleurs, qui quelquefois penetrent jusques dans la substance pierreuse, mais le plus souvent ne sont que superficielles, & se dissipent hors de l'eau.

Quelques-unes des matieres qui forment ces incrustations ont donné par la Chimie des principes si semblables à ceux des Plantes marines, qu'on pourroit les soupçonner d'en être, d'autant plus qu'elles sont quelquefois toutes disposées par filamens. Ce seroient des Mousses de Mer dures, ou des *Lichens* qui s'attachent à la pierre, & en ont presque la dureté.

Il a paru à M. le Comte Marsigli par un Thermometre plongé dans l'eau, que le degré de chaleur y est égal à differentes profondeurs, qu'en Hyver il est un peu plus grand dans cette Mer que dans l'air, & au contraire en Eté, mais assez souvent égal. Cependant M. Marsigli a observé aussi que plusieurs Plantes de la Mer s'accordent avec celles de Terre pour repousser au Printemps, plutôt qu'en d'autres Saisons. Un accident empêcha que les expériences sur la chaleur de la Mer ne fussent continuées autant qu'il auroit fallu.

Selon lui, l'eau de la Mer, on suppose qu'elle soit bien choisie, est plus claire & plus brillante qu'aucune autre

eau. Quant à sa couleur, elle dépend & du fond, & du Ciel, & de tant d'autres circonstances jusqu'ici moins connuës, que toutes les expériences de M. Marsigli lui laissent encore sur ce sujet beaucoup à desirer.

Il est plus aisé de déterminer les causes de sa salure, & de son amertume, car il faut bien remarquer l'amertume comme differente de la salure. L'une est produite par la dissolution des lits ou bancs de Sel, l'autre par la dissolution des lits de Bitume.

L'eau est beaucoup plus propre à dissoudre le sel que le Bitume, qui est une matiere huileuse. Aussi dans l'eau de mer la dose du sel est-elle beaucoup plus forte que celle du bitume. M. Marsigli ayant pris 23 onces 2 gros d'eau de Citerne pour en faire de l'eau de mer, il y mit 6 gros de sel commun, & seulement 48 grains d'esprit de Charbon de terre, car le Charbon de terre est bitume, & d'ailleurs il s'en trouve des Mines dans les montagnes de Provence, & avec ce mêlange il eut une eau de mer artificielle du même goût que la naturelle. Ces 48 grains n'augmentérent point le poids de l'eau pesée par l'Aréometre.

La petite quantité & la legereté de cette matiere bitumineuse, font que l'eau de mer distilée, & qui par la distillation a perdu sa salure, n'a pas pour cela perdu son amertume, & un goût desagreable, ni même, à ce qu'on prétend, une qualité malfaisante. La distillation qui se fait naturellement par le Soleil, & qui est assés differente de celle d'un Alembic, purge parfaitement l'eau de mer de son bitume.

Il y a dans la Terre tant de matieres differentes que la Mer lave, & dont elle doit enlever des particules, qu'on peut assés legitimement croire que le bitume n'est pas le seul principe qui s'y mêle avec le sel.

Par ce que nous venons de dire, on voit que sur 24 onces d'eau de mer il y a 6 gros de sel, ou, ce qui est la même chose, qu'elle contient de sel la 32me partie de son poids. Mais cela n'est vrai que de l'eau prise à la surface

de la mer, celle du fond eſt plus ſalée, & a la 29me partie de ſon poids de ſel. Les eaux plus ſalées ſont auſſi plus peſantes. Celles qui ſont ſur la ſurface de la mer à l'embouchure du Rhône, ſont d'une 303me partie plus legeres que les eaux plus éloignées pareillement ſuperficielles, & celles-ci encore plus legeres que celles qui ſont plus éloignées de Terre.

Il eſt aſſés étonnant que l'eau de la Mer, à qui le ſel n'a pas manqué, n'en ait pas diſſous tout ce qu'elle en pouvoit diſſoudre. Par les experiences de M. le Comte Marſigli une quantité d'eau qui doit en contenir 6 gros, en diſſout encore $4\frac{1}{2}$, & l'eau de mer artificielle 5. Il conjecture que les Animaux & les Plantes de la Mer conſument une partie de ſon ſel, qu'il s'en diſſipe une autre partie en l'air, que les eaux douces qu'elle reçoit non-ſeulement par les Rivieres, mais par les ſources de ſon fond, la deſſalent encore, mais avec tout cela il ne prétend pas que la difficulté ſoit entierement levée.

Il a fait paſſer 14 livres d'eau de mer au travers de 15 pots de terre, qu'il a ſucceſſivement remplis de terre de jardin, & de ſable de mer. S'ils avoient été joints enſemble, ils auroient fait une Caſcade de 75 pouces de long, & de 5 de large. Les 14 livres d'eau ayant paſſé & par le ſable & par la terre ont été également réduites à 5. livres 2 onces, mais elles ont été mieux deſſalées par le ſable, & dépoüillées d'une plus grande partie de leur poids. Si la Caſcade de ſable avoit été double en longueur, on peut croire qu'elles ſeroient devenuës preſque inſipides. Par ce moyen l'eau de la mer pourroit devenir douce en ſe filtrant dans les entrailles de la Terre, ſi au bout d'un certain temps les filtres ne ſe rempliſſoient pas du ſel qui y a été depoſé.

Le ſel des eaux ſuperficielles eſt blanc, & celui des eaux profondes cendré obſcur. Le premier eſt le ſeul à qui l'on trouve de l'acide, il eſt d'un ſalé plus mordant, & d'une amertume beaucoup moins ſenſible. De-là vient qu'à Peccais en Languedoc, où l'on tire du ſel d'eaux

profondes de Puits, il faut le laiſſer expoſé à l'air du moins pendant trois ans, avant que de le débiter. Ce temps lui eſt neceſſaire pour ſe dépoüiller d'une amertume qui ſeroit inſupportable. Nous ſupprimons un grand nombre d'obſervations ſur le Sel marin, parce que cette matiere eſt plus connuë.

M. le Comte Marſigli n'a pas eu le loiſir de ſe contenter pleinement ſur le fait du Bitume contenu dans l'eau de la Mer. Il croit cependant que c'eſt ce qui produit l'onctuoſité naturelle de cette eau, que la diſtillation même ne lui ôte pas, la grande quantité de glu qui s'attache ſur les pierres, & ſur les Plantes, l'union de tant de corps heterogenes qui ſe collent enſemble, le Tartre qui endurcit en quelques endroits le fond de la mer, ou enduit pluſieurs ſortes de matieres, & principalement les Lithophitons, Plantes marines. Il a commencé en differens temps ſur les tartariſations de la mer des expériences, qui n'ont pû être ſuivies aſſés loin.

Il a obſervé que les Legumes cuits dans l'eau de la Mer en ſortent plus durs qu'on ne les y a mis, que la chair de Mouton y devient plus blanche & plus tendre que dans l'eau douce, mais fort ſalée & fort amere, que le pain fait avec l'eau de mer eſt ſalé, & ſe peut manger pendant qu'il eſt tendre, mais que lorſqu'il eſt raſſis il prend une amertume exceſſive.

La Mer a trois ſortes de mouvemens, le Flux & Reflux, les Courans, & l'Ondulation. On ſçait que la Mediterranée n'a point de Flux & de Reflux, du moins dans ſon Tout, & en effet ſelon le Syſtême ordinaire elle n'en doit pas avoir, puiſqu'elle n'eſt pas ſous la route de la Lune. Cependant comme un Flux & Reflux peu ſenſible auroit pû facilement échaper aux obſervations que l'on fait communément, M. le Comte Marſigli en a fait de nouvelles, & auſquelles ce mouvement ne ſe feroit pas dérobé. Il ne s'eſt point du tout fait appercevoir dans les endroits où l'on obſervoit.

M. Marſigli n'a rien découvert de reglé ſur les Cou-

rans ; quoiqu'il n'y ait pas épargné ses voyages ; ni ses peines. Il n'a pû vérifier ce qu'on dit communément de ce fameux Courant qui côtoye toute la Mediterranée, comme s'il étoit formé par l'entrée des eaux de l'Ocean, & par leur retour. Mais il croit avoir reconnu une chose fort singuliere. Pendant l'Eté & dans le temps de la Pesche du Corail, on apperçoit à la Côte de l'*Abisme* un Courant qui paroît avoir rapport au mouvement du Soleil sur l'Horison, mais de maniere qu'il lui est toûjours opposé. Lorsque le Soleil est dans la partie Orientale de son cours diurne, c'est-à-dire depuis son lever jusqu'à Midi, le Courant va à l'Occident, à Midi il se tourne au Nord, ensuite à l'Orient. On n'a pas marqué si à Minuit il alloit au Sud ; cela conviendroit au reste, & paroît même necessaire.

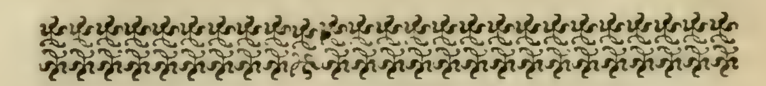
Quant à l'Ondulation, il suffit d'en connoître les excès. M. Marsigli a observé entre Maguelone & Peyrole que dans une grande tempête les ondes s'élevoient jusqu'à 7 pieds sur le niveau ordinaire de la Mer. Aux rivages montueux, comme sont ceux de Provence, un Vent furieux de *Lebesche* n'y fait élever l'eau que de cinq pieds, mais la percussion qu'elle fait contre les roches la pousse quelquefois jusqu'à huit. Cela n'est pas comparable aux Tempêtes Poëtiques.

Nous réservons pour la Chimie & pour la Botanique tout ce qui regarde les Plantes de la Mer, & leur Analyse, tant afin d'observer plus d'ordre, que de peur de faire ici un trop long Extrait, ou plutôt pour avoir droit de le faire plus long en le divisant. Quelque étendu qu'il puisse être, il sera encore extrêmement court par rapport à la grande quantité d'expériences, & de vûës que contient l'Ouvrage de M. le Comte Marsigli.

NOus renvoyons entierement aux Memoires Le Journal de M. de la Hire pour 1709. V. les Mem. pag. 139.

Ce qu'il a donné sur les Pluyes & les Vents observés à Pontbriand. V. les Mém. pag. 143.

V. les Mém. pag. 155. Et sur les Observations du Barometre faites à Zuric.
V. les Mém. pag. 386. Les Reflexions de M. de Reaumur sur la Soye des Araignées.



ANATOMIE.

SUR LES MOULES D'ESTANG.

V. les Mém. p. 408.

NOus connoissons assés, du moins jusqu'à un certain point, les Animaux les plus exposés à nos yeux, & avec qui nous avons, pour ainsi dire, le plus de commerce. Mais il y en a une infinité d'autres que le peu de besoin que nous en avons, la difficulté de les observer, un certain mépris que nous donnent leur petitesse ou leur figure, nous font négliger, ou nous dérobent absolument. Tels sont principalement les Insectes & les Coquillages.

Qui croiroit qu'il y a un Animal qui ne reçoit sa nourriture, & ne respire que par l'Anus, qui n'a ni Veines ni Arteres, en qui il ne se fait point de circulation? Il ne faut pas compter qu'il est Hermaphrodite, c'est une merveille presentement trop commune, mais il differe de tous les autres Hermaphrodites connus en ce qu'il se multiplie indépendamment d'un autre Animal de son espece, & est lui seul le Pere & la Mere de ce qui vient de lui. Voilà une idée d'Animal toute nouvelle. C'est la Moule d'Estang, dont M. Mery a démêlé la structure, malgré sa figure informe, & rebutante par son excessive singularité.

Ce qu'on peut appeller Tête dans la Moule, quoi-

qu'on n'y trouve point d'yeux, ni d'oreilles, ni de langue, mais ſeulement une ouverture qu'on peut appeller bouche, eſt une partie immobile, & attachée à une des Coquilles, deſorte qu'elle ne peut aller chercher la nourriture, & qu'il faut que la nourriture vienne la chercher. Cette nourriture n'eſt que de l'eau, qui lorſque les Coquilles s'ouvrent, entre dans l'anus de la Moule qui s'ouvre en même tems, paſſe de-là dans certains réſervoirs ou canaux compris entre la ſuperficie interieure de la Coquille, & la ſuperficie exterieure de l'Animal, & enfin va ſe rendre dans la bouche de cet Animal, quand il l'y oblige par un certain mouvement.

Au fond de la bouche ſe préſentent deux Canaux pour recevoir l'eau. L'un jette dans le corps de la Moule pluſieurs branches, dont une va ſe terminer au Cœur. L'autre eſt une eſpece d'Inteſtin qui d'abord paſſe par le Cerveau, fait enſuite pluſieurs circonvolutions dans le Foye, au ſortir de-là traverſe le Cœur en ligne droite, & va finir dans l'anus.

Ce Cerveau & ce Foye ne le ſont guéres qu'autant que l'on veut, le Cœur eſt un peu davantage un Cœur. Il a un Ventricule & deux Oreillettes, & les mouvemens de Siſtole & de Diaſtole alternatifs dans le Ventricule & dans les Oreillettes, mais il n'a ni veines ni Arteres; l'eau qui lui eſt apportée par ſon canal entre du Ventricule dans les Oreillettes, & retourne des Oreillettes dans le Ventricule, & fait une legere repreſentation de circulation ſans aucun effet apparent, car une fois arrivée dans ce Cœur elle n'a plus de chemin pour en ſortir. Que devient donc l'amas qui s'y en doit faire? apparemment il ne ſe fait point d'amas, parce que l'Animal ne fait pas continuellement couler de l'eau par ſa bouche dans ſon cœur; & que quand il y en a fait entrer une certaine quantité, les contractions du cœur l'expriment au travers de ſes pores, & la pouſſent dans les parties voiſines, qui s'en abreuvent, & s'en nourriſſent.

Le canal que M. Méry nomme Inteſtin, & qui auſſi-bien

que l'autre reçoit immédiatement l'eau de la bouche, ne paroît pas propre à porter la nourriture aux parties, parce qu'il n'a point de branches qui s'y distribuent. Cependant il contient vers son commencement, & vers sa fin des matieres assés differentes, dont les premieres pourroient être de l'eau digerée, c'est-à-dire, les sucs nourriciers qui en ont été tirés, & les autres en seroient l'excrément.

La Moule ne peut respirer que quand elle s'est élevée sur la surface de l'eau, & elle s'y éleve comme les autres Poissons, par la dilatation qu'elle cause à l'air qu'elle contient en elle-même en dilatant la cavité qui le renferme. Alors c'est encore son anus qui reçoit l'air du dehors, & le conduit dans ses Poumons, mais il faut qu'il ne lui soit pas fort necessaire, car elle est presque toûjours plongée au fond de l'eau.

Elle a des Ovaires & des Vesicules seminales. Ces deux especes d'organes sont également composés de tuyaux arrangés les uns à côté des autres, tous fermés par un même bout, & ouverts par le bout opposé. On ne distingue pas ces parties par leur structure, qui est toute pareille à la vûë, mais par la difference de ce qu'elles contiennent, & d'autant plus que les Ovaires sont toûjours pleins d'œufs en Hyver & vuides en Eté, & que les Vesicules sont en toute Saison également peu remplies de leur lait, qui par consequent paroît s'en écouler toûjours. Tous les tuyaux se déchargent dans l'anus, & M. Méry conçoit que quand les œufs vont s'y rendre dans la saison de leur sortie, ils ne peuvent manquer d'y rencontrer le lait ou la semence qui les féconde. L'Animal n'a donc pas besoin du secours d'un autre pour la génération.

M. Méry n'est pas d'accord avec feu M. Poupart sur le mouvement progressif des Moules d'Estang *. Il prétend que leur ventre entier, qui quand elles veulent sort de deux pouces hors de leurs Coquilles sous la figure de la Carene d'un Navire, rampe sur la vase, comme feroit sur la terre le ventre d'un serpent. Il décrit les muscles qui par leurs contractions alternatives font tout le jeu de cette méchanique.

* V. ci-dessus pag. 11.

Il

Il ne croit pas non plus que la Coquille de la Moule se forme, comme M. de Reaumur a trouvé que se formoit celle du Limaçon *. Les premiers tours de celle-ci ne sont pas plus grands dans un Limaçon plus grand & plus âgé, ce qui prouve que la Coquille n'est pas un membre de l'Animal, & se fait par une addition successive de parties étrangeres; mais de certaines bandes que l'on apperçoit sur la Coquille d'une Moule sont plus grandes dans de plus grandes Moules. D'ailleurs la Moule a 8. Muscles attachés à la surface interieure de ses Coquilles; si les Coquilles ne croissoient pas de la même maniere que les Muscles, il faudroit donc que ceux-ci attachés d'abord en certains endroits dans la Moule naissante, changeassent continuellement d'attache jusqu'à la derniere croissance de l'Animal, & comment cela seroit-il possible? la difficulté est considerable, mais peut-être n'est-ce qu'une difficulté.

* V. l'Hist. de 1709. pag. 17. & suiv.

SUR L'IRIS

DE L'OEIL.

IL est à propos que les pensées nouvelles & hardies soient contestées; elles s'affermissent ou succombent, & l'on sait à quoi s'en tenir. Celle de M. Mery sur la dilatation & le resserrement de la membrane Iris, exposée dans l'Histoire de 1704. *, étoit de cette espece. M. de la Hire * n'a pu admetre que les fibres de l'Iris, qu'il faut concevoir comme autant de petits Muscles, eussent une action toute contraire à celle de tous les autres Muscles, c'est-à-dire s'allongeassent en se gonflant, & se raccourcissent en se remettant dans leur état naturel. C'est cette hipothese singuliere, & qui, comme nous l'avons dit en 1704, n'a pour elle qu'un seul exemple dans tout le Corps humain; que M. Méry entreprend de défendre.

V. les M. p. 374.

* p. 12. & suiv.

* V. l'Hist, de 1709. p. 90. & suiv.

Il ne s'agit que de ſavoir lequel des deux états des fibres de l'Iris, de celui où elles ſont allongées, ou de celui où elles ſont raccourcies, eſt leur état naturel. Dans le premier la Prunelle eſt moins ouverte, dans l'autre elle l'eſt davantage.

Tous les Muſcles ont un état naturel où ils ſont en repos, & ils n'en ſortent que par l'action d'une cauſe étrangere, qui change leur figure & leur poſition. On ſuppoſe communément que cette cauſe ce ſont les Eſprits animaux, dont l'influence plus abondante groſſit les Muſcles, & les accourcit. Quand cette eſpece de violence ceſſe, ils ſe remettent par leur reſſort dans leur premier état. Ainſi le reſſort naturel des parties eſt la force oppoſée à la cauſe étrangere qui change les Muſcles. M. Méry prouve que la mort ne détruit point ce reſſort, tant que les parties ſont exemptes de corruption, & en effet il eſt évident que le reſſort ne ſuppoſe rien de vital. Dans un Chat mort les dernieres Phalanges des doits ſont toûjours entierement relevées, parce qu'il y a des Fibres à reſſort deſtinées à cet effet, qui ne peuvent plus être combatuës par leurs Muſcles *antagoniſtes*, dont l'action dépend uniquement des Eſprits, & ceſſe avec eux. De même les Coquilles d'une Moule d'Eſtang morte ſont toujours entr'ouvertes; parce qu'elles s'ouvrent par un reſſort, & ne ſe ferment que par des Muſcles qui ont beſoin d'Eſprits. L'état où ſeront les Fibres de l'Iris après la mort ſera donc celui où leur reſſort les tient naturellement; or après la mort la Prunelle eſt toûjours dilatée, c'eſt-à-dire que les Fibres de l'Iris ſont raccourcies; elles le ſont pareillement & dans la Goute ſereine, & dans la Sincope, dont l'une eſt une mort de l'Oeil par rapport à la viſion, & l'autre une petite mort de tout l'Homme, & toutes deux une privation d'Eſprits. C'eſt donc l'état naturel des Fibres de l'Iris que d'être raccourcies, & de tenir la Prunelle ouverte.

Tout cela ſuppoſe que la membrane de l'Iris qui eſt circulaire ſoit compoſée de petites Fibres droites, tou-

tes dirigées de la circonference exterieure vers le centre, & c'eſt là en effet la ſtructure que l'on y apperçoit. Mais comme dans une partie auſſi petite, & auſſi délicate on eſt en droit de ſuppoſer à peu près ce que l'on veut, on pourroit imaginer que ſur ce plan des Fibres droites il y auroit un autre plan de Fibres circulaires, qui formeroient un Muſcle total antagoniſte du premier.

Mais M. Méry oppoſe à cette idée que ſi ces deux Muſcles ſont antagoniſtes, ils ont des actions contraires, que quand les Fibres droites ſont allongées, les circulaires doivent ſe raccourcir, & au contraire, que les Fibres circulaires accourcies forment de plus petits cercles, & par conſéquent diminuent l'ouverture de la Prunelle, ainſi que font les Fibres droites allongées, que les deux Muſcles ne font donc que le même effet, & ne ſont pas proprement antagoniſtes comme on le ſuppoſe, mais *congeneres*, & que le circulaire qui n'eſt qu'imaginé, & ne ſe voit point, eſt abſolument inutile.

Si l'on donne la même action aux deux Muſcles, & que les Fibres circulaires s'allongent, ou s'accourciſſent en même tems que les droites, il eſt vrai que les effets ſeront contraires, & que les Fibres circulaires ouvriront la Prunelle, par exemple, tandis que les droites la fermeront. Mais à quoi bon cette contrarieté d'effets, dont l'un détruiroit l'autre? La Prunelle ſeroit donc toûjours dans une ouverture moyenne, à moins que les deux Muſcles ne l'emportaſſent alternativement l'un ſur l'autre. Mais cet avantage alternatif ne paroît pas poſſible, puiſqu'il devroit venir non de leur action alternative, car on ſuppoſe ici qu'ils agiſſent enſemble, mais de leur force abſoluë qui ne peut être alternativement plus grande & plus petite dans les deux.

En voilà peut-être aſſés ſur le fond de la queſtion dépoüillée de tout ce qui ne lui eſt pas eſſentiel. Le reſte appartiendroit à la conteſtation, qui ne peut guere ſe renfermer dans le ſeul éclairciſſement d'un ſujet. L'amour de la Verité même, s'il eſt un peu vif, paſſera les bor-

nes de ce que demande précisément l'interêt de la Verité.

DIVERSES OBSERVATIONS
ANATOMIQUES.

I.

MOnsieur Homberg a avancé ce Paradoxe, que l'on pouvoit guerir un Rhumatisme par un bain d'eau froide aussi-bien que par un bain chaud, ou par la sueur. Le Rhumatisme est causé par une serosité âcre, devenuë assés subtile pour s'échaper des veines, d'où elle s'est épanchée dans des Muscles, dont elle picote les Fibres, & embarasse les mouvements. Comme sa grande subtilité fait qu'elle s'éparpille beaucoup, elle ne peut plus être reprise par les veines d'où elle est sortie. Il est égal ou de la chasser du corps, ou de la faire rentrer dans ses vaisseaux. Une grande chaleur la fera sortir par transpiration, le froid la condensera & la mettra en état de rentrer dans les veines. Peut-être même suffit-il que le froid empêche une nouvelle serosité de succeder à la premiere, qui nécessairement se brise, s'attenuë, & se dissipe. Le chaud dispose au contraire une nouvelle serosité à s'échaper des vaisseaux.

II.

Dans le cadavre d'un Enfant mort à *6.* jours, M. Littre a vû le Rectum divisé en deux parties, qui ne tenoient l'une à l'autre que par quelques petits filets, longs environ d'un pouce. Ces deux parties separées s'étoient fermées chacune de son côté par le bout où s'étoit faite la separation, de sorte que les deux clôtures se regardoient. Apparemment le Rectum n'ayant pas pris dans ce fœtus autant d'accroissement à proportion que les parties ausquelles il étoit attaché, avoit été étendu &

tiré avec violence, & enfin entierement déchiré, à l'exception de quelques fibres plus fortes, qui étoient demeurées entieres, quoique fort allongées. Ce déchirement s'étoit fait dans le temps où le canal étoit encore vuide, & rien par conséquent n'avoit empêché que les extremités des deux parties separées ne s'affaissassent, & ne se collassent ensemble, ce qui avoit fait les deux clôtures. Ensuite la partie superieure de l'Intestin s'étoit remplie de *meconium*, mais non pas en assés grande quantité pour être obligée de se rouvrir. Quant à la partie inferieure, elle avoit toûjours dû être, & étoit en effet entierement vuide. Il est aisé de concevoir quels accidens s'ensuivoient de cette conformation accidentelle, & combien la mort de l'Enfant dût être prompte, puisque ses excrémens ne pouvoient sortir, & que tout ce qu'on lui faisoit prendre pour le déboucher augmentoit nécessairement le mal.

M. Littre qui a voulu rendre son observation utile, a imaginé & proposé une opération chirurgique fort délicate pour les cas où l'on auroit reconnu une semblable conformation. Il faudroit faire une incision au Ventre, & recoudre ensemble les deux parties d'Intestin après les avoir rouvertes, ou du moins faire venir la partie superieure de l'Intestin à la playe du Ventre, que l'on ne refermeroit jamais, & qui feroit la fonction d'anus. Sur cette legere idée, d'habiles Chirurgiens pourront imaginer d'eux-mêmes le détail que nous supprimons. Il suffit souvent de sçavoir en gros qu'une chose seroit possible, & de n'en pas désesperer à la premiere vûë.

III.

M. Chomel a fait voir à l'Académie 22 Pierres qui venoient d'être trouvées dans le corps d'une Dame de 80 ans, fort vigoureuse pour son âge, & morte d'apoplexie. Elles s'étoient formées dans un sac, qui n'étoit qu'une extension des membranes du Duodenum, vers le haut de cet Intestin. Elles étoient de 5 à 6 lignes de diametre, toutes presque égales, de figure assés reguliere,

du moins autant qu'il ſe pouvoit après s'être comprimées les unes les autres dans une cavité commune, lorſqu'elles étoient encore molles. Leur couleur exterieure étoit d'un blanc jaunâtre, leur ſurface polie, luiſante, & un peu ſavonneuſe. Leur conſiſtance, quoique ſolide, n'étoit pas abſolument pierreuſe, on les caſſoit avec facilité, & on y voyoit diſtinctement les differentes couches dont elles étoient compoſées, juſque vers le milieu de ſon épaiſſeur. Au centre, & dans quelque étenduë à l'entour la matiere étoit plus ſpongieuſe & moins dure, il partoit de ce centre des canelures qui comme des rayons ſe terminoient à la couche la plus interieure de celles qui ſe pouvoient diſtinguer. Ce milieu étoit ſemé de quelques grains blancs, & brillants comme des particules de ſels criſtalliſés.

M. Chomel ayant mis aux eſſais Chimiques ces pierres réduites en poudre, trouva qu'elles ne donnoient aucun indice ni d'Acide ni d'Alcali, & que par conſéquent elles étoient d'une nature abſolument terreuſe.

Comme c'eſt à l'entrée du Duodenum que ſe mêlent d'abord le Chile qui ſort de l'Eſtomac, le ſuc Pancreatique, & la Bile, M. Chomel croit qu'un Chile mal digeré, & par-là plus propre à faire une maſſe ſolide, durci encore par le mêlange des deux autres ſucs mal conditionnés, aura pû donner naiſſance à une premiere pierre, mais encore fort tendre, qui ſe ſera attachée à la membrane interne du Duodenum. A meſure qu'elle groſſiſſoit, elle aura augmenté ſa petite loge, & pouſſé les membranes en dehors, pour faire place aux matieres qui doivent couler dans ce canal. Voilà le ſac qui commence à ſe former, & la pierre en ſe durciſſant par le tems aura perdu l'onctuoſité qui l'y attachoit, & y aura floté librement. Après cela la génération de nouvelles pierres, & l'augmentation du ſac ſont aiſées à imaginer. La Dame qui portoit ces pierres ne vomiſſoit point; mais deux heures après qu'elle avoit mangé elle ſentoit une legere douleur vers l'endroit où le ſac étoit placé. C'é-

toit-là juſtement le temps où le Chile de la nouvelle digeſtion couloit dans le Duodenum, qui ne lui donnoit pas un paſſage aſſés libre, parcequ'il étoit comprimé & geſné par le ſac.

I V.

M. Geoffroy le jeune a fait voir un Ténia trouvé dans une Tanche fort ſaine & fort graſſe, ſemblable à ceux qui ſe trouvent dans l'Homme, à cela près qu'il n'étoit pas découpé par anneaux. Il avoit ſeulement des rayes ou plis perpendiculaires à ſa longueur, ſelon laquelle une autre grande raye alloit depuis la tête juſqu'à la queuë, en le diviſant en deux moitiés égales. Il étoit entier, & avoit 2 pieds $\frac{1}{2}$. On ne ſçait pas qu'il ſe ſoit encore trouvé de Ténia dans des Poiſſons.

V.

Une Religieuſe a eu pendant 18 ans une groſſeur de ventre ſi énorme, qu'outre les bandes qui lui étoient néceſſaires pour le ſoûtenir, il falloit, quand elle vouloit marcher, que deux Religieuſes marchaſſent en arriere devant elle, & lui aidaſſent à porter ſon fardeau. Enfin elle mourut à l'âge de 49 ans dans de grandes douleurs, & on l'ouvrit. Dès qu'on eut levé la peau du ventre, & avant qu'on en ouvrît la cavité, il ſe preſenta un grand ſac qui prenoit ſa naiſſance de l'Ombilic, & deſcendoit juſque ſur les genoux. Il étoit plein de quantité de corps fort differens, les uns comme des pains de ſavon, les autres comme des gros morceaux de chair, les autres comme des pierres de plâtre couvertes de quelques membranes. Il s'y trouva auſſi trois Veſſies de la longueur d'environ un pied, pleines en partie d'une eau jaune preſque huileuſe, & en partie de matieres auſſi dures que des pierres. Ces Veſſies n'étoient attachées à rien, que vers leurs embouchures. Il faut remarquer qu'entre la peau & les Muſcles qui étoient preſque entierement conſumés avec leurs teguments communs, on avoit trouvé quantité d'autres petites pierres dures comme des morceaux de carreau blanc, dont il y en avoit un qui pouſſoit des

pointes comme des molettes d'Eperon. La cavité du Ventre étant ouverte, on vit les Boyaux envelopés dans un autre grand ſac, qui prenoit ſon origine de la premiere des Vertebres des Lombes, où il étoit fortement attaché. Il étoit rempli de corps étrangers tous ſemblables aux premiers, & de trois ou quatre pots d'eau jaune. Le Diaphragme étoit fort preſſé par ce ſac, & le Cœur preſque aplati. C'eſt de M. Lémery dont l'Académie tient ces faits très-remarquables, non pas tant par l'eſpece de ces générations, que par leur monſtrueuſe grandeur.

VI.

M. Méry a dit qu'ayant ouvert un Homme qui étoit mort en un inſtant, il lui avoit trouvé l'Aorte tellement dilatée qu'elle avoit commencé à ſe détacher de la baſe du Cœur, & l'abandonner. Dans le moment, plus de circulation.

VII.

Nous avons parlé dans l'Hiſtoire de 1700. * d'une Hidropiſie laiteuſe; croiroit on aiſément qu'une chute ſur la tête en pût cauſer une? Quel rapport de cet accident à cette maladie? Cependant nous allons faire voir par quel enchaînement cela peut arriver. Nous mêlerons les faits qu'a obſervés M. Littre aux explications qu'il en a données.

* pag. 11. & ſuiv.

Une Fille de 7 ans qui ſe portoit parfaitement bien, étant tombée ſur la tête, les parties du Cerveau s'affaiſſerent par la commotion du coup, & d'autant plus facilement qu'elles étoient encore fort molles. La cavité des tuyaux diminua, le ſang qui n'y couloit plus librement donna lieu à ſa ſeroſité de ſe ſéparer, & de s'échaper par les pores des vaiſſeaux en entraînant avec elle une partie de ſes ſels, qui picotoient les membranes & cauſoient de grands maux de tête. La tenſion violente des vaiſſeaux, où le ſang ſéjournoit trop, y contribuoit encore. Mais le plus grand mal étoit que par l'embarras & le déſordre des parties du Cerveau la filtration des Eſprits ne s'y faiſoit plus ni aſſés abondamment ni aſſés regulierement.

Auſſi

Auſſi la jeune Fille, qui auparavant étoit fort vive & fort gaye, devint-elle peſante, triſte & aſſoupie. Elle vomiſſoit quelquefois & avoit du dégoût pour les alimens, parce que les Eſprits ne ſe répandoient plus dans l'Eſtomac comme il eût été néceſſaire. De la mauvaiſe diſpoſition de l'Eſtomac s'enſuivirent les mauvaiſes digeſtions, & l'imperfection, & ſur-tout la groſſiereté du Chile, peu animé d'Eſprits. Ce Chile épais avoit de la peine à entrer dans les Veines Lactées, vaiſſeaux fort déliés, qui ſe gliſſent entre les deux membranes du Meſentere, & vont ſe rendre à ſes Glandes. Une partie du Chile qui ne pouvoit penetrer dans ces petites routes, ſuivoit donc celle du canal inteſtinal, incomparablement plus large, & qui porte les excrémens, & la Malade eut ce que les Medecins appellent *Paſſion Cœliaque*, c'eſt-à-dire, qu'avec les excrémens il ſortoit du Chile. Comme de ce côté-là il s'en perdoit beaucoup, & que de l'autre ce qui en reſtoit pour la nourriture des parties étoit trop épais, & peu propre à les nourrir, la Malade tomba dans une maigreur extraordinaire. Les membranes du Meſentere ſe dépoüillerent peu à peu de toute la graiſſe qu'elles contiennent naturellement, qui les tient ſeparées l'une de l'autre, & enveloppe les vaiſſeaux lactés. De-là il arriva que quand ces Vaiſſeaux ſe furent gonflés à la longue de Chile amaſſé, & ſe creverent, le Chile qui s'épancha entre ces membranes, & qui leur cauſoit une tenſion violente, parce qu'elles étoient extrêmement rapprochées, eut la force de les percer en pluſieurs endroits, après quoi il tomba dans la cavité du ventre, & forma l'Hydropiſie laiteuſe. Alors la Paſſion cœliaque ceſſa, parce que le Chile qui avoit forcé tous les obſtacles trouvoit beaucoup de facilité à entrer dans les veines lactées, & n'étoit plus obligé à prendre le chemin du canal inteſtinal. Le Chile qui s'étoit amaſſé dans les Glandes du Meſentere les groſſit beaucoup au de-là du naturel, & s'y pétrifia même en maniere de craye. Le canal Thorachique où il ne paſſoit preſque plus de cette liqueur, de-

vint extrêmement menu & délié. On fit une fois la ponction à la Malade, & on lui tira six ou sept pintes de ce Chile extravasé. Elle mourut au bout de quinze jours, ayant encore dans la cavité du ventre une pareille quantité de la même liqueur. Sa maladie dura quatre mois.

VIII.

On doit être assés surpris de voir qu'un petit corps assés exactement ovale, & dont le grand diametre qui est d'une ligne & plus, est au petit comme 3 à 2, qui a une surface fort polie de couleur de Caffé rôti, avec une petite bande de gris de perle au milieu, & qui sur ces apparences ne doit guéres être pris pour un Animal, mais tout au plus pour un œuf, ne fasse cependant que sautiller dans un Jardin, en s'élevant d'un demi pouce, & s'élançant quelquefois jusqu'à deux. Quand on le veut faire sauter, on n'a qu'à l'exposer au Soleil, ou le mettre sur la main lorsqu'elle est chaude. Monsieur Carré, à qui cette observation est dûë, ouvrit la coque d'un de ces petits corps; elle est épaisse & solide par rapport à leur grosseur, aussi faut-il qu'elle le soit pour résister à leurs sauts, & elle renferme un petit Ver fort blanc, dont le dos est coupé d'anneaux transversaux & paralleles, & le Ventre fort plat, & sans pieds. On apperçoit du côté de la tête deux petits points noirs. Comme la figure de son ventre empêche qu'il ne remplisse entierement sa coque, il a de l'espace pour y faire un saut en ramassant son corps, & en le débandant ensuite promptement. C'est par-là qu'il éleve sa maison en l'air. Il doit être fort vigoureux, car cette maison est par rapport à lui un fort grand poids, qu'il éleve fort haut, & pousse fort loin, & cela fort souvenr. M. Carré en garda un deux mois dans une boëte, sans y appercevoir aucun changement. Ce petit Animal est une Enigme assés difficile à expliquer. Comment se nourrit-il dans cette coque si bien fermée? comment se multiplie-t-il dans cette prison? car quand même il se multiplieroit à la maniere des Moules *, comment ses œufs sortiroient-ils?

* V. ci-dessus p. 32.

NOus renvoyons entierement aux Mémoires

L'Ecrit de M. Geoffroy le jeune sur les Bezoards, V. les Mém. p. 235.

Et celui de M. de Reaumut sur un Insecte des Limaçons. V. les Mém. p. 305.

CHYMIE.

SUR LA RHUBARBE.

V. les Mém. p. 163.

LA Rhubarbe ne pouvoit manquer de trouver sa place parmi les Purgatifs que M. Boulduc a entrepris d'examiner *. Il l'a étudiée à son ordinaire avec les deux grands Dissolvans, l'Eau & l'Esprit de vin. La teinture qu'il en a tirée par l'Eau a été beaucoup plus forte que celle qui étoit venuë par l'Esprit de vin, marque assûrée que la qualité purgative de la Rhubarbe réside plus dans ses Sels que dans ses Souffres, qui ne sont qu'en très-petite quantité. Peut-être même le peu de teinture que tire l'Esprit de vin est-il uniquement tiré par le flegme qui lui reste toûjours, quelque soin qu'on ait pris à le bien rectifier. Ce flegme dissout dans un Mixte la petite quantité de Sels proportionnée à sa quantité.

* V. les Hist. de 1700. pag. 46. de 1701. pag. 58. de 1702. pag. 45. de 1705. pag. 62. de 1708. pag. 54.

Puisque l'Esprit de vin tire si peu de la Rhubarbe, il est naturel qu'après avoir essuyé cette *extraction* elle n'en soit pas sensiblement moins purgative, & que l'Eau puisse encore beaucoup agir sur elle, & c'est en effet ce que M. Boulduc a observé.

Et la teinture tirée par l'Eau, & l'Extrait solide fait de cette teinture, purgent fort bien. Cette vertu purgative subsiste encore, mais assés affoiblie, dans une seconde teinture & dans son Extrait. Mais ce qui purge encore

mieux & que ces teintures & que ces Extraits, c'eſt la Rhubarbe en ſubſtance. Un effet de l'Art eſt de reconnoître en quelles occaſions il eſt inutile.

Une remarque generale de M. Boulduc en cette matiere, & qui donne encore la préference à la Nature ſur l'Art, c'eſt que les infuſions des Purgatifs Vegetaux ont conſiderablement plus d'effet que les décoctions, où la chaleur enleve trop de principes.

Quoique la Rhubarbe produiſe ſur la langue ce ſentiment d'apreté, d'où l'on conclut ordinairement qu'un Mixte eſt aſtringent, M. Boulduc n'a pû s'aſſurer par aucune expérience qu'elle eût effectivement cette vertu dans ſon opération.

SUR LA LACQUE.

LE P. Tachard Jeſuite, Miſſionnaire aux Indes Orientales, envoya de Pondichery à M. de la Hire en 1709. deux petits Memoires ſur differentes particularités de l'Hiſtoire naturelle des Indes. Ce qu'il y avoit de plus circonſtancié, & en même temps de plus intereſſant pour l'Académie, regardoit la Lacque.

On donne ce nom à pluſieurs eſpeces de pâtes ſeches dont les Peintres ſe ſervent, mais ce qu'on appelle plus proprement Lacque, eſt une Gomme ou Reſine rouge, dure, claire, tranſparente, fragile, qui vient du Malabar, du Bengale, & de Pegu.

Selon les Memoires du P. Tachard, de petites Fourmis rouſſes s'attachent à differens Arbres, & laiſſent ſur leurs branches une humidité rouge, qui ſe durcit d'abord à l'air par ſa ſuperficie, & enſuite dans toute ſa ſubſtance en 5 ou 6 jours. On pourroit croire que ce n'eſt pas une production des Fourmis, mais un ſuc qu'elles tirent de l'Arbre en y faiſant de petites inciſions; & en effet ſi on pique les branches proche de la Lacque il en ſort une

Gomme, mais il eſt vrai auſſi que cette Gomme eſt d'une nature differente de la Lacque. Les Fourmis ſe nourriſſent de fleurs, & comme les fleurs des montagnes ſont plus belles & viennent mieux que celles du bord de la Mer, les Fourmis qui vivent ſur les montagnes ſont celles qui font la plus belle Lacque, & du plus beau rouge. Ces Fourmis ſont comme des Abeilles, dont la Lacque eſt le Miel. Elles ne travaillent que 8 mois de l'année, & le reſte du temps elles ne font rien à cauſe des pluyes continuelles & très-abondantes.

Pour préparer la Lacque, on la ſépare d'abord des branches où elle eſt attachée, on la pile dans un mortier, on la jette dans l'eau boüillante, & quand l'eau eſt bien teinte, on en remet d'autre juſqu'à ce qu'elle ne ſe teigne plus. On fait évaporer au Soleil une partie de l'eau qui contient cette teinture, après quoi on met la teinture épaiſſie dans un linge clair, on l'approche du feu, & on l'exprime au travers du linge. Celle qui paſſe la premiere eſt en gouttes tranſparentes, & c'eſt la plus belle Lacque. Celle qui ſort enſuite & par une plus forte expreſſion, ou qu'on eſt obligé de racler de deſſus le linge avec un coûteau, eſt plus brune & d'un moindre prix.

Ces faits rapportés dans l'Académie firent naître à M. Lemery la penſée d'examiner chimiquement la Lacque. Il s'agiſſoit de ſçavoir ſi c'étoit une Gomme ou une Reſine. Ces deux mixtes, quoiqu'aſſés ſemblables, different en ce que le Souffre domine dans les Reſines, & le Sel ou l'Eau dans les Gommes.

Il trouva que l'Huile d'Olive ne diſſolvoit point la Lacque, & n'en tiroit aucune teinture, que l'Huile éthe-rée de Therebentine & l'Eſprit de vin n'en tiroient qu'une legere teinture rouge, ce qui fait voir que la Lacque n'eſt pas fort reſineuſe, & n'abonde pas en ſouffre; que d'ailleurs une liqueur un peu acide, comme l'eau Alumineuſe en tiroit une teinture plus forte, quoiqu'elle n'en fît qu'une diſſolution fort legere, & que l'Huile de Tar-

tre y faisoit assés d'effet, ce qui marque qu'elle a quelque partie saline, & qu'elle est imparfaitement gommeuse, & que par conséquent c'est un mixte moyen entre la Gomme & la Resine.

Il est à remarquer que les liqueurs acides foibles tiroient quelque teinture de la Lacque, & que les fortes, comme l'Esprit de Nitre, & l'Esprit de Vitriol, n'en tiroient aucune. Cependant la Lacque qui ne leur donnoit point de couleur, y perdoit en partie la sienne, & devenoit d'un jaune pâle. La Physique est trop compliquée pour nous permettre de prévoir sûrement aucun effet par le seul raisonnement.

SUR LES SOUFFRES DES VEGETAUX,

ET DES MINERAUX.

V. les Mém. p. 225.

MAlgré la difference extrême des Vegetaux & des Mineraux, M. Homberg est persuadé que c'est le même Souffre qui entre dans les compositions des uns & des autres. Ses expériences du Verre ardent rapportées dans l'Hist. de 1709 * prouvent que des metaux privés de leur Souffre, & devenus par-là incapables de se fondre, reprennent très-aisément un Souffre vegetal, & avec lui leur fusibilité, & leur forme metallique. Il n'en faudroit pas davantage pour établir l'*identité* du Souffre dans ces deux especes de mixtes, mais M. Homberg y ajoûte encore qu'un Souffre metallique peut passer dans une matiere vegetale, & en faire une Huile, aussi-bien qu'un Souffre vegetal passe dans une matiere metallique, & en refait un metal. Après ce passage réciproque, il ne peut plus y avoir rien à desirer.

* pag. 37.

La fumée qui sort des metaux fondus au Miroir ardent est leur Souffre, mais comme elle se dissipe en l'air,

on n'en ſçauroit rien faire. Il n'y a que le Fer & l'Etain qui fondus enſemble jettent une fumée ſi épaiſſe qu'on la peut ramaſſer. Elle ſe met en une eſpece de cotton. Voilà donc le Souffre de ces deux metaux que l'on tient, & même pour en avoir une plus grande quantité, M. Homberg ſe contente de fondre enſemble au miroir le Fer & l'Etain, il les retire auſſi-tôt ſans leur donner le loiſir de jetter leur fumée, il y remet d'autre Fer & d'autre Etain, & ainſi de ſuite tant qu'il veut, après quoi il met dans un creuſet fort vif toutes ces portions refroidies. Elles s'y refondent, & jettent leur fumée qui s'épaiſſit en cotton ſur les parois du creuſet, où elle s'attache. On la ramaſſe, & on la met diſſoudre à froid dans du vinaigre diſtillé, que l'on a eu ſoin de dépoüiller de ſon Huile, autant qu'il étoit poſſible. Ce vinaigre devient rougeâtre, gras, plus épais qu'il n'étoit, & enfin ſi on le diſtille en cet état il donne après beaucoup de Flegme une veritable Huile qui s'enflamme auſſi facilement & auſſi vivement que l'Eſprit de vin, & nage ſur l'eau comme les Huiles eſſentielles des Plantes. Où le vinaigre a-t-il pris cette Huile, ſi ce n'eſt dans la matiere cottoneuſe & metallique?

Il eſt vrai qu'on pourroit le ſoupçonner d'en contenir toûjours un peu, mais pour lever entierement ce ſcrupule M. Homberg a fait la même opération avec de l'Eſprit de Vitriol, moins ſuſpect que le vinaigre diſtillé de contenir aucune Huile, & le ſuccès a été parfaitemeut le même.

C'eſt une choſe aſſés particuliere que le vinaigre ne diſſolve la matiere cottoneuſe qu'à froid, il ne feroit rien avec le feu. Ce n'eſt pas la grande force d'un Agent qui fait un certain effet, c'eſt ſa proportion au ſujet ſur lequel il agit.

M. Homberg ayant remarqué que le Zink, Mineral dont la nature eſt aſſés peu connuë, jettoit au miroir ardent les mêmes fumées que le mêlange du Fer & de l'Etain, s'aviſa de l'employer aux mêmes opérations que ce

mélange, & trouva précisément les mêmes effets. De-là il a conclu avec beaucoup de vrai-semblance que le Zink pourroit bien n'être qu'un mélange naturel de Fer & d'Etain, & il confirme encore cette pensée par quelques autres apparences. Ainsi la connoissance de ce Mineral sera un fruit comme surnumeraire des découvertes que M. Homberg a faites sur les Souffres Vegetaux & Metalliques.

SUR L'ANALYSE

DES PLANTES MARINES

ET PRINCIPALEMENT

DU CORAIL ROUGE.

C'Est une partie considerable du grand travail de M. le Comte Marsigli *, que ses expériences Chimiques sur les Plantes de la Mer. Nous donnerons dans la Botanique quelqu'idée de leurs differentes especes, ou plutôt de leurs differens genres, nous la supposons ici, & d'autant plus facilement qu'elle n'y est pas necessaire.

* V. ci-dessus p. 23.

Quoique les Plantes de terre soient si semblables dans leurs Analyses, qu'il seroit difficile de distinguer par-la, & encore plus de prévoir leurs differens effets, celles de Mer paroissent encore plus semblables. En effet les Plantes terrestres vivent en differens terroirs, d'où elles peuvent & même doivent tirer differentes nourritures, les Plantes marines n'ont toutes qu'un même aliment, cette eau salée & bitumineuse, qui les embrasse de toutes parts, les penetre, & les fait vegeter. Aussi M. Marsigli a-t-il trouvé dans leurs Analyses une grande uniformité, presque toûjours la même salure, & la même amertume, toûjours un suc fort glutineux qui les nourrit, beaucoup d'Alkali, peu d'Acide; encore croit-il que les Plantes marines

marines qui ont un peu d'Acide ſenſible ſont venuës à une petite profondeur, parceque ſelon lui il n'y en a que dans les eaux ſuperficielles. Ces Plantes ont beaucoup de Sel volatil, & même, ce qui eſt remarquable, les *pierreuſes*. Les Lithophitons en ont une 5me partie plus que la Corne de Cerf, quoiqu'ordinairement cet Eſprit abonde davantage dans les Animaux.

Le ſuc glutineux ne ſe tire que des Plantes fraîches, du moins des pierreuſes, car il ſe durcit quelque tems après qu'elles ſont ſorties de l'eau. Il ſort par une ſimple expreſſion des extremités encore molles de leurs branches. Il eſt d'une couleur differente en differentes Plantes, blanc, ou jaune le plus communément. Il a auſſi differentes ſaveurs, tantôt un goût de mer âcre & piquant, tantôt un goût de Poiſſon corrompu, &c.

Comme le Corail eſt la plus noble de toutes les Plantes de la Mer, car on ne peut plus douter que ce ne ſoit une Plante, M. Marſigli voulut l'étudier avec un ſoin particulier, & d'autant plus que le Corail frais, & contenant encore ſon ſuc glutineux en conſiſtance de lait, n'avoit juſque-là été travaillé par aucun Chimiſte.

D'abord il laiſſa pendant 12 jours ſon Corail frais dans un vaiſſeau plein d'eau de mer, ce qui lui valut, comme nous le dirons ailleurs, la curieuſe découverte des fleurs inconnuës de cette Plante. Au bout de ce temps, ces fleurs ſe réduiſirent en de petites boules, & puis tomberent au fond du vaiſſeau. Enſuite l'Ecorce, car ce Corail avoit la ſienne, au lieu que celui qu'on expoſe ordinairement en vente ne l'a pas, commença à ſe ramollir, & à ſe ſéparer en pluſieurs petites pieces, qui ſe précipitant auſſi au fond du vaſe, s'y unirent en une bouë très-fine, ſemblable à celle du Bol rouge. La Plante ainſi dépoüillée de ſon écorce, par où elle tire ſa nourriture, ſe pourrit, & tomba.

A meſure que l'écorce ſe ſéparoit, le Lait qui coule entre elle & la ſubſtance de la Plante pour la nourrir, tomboit dans l'eau, & la rendoit puante. Mais en moins

d'un mois tout ce lait ſe dégagea d'avec l'eau, monta ſur ſa ſuperficie, & y forma une toile glutineuſe, épaiſſe comme le dos d'un Couteau, & blanche comme de la Gelée. L'eau reprit ſon premier goût, & ſon odeur ordinaire de mer. Tous les Eſſais Chimiques firent voir que cette gelée étoit une ſubſtance Alcaline.

L'Eſprit de vin bien rectifié ne tira rien du Corail pendant deux mois entiers, pas même la moindre teinture de rouge. Seulement après quelques heures d'infuſion, il parut aux extremités de certains petits Tubules qui ſont ſur l'écorce, de petits Globes qui augmenterent pendant 3 jours, demeurerent pluſieurs jours en cet état, & enſuite commencerent à diminuer, & diſparurent. Les plus gros l'étoient deux fois comme un grain de Millet. Ils étoient de la couleur du Mercure bien purgé.

Le lait de Vache frais ſur un feu très-lent tire peu à peu & par degrés la belle teinture rouge du Corail, ſoit qu'il ait ſon écorce, ſoit qu'il ne l'ait pas, & ne lui laiſſe qu'un blanc livide. La Cire blanche bien fine fait le même effet, & plus promptement.

Voilà ce qu'on appelle *Teintures de Corail*. Sa couleur, aſſés ſemblable à celle du ſang, avoit perſuadé aux Anciens qu'il devoit être merveilleux pour le purifier, & que c'étoit un grand Cordial dans toutes les maladies, où il y avoit du venin, & de la malignité. Tout ce qui pouvoit un peu appuyer cette idée ſi legerement priſe, c'eſt qu'en effet on avoit vû que le Corail arrêtoit le ſang, comme font tous les Alcalis terreux. Cela même avoit produit une ſuperſtition de Medecine, on portoit ſur ſoi du Corail comme un *Amulete* pour les ſaignemens de nés, & les autres hemorragies, & cette ſuperſtition n'eſt pas encore entierement détruite. Mais comme la couleur rouge étoit la ſource de tant de vertu, il eût été extrêmement avantageux de la pouvoir tirer de ce Mixte, & d'en laiſſer tout le reſte comme un marc inutile, & ce ſecret a été cherché par pluſieurs Chimiſtes anciens & modernes avec autant de ſoin & de peine que celui de l'Or potable.

La grande importance dont il étoit ne leur permettoit pas de croire qu'ils le pussent trouver dans des choses simples, ni d'une maniere aisée. Ils ont imaginé quantité d'opérations, la plûpart fort differentes entre elles, & fort recherchées, & il les ont données comme ayant réüssi. Cependant M.Lémery a assuré qu'il les avoit éprouvées toutes sans succés, & il chercha, il y a déja longtems, la Teinture de Corail par d'autres moyens; il la crut digne de cette peine, non par les grands usages qu'elle devoit avoir dans la Medecine, mais par l'erreur générale, où l'on étoit en sa faveur. Il ne songea qu'à des Dissolvants simples, & il trouva la Cire blanche, ainsi qu'il le marqua dans la premiere Edition de son *Traité de Chimie* en 1675.

Mais à l'occasion des expériences de M. le Comte Marsigli, qui disoit même qu'il n'avoit eu ni le loisir, ni les matieres nécessaires pour en faire autant qu'il eût desiré, M. Lémery reprit ce sujet, & le traita avec plus d'étenduë. Il n'a travaillé que sur du Corail tiré de la mer depuis longtems, & dépoüillé de son écorce.

Mis en entier dans de la Cire blanche fonduë par un petit feu, il y est devenu blanc jusque dans le fond de sa substance, & même plus blanc dans ce fond que dans sa superficie, où il étoit un peu plus pâle, apparemment parcequ'il y prenoit quelque chose de la couleur de la Cire. Seulement il se trouvoit quelquefois des branches noirâtres, mais elles ne l'étoient que par dehors, & le dedans en étoit parfaitement blanc. Il paroît que cette noirceur exterieure ne pouvoit venir que de quelque disposition accidentelle. Le Corail blanchi n'en étoit ni moins dur, ni moins compacte, ni moins pesant. Une seconde infusion du même Corail dans de nouvelle Cire le rendoit un peu moins blanc, peut-être en tiroit-il alors un peu de jaune.

La Cire de la premiere infusion n'étoit que jaunâtre, & de couleur *citrine*. Si l'on y mettoit de nouveau Corail elle devenoit rougeâtre, & le Corail n'en devenoit

pas moins blanc, que si on l'eût mis dans de la Cire *neuve*. Un troisiéme morceau de Corail mis dans la même Cire la rendoit noirâtre & devenoit toûjours également blanc.

La Cire où l'on met du Corail déja blanchi par une infusion, ne change aucunement de couleur.

Tout cela prouve assés évidemment & que la Cire ne porte point sa couleur dans le Corail, mais lui ôte celle qu'il avoit, & que cette couleur du Corail, quoiqu'elle le penetre intimement, est fort legere, & fort subtile, & que le Corail est naturellement blanc; en effet il s'en trouve de cette couleur au fond de la mer.

M. Lémery, à l'exemple des Geometres, qui augmentent souvent de gayeté de cœur la difficulté des Problêmes qui leur ont été proposés, s'en est proposé un second plus difficile, c'étoit de retirer de la Cire la teinture de Corail qu'elle avoit prise. Le seul Dissolvant qu'il y ait trouvé propre, a été de l'Eau de vie empreinte de Sel de Tartre. Il y a mis en digestion chaudement pendant dix jours de la Cire teinte par trois infusions, elle y est redevenuë blanchâtre, & la Teinture rouge du Corail a passé à l'Eau de vie. Si cette Teinture est medicinale, c'est en ce dernier état qu'on la peut prendre.

La Cire jaune fait le même effet que la blanche, mais un peu moins facilement, & elle teint legerement de sa propre couleur la superficie du Corail.

L'Esprit de Cire rectifié, qui est un flegme fort impregné d'Acides, tire du Corail une teinture rouge foncée, mais ce n'est que celle de sa superficie; il ne touche point du tout au dedans.

Plusieurs autres Dissolvants ont encore réüssi à M. Lémery, mais c'étoit sur du Corail bien broyé, & réduit en poudre très fine, ce qui lui fait déja perdre quelque petite partie de son rouge. Après avoir essayé inutilement des sucs dépurés de quelques fruits, comme celui de Coing, celui de Pomme, le Verjus, le Vinaigre blanc, il trouva enfin que le suc de Citron faisoit parfaitement

ce qu'il souhaitoit, pourvû qu'il ne fût pas distillé, mais au contraire un peu trouble, & qu'il contint toute sa partie huileuse & tartareuse, qui est la plus propre à extraire une teinture bitumineuse & grasse. Celle qui vient du Corail par ce moyen est si legere & si volatile, qu'en deux mois elle s'envole entierement du suc de Citron, & le laisse avec sa premiere couleur, à moins qu'il ne soit dans une Bouteille bien bouchée, & couvert d'Huile d'Amandes douces à la hauteur d'un doigt. Quand le suc de Citron s'est chargé de la couleur rouge du Corail, il ne fait plus aucun mouvement ni avec l'Huile de Tartre, ni avec l'Esprit de Vitriol, parceque l'Acide du Citron s'étant uni à l'Alcali du Corail, il n'y a plus lieu à l'action ni de l'Huile de Tartre sur l'Acide du Citron, ni de l'Esprit de Vitriol sur l'Alcali du Corail.

L'Esprit de Miel rectifié tire la Teinture du Corail, & perd son goût acide, ainsi qu'il doit arriver. Cependant tout Alcalin qu'est le Corail, certains Alcalis, comme l'Huile de Tartre, la liqueur de Nitre fixe, l'Esprit volatil de Sel Armoniac, ne laissent pas d'être des Dissolvants propres à extraire sa teinture. L'Esprit de Sel Armoniac ne prend qu'une couleur gris de lin.

L'Eau de vie, l'Esprit de vin, les Huiles d'Olive, de Noix, d'Aveline, d'Amande, des Semences froides, ne font rien.

M. Lémery n'a pû réüssir à faire une Teinture seche.

Après les Teintures du Corail, l'ordre naturel demande que l'on passe aux Analyses de la propre substance de ce Mixte.

M. le Comte Marsigli commença par examiner le suc laiteux exprimé de l'Ecorce. Mis dans de l'eau de mer il se précipite au fond. Il donne une teinture jaune & livide à l'Esprit de vin, & si on fait évaporer ce mêlange, le marc qui reste a un goût de Poisson gâté. Les Esprits de Sel & de Nitre fermentent avec ce Lait jusqu'à produire de la fumée. L'Esprit de Sel Armoniac & l'Huile de Tartre n'y font aucun changement, toutes preuves d'une substance alcaline.

Le Corail qui n'eſt nourri & formé que de ce lait doit donc être de cette même ſubſtance, & en ſon écorce, & en ſa partie plus dure. C'eſt en effet ce que toutes les opérations ont donné à M. le Comte Marſigli, & à M. Lémery, & nous ne nous y arrêterons pas davantage, ſur tout M. Léméry ayant preſque épuiſé dans ſon Traité de Chimie tout ce qui regarde les Diſſolutions & le Magiſtere du Corail.

Nous remarquerons ſeulement que dans la Diſtillation du Corail fraîchement tiré de la Mer, il paroît un flegme laiteux, & de petites parcelles de bitume flotantes, que l'on ne voit point dans la diſtillation du Corail gardé quelque tems. C'eſt une remarque de M. Marſigli.

Il dit qu'ayant des crudités d'Eſtomac il s'en eſt gueri avec la poudre des extremités des branches de Corail frais, encore pleines de leur lait peu deſſeché. Puiſque le Corail eſt un Alcali, il doit être bon pour abſorber les Acides, & M. Léméry a jugé avec beaucoup d'apparence qu'il devoit être beaucoup meilleur étant ſimplement réduit en poudre, qu'après avoir paſſé par des opérations Chimiques, où il s'eſt chargé d'Acides, qui ont déja conſumé une bonne partie de ſa vertu.

SUR UN NOUVEAU

PHOSPHORE.

ON appelle *Phoſphore* tout ce qui rend de la lumiere par quelque préparation artificielle, & on a même étendu ce nom aux Barometres dont la partie vuide d'air eſt lumineuſe lorſqu'on les ſecouë dans l'obſcurité. Tous les Phoſphores que l'on connoît juſqu'à preſent ont quelque ſorte d'imperfection, qui, pour ainſi dire, diminuë leur gloire. Celui qui ſe fait avec l'urine a beſoin d'un peu de chaleur étrangere pour luire & pour s'enflamer; le *Smaragdin* en demande beaucoup; la Pierre de Bolo-

gne & le Phoſphore de *Balduinus* ne font leur effet que pendant le jour ; les Huiles diſtillées de Giroffle, de Canelle, de Saſſafras, &c. ne s'enflament ſans feu que quand on y mêle de l'Eſprit de Nitre bien déflegmé ; le Phoſphore que M. Homberg a donné en 1692. dans les Memoires que l'Académie imprimoit alors, ne devient lumineux que quand on le frotte rudement, ou qu'on frappe deſſus avec un corps dur. Mais le même M. Homberg a trouvé un nouveau Phoſphore exempt de tous ces défauts. Il n'a beſoin ni du mêlange d'aucune matiere nouvelle, ni d'aucune chaleur, ni d'aucun mouvement; il ne faut que l'expoſer à l'air, il s'enflame en une minute ou deux, met le feu à tout corps combuſtible qu'il touche, & ſon effet eſt égal la nuit & le jour.

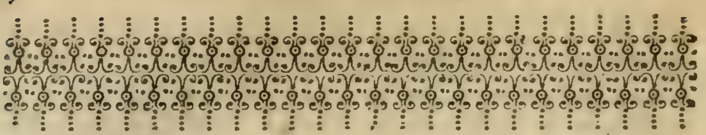
C'eſt une Poudre ou noire, ou brune, ou rouge, ou verte, ou jaune, ſelon la maniere dont elle a été travaillée, & les degrés de feu qu'elle a eus. Elle eſt tirée de matiere fécale, étrange origine pour une lumiere ſi ſubtile & ſi celeſte. M. Homberg croit qu'il la tirera auſſi de l'urine, & même que l'urine traitée ſelon la méthode qu'il vient de trouver, donnera une plus grande quantité de Phoſphore que par la maniere ordinaire & connuë.

Il a fait de trois differentes ſortes de ſa Poudre. Toutes trois mettent le feu aux matieres combuſtibles, mais l'une ſans s'enflamer, l'autre en ne s'enflamant que comme un Charbon, la troiſiéme en s'enflamant comme une Bougie.

M. Homberg donnera la préparation de ſon Phoſphore, & une ſuite de pluſieurs opérations très-curieuſes ſur la matiere dont il eſt formé. Il paroît bien que rien n'eſt à negliger pour la Phyſique, & qu'elle ſçait trouver des Tréſors par tout.

NOus renvoyons entierement aux Memoires. L'Ecrit de M. Homberg ſur les Vegetations artificielles.

V. les M. p. 426.



BOTANIQUE.

SUR LE PAREIRA BRAVA.

* p. 15. & 16.

PArmi les Drogues étrangeres apportées par M. de la Mare, dont nous avons parlé ci-dessus *, il y avoit du Pareira brava. Ce nom est Portugais, & signifie *Vigne sauvage.* C'est une Racine qui vient du Bresil, où l'on dit que les Naturels du Païs l'appellent *Botou*, ou *Botoüa.* Nous ne connoissons point le reste de la Plante, & nous ne sçavons que par le rapport des Portugais que ce soit une Vigne.

Cette Racine n'a point été connuë de Pison, dont l'Histoire naturelle du Bresil fut imprimée en 1648. M. Amelot Conseiller d'Etat, & le premier qui l'ait apportée en France au retour de son Ambassade de Portugal en 1688. comme M. Nicot Ambassadeur dans le même Royaume, fut le premier qui nous en envoya le Tabac, peut-être avec trop de succès. M. le President Roüillé, successeur de M. Amelot à l'Ambassade de Portugal, rapporta aussi entre plusieurs autres drogues rares, du Pareira brava, avec un Memoire de quantité de vertus très considerables que les Portugais lui attribuent.

A cause de ces vertus, M. Geoffroy qui s'étoit chargé du soin d'examiner tout ce qui avoit été apporté par M. de la Mare, eut une attention particuliere sur le Pareira brava, qu'il connoissoit déja d'ailleurs, & qu'il avoit même éprouvé. En comparant tout ce qu'il avoit pû ramasser sur l'Histoire purement Botanique de cette Plante, il forma plusieurs doutes, & plusieurs questions, si la Butua ou Brutua Plante Indienne dont Giacomo Zanoni avoit

avoit parlé dans ſon *Iſtoria Bottanica* en 1675, & qu'il dit venir dans le Mozambique, n'étoit pas la même que le Pareira brava, ſi une Plante que M. de la Mare a vûë dans l'Iſle de S. Domingue eſt effectivement le Pareira brava, ou le Raiſinier de cette Iſle, qui eſt aſſés connu, s'il y a deux eſpeces de Pareira brava, l'une qui vienne dans le Breſil, l'autre dans le Mexique, ou ſi toutes deux viennent du Breſil, &c. mais tout cela s'éclaircira avec le tems. Ces ſortes de doutes ſçavans ſont plus propres à faire honneur à celui qui les propoſe, qu'à inſtruire ceux à qui ils ſont propoſés.

Nous nous en tenons preſentement à ce qui eſt utile. M. Geoffroy a vû deux eſpeces de Pareira brava, ſi cependant la difference de couleur, qui eſt preſque la ſeule, ſuffit pour faire deux eſpeces. La 1re qui eſt la plus en uſage eſt brune par dehors, & d'un jaune brun en dedans, la 2de eſt blanche par dehors, & en dedans d'un jaune *citrin*. Celle-ci eſt de couleur de chair lorſqu'elle eſt recente, & pâlit avec le tems. Toutes deux ſont d'une ſubſtance dure, & cependant poreuſe & ſpongieuſe. Elles ont un goût amer mêlé de quelque legere douceur, comme la Regliſſe. Elles ſont quelquefois de la groſſeur du pouce.

Les Portugais, qui ont d'abord appris des Sauvages du Breſil les vertus de cette Racine, pourroient bien les exaggerer un peu, mais enfin ſans prendre au pied de la lettre tout ce qu'ils en racontent, ce que M. Geoffroy en a reconnu par ſa propre experience ſuffit pour la faire mettre au rang des Plantes les plus utiles. Il aſſure qu'elle ne manque guere de Coliques Nephretiques, non pas qu'il croïe qu'elle va briſer la Pierre dans les Reins, ou dans la Veſſie, comme les Portugais le prétendent, mais c'eſt qu'elle diſſout les glaires qui collent enſemble dans les Reins les ſables & les graviers, dont ſe forment les Pierres, & en effet après avoir pris du Pareira brava on rend ordinairement beaucoup de ſable.

M. Geoffroy l'a donné encore fort heureuſement à des malades affligés d'ulceres aux Reins, & à la Veſſie, & dont les urines étoient purulantes, & toutes glaireuſes, de maniere qu'elles ceſſoient ſouvent de pouvoir couler, ou ne couloient qu'avec beaucoup de peine. L'uſage du Pareira brava les délivroit promptement de ces ſuppreſſions, & les urines pendant ce tems-là n'étoient point ou très peu épaiſſes ; ce même remede nettoyoit les ulceres peu à peu, & en y joignant à la fin le Baume de Capaïia, quelques malades ont été entierement gueris.

Cette proprieté éprouvée du Pareira brava de fondre promptement & facilement les glaires, fit juger à M. Geoffroy qu'il ſeroit bon pour l'Aſthme *humoral*, qui eſt cauſé par une pituite épaiſſe & gluante dont les Bronches des Poûmons ſont ſurchargés, & dans la Jauniſſe qui vient d'une Bile fort épaiſſie ; cette eſperance lui a ſouvent réüſſi, & ſur tout en deux occaſions remarquables, dont l'une appartient à la premiere maladie, & l'autre à la ſeconde.

Un Vieillard de 72 ans fort foible, & prêt à être ſuffoqué par une pituite qu'il ne pouvoit arracher de ſa poitrine, ayant pris 2 Verres d'infuſion de Pareira brava à une demi-heure l'un de l'autre, jetta une ſi grande quantité de glaires & de flegmes, qu'il ſembloit vomir, & il fut entierement délivré de ſon accès.

Une femme tourmentée d'une violente Colique avec une douleur fort vive ſous le foye, eut en même tems une jauniſſe univerſelle, juſques là que ſes urines, qui étoient fort épaiſſes, teignoient le linge en jaune. Les matieres que les lavements amenoient étoient en petite quantité, & blanchâtres. Après qu'elle eût été ſaignée du bras & du pied, M. Geoffroy lui fit prendre trois Verres d'infuſion de Pareira brava à demi-heure l'un de l'autre. Peu de tems après le troiſiéme Verre la douleur ceſſa, le ventre s'ouvrit, elle rendit des matieres fort jaunes, les urines coulerent abondamment, & s'éclaircirent. On

continua de lui donner une prise de Pareira brava de 4 heures en 4 heures, sa couleur jaune s'effaça entierement, & en 24 heures elle parut parfaitement guerie. Depuis ce tems-là elle a ressenti quelquefois ces attaques de Colique, & elle a eu recours au même remede, qui l'en a toûjours délivrée.

La dose de cette racine est de deux gros coupés par petits morceaux, que l'on fait boüillir dans 3 demi-septiers d'eau, jusqu'à ce que la liqueur soit réduite à chopine. On coule cette décoction, & on la partage en 3 Verres que l'on fait prendre chauds comme du Thé avec un peu de sucre. Pour préserver ceux qui sont sujets à la gravelle, on leur en fait user tous les mois pendant 8 jours à la dose de 24 grains seulement, qu'on fait boüillir legerement dans une tasse d'eau. On peut donner aussi cette racine en substance pulverisée à la dose de 12 ou 18 grains.

Des vertus si considerables sûrement reconnuës dans le Pareira brava peuvent nous disposer à croire avec les Portugais qu'il guerit la Dissenterie, les crachemens de Sang, l'Esquinancie, les morsures des Bêtes venimeuses, les Fiévres malignes, & que si c'est une superstition d'en porter, comme ils font, un morceau dans la bouche contre le mauvais air, c'est du moins une superstition pardonnable.

SUR LES ARBRES MORTS

PAR LA GELÉE DE MDCCIX.

LE rigoureux Hiver de 1709, dont la memoire durera long-tems, fit mourir par toute la France un nombre prodigieux d'Arbres, mais on remarqua que cette mortalité ne s'étendoit pas sur tous indifferemment. Ceux qu'on auroit jugé en devoir être les plus exempts par leur force, y furent les plus sujets. Les Arbres les plus

durs & qui conſervent leurs feüilles pendant l'hiver, comme les Lauriers, les Cyprés, les Chênes verds, & entre les autres qui ſont plus tendres, comme les Oliviers, les Chataigniers, les Noyers, ceux qui étoient plus vieux & plus forts, moururent en plus grande quantité.

On chercha dans l'Académie la cauſe de cette biſarrerie apparente. M. Caſſini le fils en donna une fort ſimple à l'égard des vieux Arbres. Il dit qu'il avoit remarqué que le grand froid avoit détaché leur écorce d'avec le bois, de quelque maniere que cela fût arrivé. Et en effet il eſt bien naturel que l'écorce ſoit plus adherente au bois dans les jeunes Arbres, beaucoup plus remplis de ſuc, & d'un ſuc plus huileux. Or comme ſelon l'opinion commune des Phyſiciens c'eſt principalement par l'écorce que les Arbres ſe nourriſſent, il a dû arriver que ceux en qui elle a perdu plus facilement la communication qu'elle avoit avec le bois ſoient auſſi morts plus facilement.

M. Chomel en imagina une autre raiſon, qui eſt générale. Il vint une très-forte gelée, & puis un dégel, enſuite une ſeconde gelée auſſi forte que la premiere, & qui reprit très-bruſquement. L'humidité du dégel dont les Arbres étoient remplis, ſe gela donc, c'eſt-à-dire s'étendit & ſe dilata avec beaucoup de violence & de promptitude, & exerça ſur les fibres & ſur toutes les parties organiques des Arbres un effort d'autant plus grand, qu'elle y trouva plus de réſiſtance. Or il eſt certain qu'elle en trouva davantage dans les Arbres les plus forts. Elle déchira donc, & détruiſit ces parties organiques, fibres, veſicules, &c. & les rendit deſormais inutiles à la vegetation.

Si on veut ajoûter à cela ſelon le ſyſtême de M. de la Hire ſuivi par M. Chomel, que le froid conſiſte en certaines particules ſalines très-perçantes, l'action aura encore été plus forte, & l'effet plus grand.

Que les Arbres plus durs ou plus âgés ayent plus apporté de cette réſiſtance, qui pour ainſi dire, irrite l'En-

nemi, il n'y a pas lieu d'en douter. Leurs parties ſont neceſſairement plus ſerrées, & plus compactes, & c'eſt par cette raiſon qu'ils pouſſent leurs feüilles plus tard que les autres, tout le reſte étant égal. Les dévelopemens en quoi conſiſte toute vegetation s'y doivent faire plus lentement, que dans ceux qui ont leurs parties plus molles, plus fléxibles, plus impregnées de ſuc.

A l'égard des vieux Arbres, M. Homberg donna encore une raiſon particuliere de leur plus grande réſiſtance. Leurs fibres qui ont pris tout leur accroiſſement, & par conſéquent ſont étenduës en tout ſens autant qu'elles le peuvent être, ne ſçauroient plus ſouffrir d'extenſion nouvelle, & réſiſtent puiſſamment à la rarefaction ſoit du ſuc aqueux qu'elles contiennent naturellement, ſoit d'une humidité étrangere. Il eſt viſible au contraire que les fibres des jeunes Arbres ont encore dequoi s'étendre, & prêtent beaucoup.

Pluſieurs Arbres qui ſembloient avoir échapé à ce cruel Hiver, parcequ'ils repouſſerent des branches & des feüilles à la ſéve du Printems, ne purent profiter de celle de l'Automne, & perirent tout à fait. Quand on les coupoit, on les trouvoit plus noirs & plus brûlés dans le cœur que vers l'aubier, & vers l'écorce. Le cœur qui eſt plus dur avoit été plus endommagé que l'aubier, & il étoit déja mort tandis que l'aubier conſervoit encore un petit reſte de vie.

SUR LE BLED CORNU

APPELLE' ERGOT.

IL vint à l'Academie en 1710. quelques Relations d'une Gangrene qui devenoit aſſés commune en certains Païs, ſurtout dans l'Orleannois & dans le Bleſois. M. Noël Chirurgien de l'Hôtel-Dieu d'Orleans fut celui qui en écrivit avec le plus de détail. Il mandoit à M. Méry

que depuis près d'un an il étoit venu à ſon Hôpital plus de 50 tant hommes qu'enfans affligés d'une Gangrene ſeche, noire, & livide, qui commençoit toûjours par les Orteils, ſe continuoit plus ou moins, & quelquefois gagnoit juſqu'au haut de la Cuiſſe, qu'il n'avoit vû qu'un ſeul malade qui eût été attaqué à la main. A quelques-uns la gangrene ſe ſeparoit naturellement, & ſans qu'on y eût rien fait, aux autres elle ſe terminoit par le ſecours des ſcarifications & des Topiques; il y en eut 4 ou 5 qui moururent après l'amputation de la partie gangrenée, parceque le mal continua de monter juſqu'au Tronc. Ce qu'il y a de plus étonnant, c'eſt que cette maladie n'étoit point pour les femmes, tout au plus pour quelques petites filles.

On ſçut dans l'Académie que le même accident étoit arrivé encore, mais d'une maniere plus cruelle, à un Païſan d'auprès de Blois. La gangrene lui fit tomber d'abord tous les doigts d'un pied, enſuite ceux de l'autre, après cela le reſte des deux pieds, & enfin les chairs des deux Jambes, & celles des deux Cuiſſes ſe détacherent ſucceſſivement, & ne laiſſerent que les Os. Dans le tems qu'on en écrivit la Relation les cavités des os des Hanches commençoient à ſe remplir de bonnes chairs, qui renaiſſoient.

On eſt perſuadé avec aſſés de vrai-ſemblance que cette étrange maladie, qui n'attaque guere que les pauvres gens, & dans les années de cherté, vient de la mauvaiſe nourriture, & principalement d'un certain Bled noir & cornu, qu'on appelle *Ergot*, parce qu'effectivement il approche de la figure d'un Ergot de Coq. Voici comment M. Fagon premier Medecin du Roi, & Academicien Honoraire en explique la génération.

Il y a des Broüillards qui gâtent les Froments, & dont la plûpart des Epics de Seigle ſe défendent par leurs barbes. Dans ceux que cette humidité maligne peut atteindre & penetrer, elle pourrit la peau qui couvre le grain, la noircit & altere la ſubſtance du grain même.

La séve qui s'y porte, n'étant plus resserrée par la peau dans les bornes ordinaires, s'y porte en plus grande abondance, & s'amassant irregulierement forme une espece de Monstre, qui d'ailleurs est nuisible, parcequ'il est composé d'un mélange de cette séve superfluë avec une humidité vitieuse.

Ce n'est que dans le Seigle que se trouve l'Ergot, & soit que les mêmes causes qui produisent la sterilité d'une année, le produisent aussi en plus grande quantité, soit que dans une mauvaise année les pauvres gens ne le séparent pas d'avec le bon grain dont ils ont fort peu, ce n'est que dans ce tems-là, & ce n'est que chés eux que l'on voit les gangrenes dont nous avons parlé. M. Noël disoit que comme le Seigle de la Sologne en 1709. contenoit près d'un quart d'Ergot, dès que les Païsans avoient mangé de ce méchant pain ils se sentoient presque yvres, après quoi venoit assés souvent la gangrene, & que dans la Beausse où il y avoit peu d'Ergot, ces accidens n'étoient point connus. On peut voir sur ce sujet une Lettre fort remarquable de feu M. Dodart, inserée dans le Journal des Sçavans de 1676. le 16. Mars.

L'Accadémie attentive au bien public en tout ce qui peut la regarder, écrivit à M. le Comte de Pontchartrain ce qu'elle sçavoit des mauvais effets du Bled cornu, afin qu'il eût la bonté d'y apporter l'ordre qu'il jugeroit à propos. Le Roi approuva cette attention, & ordonna à ce Ministre d'écrire à M. l'Intendant d'Orleans qu'il fît bien connoître aux Païsans de sa Généralité le danger extrême de l'usage de l'Ergot, & qu'il les obligeât à bien éplucher leur grain avant que de le faire moudre. Pour cela on lui envoya le Memoire que M. Fagon avoit fait sur cette matiere.

En même tems, pour un plus grand éclaircissement M. de la Hire le fils écrivit à un de ses amis, bon Physicien, qui étoit à la campagne, & le pria de sçavoir à quoi les Fermiers attribuoient la production du Bled cornu, d'en nourrir des Poules, & d'observer ce qui leur

arriveroit, d'en semer pour voir s'il leveroit. Il eut satisfaction sur ces trois articles.

Cette mauvaise espece de grain vient en plus grande abondance dans les terres humides & froides, & dans les années pluvieuses Un certain Seigle particulier qu'on seme en Mars y est plus sujet, que ceux qu'on seme en Automne.

Les Poules n'en veulent point dès qu'elles l'ont reconnu, & de quelque adresse qu'on se serve pour en mêler dans leur mangeaille, elles aiment mieux passer des trois jours sans manger. Cependant il ne paroît point leur faire de mal, quand elles en ont mangé par surprise, & elles ne laissent pas de pondre à l'ordinaire.

Il ne leve point, ce qui est fort naturel, & en même tems heureux.

SUR LES MOUVEMENTS

EXTERIEURS DES PLANTES.

LEs Mouvements interieurs des Plantes sont ceux qui font leur vegetation ; les yeux ne les aperçoivent point, & la raison a bien de la peine à en faire plus que les yeux. Mais les mouvements exterieurs, ceux, par exemple, qui font que les Plantes poussent toûjours leur tige verticalement, qu'elles se tournent du côté du grand air, que leurs fleurs s'ouvrent ou se ferment en certaines circonstances, &c. sont visibles, & cependant peu observés, ou s'ils le sont, les causes en sont peu connuës, peut-être parceque ces mouvements exterieurs tiennent trop aux interieurs. M. Parent a entrepris de donner une idée générale de la Méchanique qui les produit, en ne supposant que ce qui est reçû de tout le monde sur la vegetation.

Quand le suc nourricier est arrivé à l'extremité d'une Tige naissante, si l'on conçoit qu'il s'évapore, la pesanteur de

de l'air qui l'environne de tous côtés le fera monter verticalement, & s'il ne s'évapore point, mais qu'il se congele, & demeure attaché à cette extremité par où il étoit prêt à sortir, la même pesanteur de l'air ne laissera pas de lui donner la même direction, de sorte que la Tige aura acquis une nouvelle partie fort petite posée verticalement. Il arrive alors la même chose à peu près que dans une Chandelle, qui quoiqu'elle fût posée obliquement à l'horison, auroit toûjours sa flame verticale par la pression de l'air. Les nouvelles gouttes de suc qui suivront cette premiere prendront la même direction, & comme toutes ensemble elles forment la Tige, elles la rendront donc verticale, à moins que quelques circonstances particulieres ne la détournent un peu.

A l'égard des Branches, que l'on peut supposer qui sortent lateralement de la Tige dans le premier Embryon de la Plante, quand même elles en sortiroient alors dans une direction horisontale, elles se releveroient en en haut par la direction perpetuelle du suc nourricier, qui d'abord ne trouveroit aucune résistance dans une très petite branche fort souple, & ensuite quoique la branche devînt plus ferme en croissant, agiroit avec plus d'avantage, parceque cette même branche plus longue seroit pour lui un plus long bras de Levier. La foible action d'une petite goutte de suc devient très-puissante & par sa continuité, & par le secours de ces circonstances favorables.

On sçait que si une Aiguille mise de niveau sur un pivot vient à être aimantée, elle s'incline aussi tôt du côté du Pole Arctique, & on en attribuë la cause à ce que la matiere magnétique qui sort de nôtre Hemisphere Septentrional va de bas en haut, & commençant à enfiler l'Aiguille aimantée lui fait prendre sa direction, & par conséquent la fait pancher vers le Pole, par rapport auquel elle est dirigée de bas en haut, comme le cours de la matiere magnétique. M. Parent prétend que par la même raison les sucs de la terre, qui vont de bas en haut

enfiler une racine naissante, la font, pour ainsi dire, pancher en embas, & l'obligent à se diriger du côté de la terre, & c'est en effet dans cette situation qu'elle a le plus de facilité à les recevoir. On peut ajoûter à tout cela ce que nous avons dit dans l'Hist. de 1708 * après M. de la Hire sur la direction des Tiges & des Racines des Plantes.

* p. 67. & suiv.

Si la pression de l'air sur une Plante est inégale, elle déterminera les sucs à se porter du côté où elle sera la moindre, & tourner de ce côté-là les branches ou la tige même. Ainsi une Plante enfermée ou dans une Chambre dont la fenêtre est ouverte, ou dans une Cave, se tournera d'elle même du côté de la fenêtre ou du soupirail, comme si elle cherchoit le plus grand air, & cela en effet parceque ce plus grand air est plus dilaté, & fait une moindre pression. De même les Arbres en Espalier semblent fuir la muraille.

Il faut bien remarquer que toutes ces idées n'ont lieu que pour les jeunes Plantes, & qui croissent encore. Ce n'est qu'en ce tems-là qu'elles sont en état d'obéïr au mouvement des sucs. Ils leur donnent un pli à mesure qu'ils les forment.

Et ce n'est pas seulement à leurs sucs nourriciers que M. Parent donne ce pouvoir, mais encore à d'autres corpuscules tout à fait étrangers, qui cependant penetrent les Plantes. Ce sont ceux de la matiere magnétique. Il a été dit dans l'Hist. de 1703 * que M. Parent attribuë à la direction de leurs cours le sens déterminé & presque toûjours le même dont se tournent tous les Corps qui se tournent, comme les Coquilles & les Tiges ou les Fleurs ou les Gousses de certaines especes de Plantes. Il y ajoûte presentement les Plantes foibles qui ont besoin de s'entortiller autour d'autres plus fermes, telles sont les differents Convolvulus, les Féves, le Houblon, &c. cet entortillement se fait dans presque toutes ces especes de gauche à droite en montant, & c'est-là le sens qui regne généralement dans tous les Corps *tournés* que

* Pag. 14. & suiv.

nous obſervons. La matiere magnétique par une action legere, mais continuelle, a la même force ſur les Plantes que les ſucs nourriciers.

Que l'Heliotrope, les Soucis, les Martagons, la Scabieuſe argentée, la Digitale, &c. ſuivent le Soleil, c'eſt-à-dire ſe panchent toûjours vers lui, il eſt évident que cela vient en général d'un plus grand deſſechement des parties tournées de ce côté-là, à quoi il faut qu'il ſe joigne quelques circonſtances particulieres, comme la molleſſe de la Plante, & le poids des feüilles ou des fleurs. Les parties que l'ardeur du Soleil a deſſechées & affoiblies par une trop grande tranſpiration des ſucs, l'humidité de la nuit, ou même quelquefois la ſeule abſence des rayons du Soleil les doit rétablir dans leur premier état.

Ce raiſonnement a lieu pour une cauſe telle que le Soleil, qui agit plus d'un côté de la Plante que de l'autre, mais non pas pour une cauſe dont l'action embraſſeroit également toute la Plante; telle eſt l'humidité de la nuit, qui fait que de certaines fleurs, comme celles de tous les Colvolvulus, d'une eſpece d'Ornithogale, &c. ſe ferment, & qu'au contraire celles des Belles de nuit, & de l'Arbre triſte s'épanoüiſſent. Pour ces phénomenes, qui quoiqu'oppoſés en apparence reviennent au même, il faut avoir recours à l'inégalité des parties de la Plante, plus ou moins extenſibles d'un côté que de l'autre.

On peut imaginer dans les Plantes des tuyaux fléxibles, creux, & comme cilindriques, qui étant remplis d'un fluide, quel qu'il ſoit, ſe gonflent, & s'accourciſſent neceſſairement. Si quelques-uns de ces tuyaux ſont noüés & reſſerrés d'eſpace en eſpace, ils s'accourciront beaucoup plus que ceux dont toute la cavité ſeroit également libre, parcequ'ils ſeront ſubdiviſés en autant de petits tuyaux plus courts, dont chacun s'accourcira autant qu'auroit fait le tuyau entier. Outre les tuyaux creux, qui ſont ou des fibres ligneuſes, ou les interſtices de ces fibres, on eſt perſuadé qu'il y a dans les Plantes des *Utri-*

cules, ou petits ſacs diſpoſés & arrangés le long des fibres ligneuſes, auſquelles ils ſont attachés. Il faut les concevoir comme faiſant une colonne. Quand un fluide les gonfle, la colonne s'allonge, & elle s'accourcit quand ils ſont vuides. C'eſt le contraire des tuyaux. Voilà, ſelon M. Parent, les principes de la differente extenſibilité des parties des Plantes. Nous n'en ferons point l'application qui eſt facile, car on eſt aſſés le maître de placer où l'on veut en plus grande ou en moindre quantité les tuyaux, & les differens tuyaux, & les utricules; le Microſcope le plus fin ne peut guere retrancher de cette liberté.

Quelquefois, ce qui peut ſurprendre d'abord, & paroître ne pas s'accorder avec ce qui vient d'être dit, la même partie d'une Plante eſt extenſible en deux ſens contraires, quoique la diſpoſition des tuyaux & des utricules ne puiſſe pas changer. Ainſi quand la fleur de la Couronne Imperiale s'épanoüit, ſon pedicule ſe courbe tout à fait en dehors, & quand la fleur eſt paſſée, il ſe recourbe en dedans. Mais la ſtructure de ce pedicule ayant été établie par rapport à la premiere courbure qui ſe fait dans le tems de la fleur, une moindre quantité de ſuc qui après ce tems-là le gonfle moins d'un certain côté qu'elle ne faiſoit auparavant, ſuffit pour faire entendre la courbure contraire.

Les mouvements des Senſitives meriteroient preſque un Traité à part. Dès qu'elles ſont touchées ou par un vent un peu fort, ou par la pluye, ou par la grêle, ou par le bout d'un bâton, &c. elles plient leurs feüilles en deſſus, & en appliquent exactement les deux moitiés l'une contre l'autre. Il y a même une eſpece qui fait encore plus. Elle abbat entierement ſes branches contre ſon tronc, & alors un pedicule qui attache les branches au tronc, & qui étoit étendu, ſe plie tout à fait en deſſous. C'eſt auſſi par le moyen d'un pareil pedicule que les feüilles ſeules ſe plient. Il n'y a que les parties ébranlées par le mouvement de dehors qui ſe reſſerrent ainſi, les autres demeurent dans leur état. La Plante en ſe pliant

n'eſt point dans une eſpece de défaillance, comme un Heliotrope qui panche ſa tête du côté du Soleil, au contraire elle eſt dans une contraction fort ſenſible, & ſe roidit avec tant de force, que qui la voudroit remettre dans ſon premier état la romproit. La grande reſſemblance de ces mouvements à ceux d'un Animal, qui a fait donner à la ſenſitive le nom de *Mimoſa* ou d'*Imitatrice*, autoriſe l'idée de M. Parent, qui croit que ce ſont des mouvements convulſifs. Il imagine qu'il y a dans cette Plante un fluide très-ſubtil, comme des Eſprits, que l'impreſſion reçûë de dehors agite plus qu'à l'ordinaire, & détermine à couler plus abondamment dans certains canaux. Cette explication ſemble n'approfondir pas beaucoup la matiere, mais quand il s'agit des mouvements convulſifs des Animaux, qui nous devroient être plus connus, l'approfondit-on davantage? Quoique nous ne ſçachions pas dans un certain détail & avec une certaine exactitude quelle eſt la méchanique des convulſions d'un Animal, c'eſt pourtant une ſorte de connoiſſance que de ſçavoir que les mouvemens de la Senſitive peuvent dépendre de la même méchanique que ces convulſions.

SUR LES PLANTES

DE LA MER.

VOici enfin la derniere partie de ce que M. le Comte Marſigli envoya à l'Academie ſur l'Hiſtoire de la Mer. L'étude de la Botanique terreſtre, quoique ſi penible & ſi fatiguante, ainſi que nous l'avons repreſentée dans l'Eloge de M. Tournefort *, ne l'eſt pas encore tant que celle de la Botanique marine. Il faut aller à la Mer avec des Peſcheurs, car autrement tout ce qu'ils ne cherchent pas, & qui feroit quelquefois les délices d'un Bo-

* V. l'Hiſt. de 1708. pag. 143. & ſuiv.

taniſte, ils le rejettent auſſi-tôt par une vieille habitude, quelque ordre qu'on leur eût donné au contraire. Ce qui eſt encore plus déſagreable, c'eſt qu'on ne peut rien attendre que du hazard, on ne voit point où ſont les Plantes, le filet les prend où il peut, & comme il peut.

Cependant malgré ces difficultés, M. le Comte Marſigli a commencé une Botanique marine fort conſiderable, toute compoſée de Plantes qu'il a tirées lui-même. Il les diviſe en trois Claſſes, les molles, celles qui ſont preſque de bois, & les pierreuſes. Cette diviſion n'eſt guere differente de celle que feu M. de Tournefort avoit donnée dans les Memoires de 1700*, quoique M. Marſigli ait déclaré qu'il ne prétendoit pas ſuivre un ordre rigoureux de Botanique.

* p. 28.

Les molles ſont les Algues, les Fucus, les Eponges, les Mouſſes de mer, &c.

Les Plantes preſque de bois ſont les Lithophiton, ainſi nommés par les Anciens, parcequ'ils les ont crus des Plantes pierreuſes. Toute la compoſition de la Plante conſiſte en deux parties, l'écorce & la ſubſtance. L'écorce au ſortir de la mer eſt molle, & en ſe ſechant elle devient dure comme de la Craye, & ſe froiſſe aiſément entre les doigts; c'eſt-là apparemment ce qui a trompé les Anciens. La ſubſtance tient plus de la Corne que du Bois, ſi on la brûle, elle ſe met en une écume toute pareille à celle de la Corne, ou des Plumes, & qui a la même puanteur. Les rameaux des Lithophiton ſe plient comme de la Baleine, & font la même réſiſtance au Couteau.

Les Plantes Pierreuſes & qui meriteroient ſeules le nom de Lithophiton qu'elles n'ont pourtant pas, ſont les Coraux, & les Madrepores. M. Marſigli ne parle point de quelques autres, comme les Champignons pierreux, parceque la Mer de Provence ne lui en a pas fourni. Le Corail eſt aſſez connu par ſa figure exterieure, la Madrepore en differe en ce qu'elle n'a point d'écorce, qu'elle eſt ordinairement blanche, & percée de trous ſenſibles.

M. Marſigli n'ayant point de Livres, lorſqu'il fit ſes obſervations, ne pût aller chercher dans les Auteurs ſi les Plantes qu'il tiroit de la Mer avoient été décrites, quels noms on leur donnoit, & à quels genres elles ſe rapportoient, car on ſçait combien la domination & l'établiſſement du genre ſont importants en Botanique. Il fut donc obligé ou de les nommer comme les Peſcheurs, ou de les nommer quelquefois un peu au hazard, ou de les laiſſer ſans nom, & il ſe remit aux Botaniſtes de l'Académie du ſoin de chercher les noms veritables, & de reconnoître les caracteres génériques.

M. Marchant qui ſe chargea de ce travail ne pût y réüſſir comme il eût deſiré, car outre la difficulté de rapporter à certains genres des Plantes où ne ſe trouvent point les principales parties qui caracteriſent les autres, comme les racines, les fleurs, les fruits, il n'avoit que les deſcriptions de M. le Comte Marſigli, & non pas les Plantes mêmes, qui à peine auroient ſuffi après avoir été long-tems hors de la mer, parceque ſouvent elles changent beaucoup. Cependant il fit ce qu'il étoit poſſible de faire il rangea pluſieurs Plantes de M. Marſigli ſous leurs genres, & reconnut les noms qui leur avoient été déja donnés par les Auteurs. Nous ne nous arrêterons point à cette recherche, & nous tâcherons de tirer ſeulement de l'ouvrage de M. Marſigli ce qu'il y a de plus philoſophique.

Les Algues ſont les ſeules Plantes de la mer qui ayent des racines, auſſi viennent-elles dans des fonds fangeux comme des Plantes terreſtres. Toutes les autres ſans exception viennent ſur des corps durs, tels que les Rochers, des Coquilles, des morceaux de fer, des conglutinations de terre, du bois, & même d'autres Plantes, &c. elles s'y attachent étroitement par leur pied. Ni ce pied n'a des fibres propres à tirer de l'aliment, ni la plûpart des corps qui le portent ne peuvent être ſoupçonnés de lui en fournir.

M. Marſigli croit que toutes ces Plantes ſans racines

ſont racines dans toute leur ſubſtance, c'eſt-à dire qu'elles tirent l'aliment de tous côtés par une infinité de pores, & ſouvent de trous fort viſibles dont elles ſont pleines. Cette maniere de vegeter leur convient, puiſqu'elles ſont de toutes parts environnées de l'eau de la mer, qui leur porte leur nourriture, au lieu que les Plantes terreſtres qui reçoivent la leur de la terre, & n'ont qu'une partie qui en ſoit embraſſée, ont beſoin que cette partie ait une diſpoſition & des organes particuliers. Auſſi toutes les Plantes marines, autant que M. le Comte Marſigli a pû reconnoître leur ſtructure, & avec les yeux, & avec le Microſcope, ne ſont que des amas de glandules, ou de petits tuyaux, qui filtrent l'eau de la mer, & en ſéparent les ſucs qui leur ſont neceſſaires. Communément ce ſont des ſucs glutineux & laiteux.

Si une partie d'une Plante molle, ou d'un Lithophiton eſt dans de l'eau de mer, elle ſe conſerve fraîche, tandis que l'autre partie qui eſt dehors ſe deſſeche. Il arrive le contraire aux Plantes terreſtres qui ſe conſervent fraîches en leur entier, pourvû qu'elles ayent une ſeule partie qui trempe dans l'eau. Cela prouve que la communication qui eſt entre les parties des Plantes terreſtres, n'eſt pas entre celles des Plantes marines, & que les parties de celles-ci ſe nourriſſent indépendamment les unes des autres, & par une certaine *appoſition* de matiere qui ſe fait à chacune en particulier.

Après cette idée générale des Plantes de la Mer, nous raſſemblerons leurs plus remarquables particularités, obſervées par M. Marſigli.

Il y a un Fucus dont le pied a trois lignes de diametre, lorſque la Plante eſt fraîche, & qui devient mince comme un fil, quand il a perdu l'eau qu'il contenoit.

Il y en a un autre qui ſerpente ſur la roche ſi irregulierement que l'on ne peut diſtinguer ſon veritable pied.

L'Orange de mer qui eſt une eſpece de Fucus porte ce nom à cauſe de ſa figure ronde. Elle n'a ni tige ni rameaux, & enfin ce n'eſt qu'une Orange, qui peut avoir

4 pouces

4 pouces½ de diametre, & dont la ſubſtance n'a que 1 ligne ½. Tout le reſte n'eſt qu'une grande concavité ſoûtenuë par une infinité de filamens qui la traverſent, & remplie d'eau de la mer qui a été filtrée par les glandules de la ſubſtance.

On trouve une Plante, qui n'eſt qu'une Ecorce, attachée pour l'ordinaire à des Lithophiton qui ont perdu leur écorce naturelle, ou en tout ou en partie. Elle ne couvre jamais que la partie dépoüillée. Quelquefois auſſi elle va revêtir des pierres. Etant fraîche elle eſt épaiſſe comme le dos d'un Couteau, elle eſt de ſubſtance de Champignon, & d'un rouge fort vif. Sa ſurface exterieure eſt toute heriſſée d'un grand nombre d'enflures, pleines d'un ſuc gluant. Autour de ces enflures, on voit quantité de boutons ou Tubules de couleur aurore, qui ſur un beau fonds rouge font un effet très-agreable. La ſurface interieure eſt toute unie, & s'accommode à la forme du corps ſur lequel elle s'étend. Cette Plante eſt d'une nature beaucoup plus ſinguliere que les Plantes terreſtres qui ne vivent que ſur d'autres Plantes.

Pluſieurs eſpeces d'Eponges lorſqu'elle ſortent de la mer ont dans de certains petits trous un mouvement de Siſtole & de Diaſtole, qui dure juſqu'à ce que l'eau qu'elles renferment ſoit entierement conſumée.

Quelques Plantes de la claſſe des molles, étant ſeches, ſe froiſſent auſſi aiſément entre les doigts que les écorces des Lithophiton.

Il y a un Lithophiton qui porte un ſi grand nombre de rameaux capillaires, qu'ils ſemblent compoſer une eſpece de feüillages. Cependant comme tous ces rameaux ſont parfaitement de la même ſubſtance que le tronc, il eſt vrai ſans exception que tous les Lithophiton n'ont point de feüilles.

Une eſpece de Lithophiton eſt ſans écorce. Sa ſuperficie eſt enduite d'une glu ſemblable à un vernis, & qui eſt en plus grande abondance au pied. La plante eſt toute pleine d'Epines, elles paroiſſent mieux aux ſommet

des rameaux, où le vernis eſt en moindre quantité. On y voit auſſi, au ſortir de l'eau, certains petits globules d'une matiere glutineuſe, qui lorſqu'on remet la plante dans un vaſe plein d'eau de mer, s'étendent autour des rameaux, en faiſant une ſimetrie agreable.

Le Corail croît ordinairement dans des Grottes dont la voûte concave eſt à peu près parallele à la ſuperficie de la Terre. Il faut que la mer y ſoit tranquille comme un Etang. Les Peſcheurs aſſurent, & M. Marſigli le croit juſqu'à preſent par ſes expériences, que le Corail ne vient jamais dans des Grottes ouvertes au Septentrion, elles doivent l'être au Midi, & tout au moins au Levant ou au Couchant. Il vient mieux & plus promptement à une moindre profondeur qu'à une plus grande. Il vegete à contre-ſens des Plantes terreſtres, & même des Plantes marines molles, & des Lithophiton, il eſt attaché par le pied au haut de la Grotte, & ſes branches ſont en embas.

Il eſt également dur, & également rouge dans l'eau & hors de l'eau. Seulement ſon écorce prend en ſe ſechant une couleur un peu plus livide, & les extremités de ſes branches ſont plus molles au ſortir de l'eau que le reſte de la plante, parcequ'elles ſont pleines d'un ſuc qui n'eſt pas encore conſolidé. Ces extremités en ſe ſechant à l'air deviennent friables.

Le pied par où le Corail s'attache à un corps ſolide en prend exactement la figure, & l'embraſſe en forme de plaque juſqu'à une certaine étenduë, ce qui prouve bien que la ſubſtance du Corail a été fluide dans ſa premiere formation. Et ce qui le prouve encore mieux, c'eſt que quelquefois cette même ſubſtance va tapiſſer le dedans d'un Coquillage, où elle n'a pû entrer qu'en forme de liqueur.

L'écorce s'étend également par tout, elle eſt moins compacte & moins dure que la ſubſtance propre qui eſt pierreuſe; on la détache aiſément, lorſque la Plante eſt fraîche. Elle eſt remplie & toute traverſée de petits

tuyaux ronds, qui ont tous à leur ſommet un trou qu'on ne peut guere apercevoir ſans Microſcope. Ils ſont pleins d'un ſuc glutineux, qui dans la plante fraîche eſt de couleur de lait, & enſuite ſe condenſe, & prend une couleur de ſafran tirant ſur le rouge. La ſurface interieure de l'écorce eſt toute chagrinée par l'amas d'une infinité de glandules.

La ſuperficie du Corail dépoüillé de ſon écorce eſt toute ſillonnée de canaux qui s'étendent depuis la plaque juſqu'aux extremités des branches. Il y a dans la ſubſtance propre de la Plante quantité de Cellules pleines d'un ſuc tout ſemblable à celui des Tubules de l'écorce, mais ces cellules ne ſont viſibles, & peut-être n'exiſtent que dans la circonference exterieure de la ſubſtance propre, tout le dedans paroît parfaitement ſolide & pierreux. Les cellules ſont auſſi plus grandes & en plus grand nombre vers les extremités des branches, que vers le pied.

Tout cela enſemble paroît prouver ſuffiſamment que toute la ſtructure organique du Corail par rapport à la vegetation conſiſte dans ſon écorce, & dans la ſuperficie de la ſubſtance coralline, que l'écorce filtre par ſes tubules un ſuc qui ſe répand entre elle & cette ſubſtance, en remplit les cellules, & coule le long des canaux juſqu'aux extremités des branches, & que ce ſuc s'étant petrifié tant dans les cellules qui environnent la ſubſtance coralline, que dans celles des extremités des branches dont la ſubſtance n'eſt pas encore formée, fait croître la Plante tant en groſſeur qu'en hauteur. Nous ſommes obligés de nous en tenir à cette explication, quoique très-ſuperficielle & très-imparfaite en comparaiſon de celle où M. le Comte Marſigli eſt entré avec plaiſir ſur une vegetation ſi ſinguliere, qu'il a dévelopée le premier.

Le Corail eſt rongé par des Vers, dont M. Marſigli a donné la figure, & qu'il fera connoître encore mieux dans ſon Traité des Animaux de la Mer.

Les Madrepores viennent assés souvent dans les mêmes lieux que le Corail.

Elles changent la plûpart de couleur hors de la mer.

Elles sont communément peu pesantes, & faciles à froisser. Quelques-unes sont fragiles comme du verre, & d'autres le sont encore plus, de sorte qu'on ne peut presque y toucher.

Voilà ce qui regarde les particularités les plus curieuses des Plantes marines des trois Classes, mais nous n'avons point encore touché à leur multiplication, partie essentielle, & très-obscure de cette Botanique. Pour voir les fleurs ou les fruits ou les graines d'une plante marine, il faut être doublement favorisé par le hazard, la tirer de la mer par le filet qui ne choisit rien, & la tirer justement dans le tems qu'elle est en fleur ou en graine. Et quoique l'on ait toûjours les Plantes terrestres sous ses yeux & en sa disposition, il y en a encore, comme les Champignons & les Truffes, qui nous cachent depuis un fort long-tems la maniere dont elles se multiplient.

Cependant comme l'assiduité de l'observation force enfin le hazard à être favorable, M. le Comte Marsigli fit en 1707. une découverte qui sera à jamais celebre dans la Botanique Marine. C'est celle des fleurs du Corail. Elles sont blanches, ayant chacune leur pedicule, & huit feüilles, le tout ensemble de la grandeur & de la figure d'un clou de Girofle. Elles sont en très-grand nombre sur toute la Plante. Elles sortent de tous les Tubules de l'Ecorce, & y rentrent dans l'instant qu'on retire la Plante de l'eau. Si on l'y remet, elle réfleurit toute entiere en moins d'une heure, & quelquefois elle se conserve pendant 12 jours en état de faire alternativement ce manege autant que l'on veut, après quoi les fleurs prennent la forme d'une petite boule jaune, & tombent au fond de l'eau. La description de ces phenomenes a été faite plus en détail dans le Supplément du Journal des Sçavans de 1707. On a crû long-tems que le Corail n'étoit qu'une pierre, & qu'auroit-on dit de voir cette pierre

toute couverte de fleurs ? Pour nous-mêmes, qui sçavons que c'eſt une Plante, ces fleurs-là ne laiſſent pas d'être quelque choſe de fort ſurprenant. Le Corail en eût bien plûtôt dû manquer qu'un grand nombre de Plantes terreſtres.

Selon l'analogie des autres Plantes, il ſembleroit que les petites boules tombées au fond de l'eau devroient contenir la ſemence du Corail. Cependant M. Marſigli en les ouvrant n'y trouva, ni graine, ni rien qui en approchât, mais ſeulement un ſuc gluant ſemblable à celui de l'Ecorce. D'ailleurs puiſque le Corail eſt attaché au haut d'une Grotte où il vegete de haut en bas, & que les boules tombent par leur poids au fond de l'eau, il ſeroit difficile qu'elles reportaſſent les graines en haut ſi elles les contenoient, à moins cependant qu'elles ne vinſſent à diminuer de peſanteur, ou qu'elles ne s'ouvriſſent, & ne laiſſaſſent remonter les graines plus legeres qu'elles. Mais il vaut mieux ne point deviner, & attendre du tems qu'il éclairciſſe le myſtere de la ſemence du Corail, qui ne ſera pas plus étonnant que celui des fleurs.

M. Marſigli a trouvé que les petits globules du Lithophiton épineux & ſans écorce dont nous avons parlé, s'allongeoient, pouſſoient deux filaments à leur ſommet, & enfin devenoient des eſpeces de fleurs, lorſqu'on tenoit la Plante dans de l'eau de mer, reprenoient leur premiere forme quand on l'en retiroit, & redevenoient fleurs ſi on l'y remettoit, parfaitement ſemblables à cet égard aux fleurs du Corail. Cela peut durer deux jours. Ces fleurs, non plus que celles du Corail, ne renferment aucune ſemence ſolide.

La Claſſe des Plantes molles a un peu mieux ſatisfait la curioſité de M. le Comte Marſigli. Il en a trouvé une ſans feüilles, qui avoit de très-belles fleurs à ſix feüilles blanches, avec ſix filaments blancs, & d'aſſés gros fruits ronds, qui renfermoient chacun ſix petits grains de ſemence jaunes, & d'un goût fort piquant. Il a vû une au-

tre Plante qui avoit des gousses vuides, & dont apparemment la graine étoit sortie. D'un autre côté, il lui est venu des fruits détachés de leurs Plantes, un fruit en forme de Figue, où sont renfermées des graines, & une espece de petite Olive qu'on dit être le fruit de l'Algue, & qui a un noyau solide. Il a eu aussi quelques Plantes molles, & particulierement cette *Plante-écorce* dont on a parlé, qui ne lui ont point montré de graine, mais en recompense des fleurs qu'il a vû disparoître & reparoître dans les mêmes circonstances que celles du Corail, & du Lithophiton épineux.

Ainsi on connoît des fleurs à toutes les trois Classes, & des semences à celle des Plantes molles; commencemens déja très-considerables d'une Botanique marine, que l'on doit à M. le Comte Marsigli, à qui apparemment on devra encore de plus grands progrès de cette partie si inconnuë de la Physique.

DIVERSES OBSERVATIONS

BOTANIQUES.

I.

APrès le grand & cruel Hiver de 1709, plusieurs Laboureurs semerent du Bled en Avril à la place de celui qui étoit mort. Comme ils virent qu'il ne produisoit point d'Epics, la plûpart d'entre eux en couperent la fane & l'herbe vers la S. Jean, & retournerent leurs terres; quelques-uns après avoir coupé l'herbe du Bled laisserent quelque petite partie de leur terre sans la retourner, & d'autres ne toucherent point du tout à une partie de leur Bled.

Le Bled dont on avoit coupé l'herbe, & dont la terre n'avoit point été retournée, poussa en 1710, & fut de 10 ou 12 jours plus avancé que les autres Bleds de 1710 se-

més vers la S. Martin 1709. Il fut moins fort, & porta moins de grain, mais un grain plus gros, & meilleur pour les Boulangers.

Le Bled auquel on n'avoit point touché fut fort beau en 1710, & même quelquefois plus beau que celui qui avoit été semé en Automne 1709. L'un & l'autre de ces deux cas a été verifié en differens lieux.

On voit par-là que du moins en ces païs-ci il faut que le Bled passe un Hiver en terre.

II.

A cette occasion, M. Homberg a dit que si on étête des Plantes *annuelles* avant qu'elles portent leur graine, elles la portent l'année suivante, & que c'est un moyen sûr de les rendre *vivaces*.

III.

M. Carré écrivit d'une Campagne, où il étoit qu'il y avoit vû du Bled, qu'on appelle *Bled de Mars*, parcequ'on ne le seme qu'en ce mois-là, & dont par cette raison les Laboureurs devroient avoir provision en cas d'un malheur comme celui de l'Hiver de 1709. Il faut être connoisseur pour le distinguer d'avec le Froment. L'Epi a des barbes, & est assés court. Il est neanmoins fort different d'un autre Bled, qu'on nomme *Bled barbu*. Il résiste mieux que le Froment à l'effort des vents, comme M. Carré attestoit l'avoir vû lui-même. Il fait d'aussi bon pain que le Froment. Cette espece est dispensée de passer un Hiver en terre.

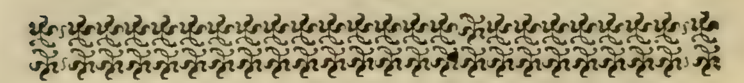
IV.

M. Jaugeon a dit qu'il a vû deux pieds d'Arbre assés éloignés l'un de l'autre par le bas, qui se sont ensuite unis en un seul tronc, jusqu'à n'avoir qu'une écorce commune.

MOnsieur Chomel a donné la Description du *Tribuloïdes vulgare aquis innascens. Inst. rei Herb. 655.*

M. Marchant celles de la Filipendule, du *Flos Solis Indicus Trachelii folio radice repente*, & du *Narcissus silvestris multiplex calice carens.*

UNe maladie de M. Reneaume l'ayant empêché d'imprimer un Memoire sur la Noix de Galle, nouveau Febrifuge qu'il a trouvé, nous renvoyons entierement cette matiere à l'année prochaine



ARITHMETIQUE.

SUR LES QUARRE'S MAGIQUES.

V. les M. p. 92.

* V. l'Hist. de 1705. p. 69. & suiv.

NOus avons déja fait une petite histoire des Quarrés Magiques *. Nous la supposons ici, & tout ce que nous avons expliqué en même tems sur ce sujet. Ils ont suivi la destinée de toutes les autres productions de l'Esprit humain. Leurs commencemens ont été foibles, & ils ont toûjours reçû de nouveaux accroissemens de la main des derniers Mathématiciens qui y ont travaillé. Jusqu'ici M. de la Hire étoit le dernier de tous, maintenant c'est M. Sauveur, & même il y a lieu de croire qu'il le sera toûjours, ou du moins long-tems, car il paroît avoir épuisé pour la plus grande partie une matiere, qui d'ailleurs n'interesse pas beaucoup, & ce qui pourroit encore rester à découvrir coûteroit plus qu'il ne vaut.

Le principal artifice, celui qui influë sur toute la Magie, & en contient tous les fondemens, consiste à résoudre, comme nous l'avons dit, le Quarré qu'on veut construire en deux Quarrés primitifs. La premiere idée de cette décomposition est dûë à M. Poignard. Il est clair que si l'on veut remplir magiquement les 49 Cellules, par exemple, du Quarré de 7, il sera sans comparaison plus

plus facile de les remplir d'abord des 7 nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, de maniere qu'aucun ne ſoit repeté dans une même bande, & enſuite de 7 autres, 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42 avec la même condition, que s'il avoit fallu embraſſer à la fois tous ces 49 nombres, & les arranger magiquement. Non-ſeulement le travail de l'opération eſt fort diminué par cette méthode, mais on voit beaucoup plus clair à ce qu'on fait, & les démonſtrations ſautent aux yeux. Auſſi M. de la Hire & M. Sauveur ont-ils fait regner cette pratique dans toutes leurs differentes conſtructions. M. Sauveur appelle les petits nombres 1, 2 &c. *2ds nombres*, & les grands 0, 7 &c. *1ers nombres*. Chaque cellule eſt remplie d'un 1er nombre ajoûté à un 2d.

Il faut pour le Quarré magique de 7, 1°. que chacune des 49 cellules contienne un nombre de la progreſſion depuis 1 juſqu'à 49 different de ceux que contiennent toutes les autres; 2°. que toutes les bandes horizontales, verticales, & diagonales de cellules faſſent la même ſomme.

On ſatisfait à la premiere condition en ajoûtant ſucceſſivement chacun des 1rs nombres à chacun des 2ds, & en mettant chaque ſomme dans une cellule differente. Par-là on a chaque nombre depuis 1 juſqu'à 49 logé à part. Mais il faut bien remarquer pourquoi par ce moyen on a ces 49 differens nombres. Ce n'eſt pas, comme on le pourroit croire d'abord, parceque les 7 2ds nombres ſont en progreſſion arithmetique, ni parceque les 7 1ers y ſont auſſi, & de plus parceque ces 1ers ſont multiples de 7, & ont 7 pour leur difference; c'eſt préciſément parceque 7 difference des 1ers nombres eſt égale, ou plus préciſément encore n'eſt pas plus petite que 7 le plus grand des 2ds nombres, car elle peut être plus grande autant que l'on voudra. Et il n'eſt pas beſoin non plus que la difference des 1ers nombres ſoit toûjours la même, ils peuvent avoir des differences inégales, pourvû ſeulement que la plus petite de ces differences ne ſoit pas plus petite que le plus grand des 2ds nombres. Ainſi en pre-

nant d'un côté pour 2ds nombres, 1, 3, 4, 7, 8, 12, 13, & de l'autre pour 1ers, 5, 18, 32, 52, 77, 104, 119, ou 5, 19, 33, 53, 78, 105, 120, ou une infinité d'autres, on aura par l'addition des 1ers & 2ds nombres 49 nombres differens.

On ſatisfait à la ſeconde condition du Quarré magique par rapport aux bandes horizontales & verticales, lorſqu'on fait enſorte que chacune de ces bandes contienne tous les 7 nombres tant 1ers què 2ds, car de là s'enſuit neceſſairement l'égalité perpetuelle de leurs ſommes, & il n'eſt nullement beſoin que les uns ni les autres de ces nombres ſoient en progreſſion arithmetique, il ſuffit qu'ils ſoient les mêmes dans toutes les bandes. On ſatisfait de la même maniere à l'égalité des deux bandes Diagonales, mais comme il peut arriver que pluſieurs nombres y ſoient repetés, il faut alors que la ſomme de ceux qui ſont repetés ſoit égale à la ſomme de ceux dont ils occupent la place. Que s'il n'y a qu'un ſeul nombre dans une Diagonale, il eſt neceſſaire que ce ſoit un nombre moyen qui multiplié par le nombre des termes faſſe un produit égal à la ſomme de tous les termes, car ce nombre repeté dans toute une Diagonale fera une ſomme égale à celle de toutes les autres cellules, puiſqu'il ne ſera repeté qu'autant qu'il y aura de cellules dans toutes les autres bandes, ici, par exemple, 7 fois. Cette proprieté du nombre moyen, qui ſe trouve dans tout moyen arithmetique, ſemble exiger que les nombres tant 1ers que 2ds ſoient en progreſſion arithmetique; cependant elle ne l'exige point. Par exemple, 1, 4, 6, 7, 12, ne ſont ni en progreſſion ni en proportion arithmetique, & 6 multiplié par le nombre des termes qui eſt 5, ne laiſſe pas d'être égal à la ſomme de tous les termes qui eſt 30. On eſt donc diſpenſé d'avoir des nombres 1ers ni 2ds en proportion arithmetique, il ſuffit que le nombre moyen ait la proprieté que nous avons dite. Il n'eſt pas même neceſſaire qu'il ſoit exactement moyen, c'eſt-à-dire placé préciſément au milieu des autres, car ce n'eſt pas-là ce qui le rend propre à être repeté dans toute

une Diagonale; ainſi dans ces nombres 1, 4, 6, 7, 17, 7 qui n'eſt pas au milieu a cependant la proprieté eſſentielle dont il s'agit. Cette même proprieté peut s'exprimer plus commodément & pour la Theorie & pour le calcul. Les differences de 7 aux nombres inferieurs 1, 4, 6, ſont 6, 3, 1, on les appelle *negatives.* Sa difference au ſeul nombre ſuperieur 17 eſt 10, & on l'appelle *poſitive.* La ſomme des differences negatives du nombre moyen doit être égale à celle des poſitives, & ici elle eſt égale à la ſeule poſitive, parcequ'elle eſt ſeule.

De tout cela il ſuit qu'au lieu qu'on ne prenoit pour la conſtruction des Quarrés magiques que des nombres en progreſſion arithmetique, & même naturelle, le choix eſt beaucoup plus libre qu'on ne penſoit. C'eſt cette liberté reconnuë par M. Sauveur dans toute ſon étenduë, & avec les ſeules reſtrictions abſolument neceſſaires, qui lui a fait naître la penſée de conſtruire les Quarrés magiques par lettres, c'eſt-à-dire d'une maniere beaucoup plus générale que l'on n'a jamais fait, & auſſi générale qu'il ſoit poſſible, car dès que des nombres ont quelque choſe de général & d'indéterminé, les lettres ſont propres à exprimer toute leur généralité & leur indétermination.

Il a donc des 1eres & 2des lettres qui repreſentent les 1ers & les 2ds nombres. Il eſt indiſpenſable que la plus petite difference des 1eres lettres ſoit du moins égale à la plus grande des 2des lettres, & de plus que tant dans les 1res lettres que dans les 2des il y en ait une moyenne telle que la ſomme de ſes differences negatives ſoit égale à celle des poſitives. Après cela, il conſtruit un Quarré qui eſt le modele & le Type d'une infinité de Quarrés, parcequ'on n'a qu'à ſubſtituer aux lettres tels nombres que l'on veut dans les deux conditions preſcrites.

Cette conſtruction des Quarrés par lettres demande toûjours les Regles communes, neceſſaires pour rendre égales les ſommes de toutes les bandes, mais ces Regles qui n'étoient le plus ſouvent que particulieres, M. Sau-

veur les rend générales par une plus grande facilité d'apercevoir le général dans des lettres. Differentes Regles qui vont au même effet produisent differentes Méthodes pour une même construction, ou plûtôt differentes especes de constructions pour une même espece de Quarré. J'appelle *especes* de Quarrés, les Quarrés pairs ou impairs par opposition les uns aux autres. Il seroit à souhaiter qu'on pût démontrer que pour une espece de Quarré, il n'y a qu'un certain nombre de Méthodes, ou d'especes de construction.

Tout ce qui a été dit jusqu'ici regarde principalement les Quarrés impairs. Pour les pairs, qui ont toûjours été traités à part, à cause qu'ils sont beaucoup plus difficiles, & qui par cette même raison n'ont presque été qu'effleurés, M. Sauveur ne les peut construire qu'en ajoûtant à ses lettres tant 1^{eres} que 2des la condition qu'elles soient *analogues*, c'est-à-dire qu'étant prises deux à deux leurs sommes soient toûjours égales. Ainsi dans 1, 5, 6, 10, 11, 15, 1, & 15, 5 & 11, &c. sont analogues. Ces nombres ou lettres sont donc moins en proportion arithmetique.

La méthode des Analogues a cela d'heureux qu'elle comprend aussi les Quarrés impairs. Il ne faut que joindre aux 1^{eres} & 2des lettres analogues destinées à un quarré pair, une 1ere & 2de lettre moyenne, avec la condition que sa nature de lettre moyenne demande. Jusqu'ici on n'avoit point réduit les deux especes de Quarrés sous une méthode commune.

Par la construction par *analogie*, on voit d'abord que si l'on a mis dans une cellule une lettre quelconque, il faut mettre dans une autre cellule de la même bande son analogue, & toûjours ainsi de suite. Si le quarré est impair, on peut mettre dans les deux Diagonales au lieu des deux lettres analogues deux lettres moyennes, qui feront toûjours la même somme. Dans ces Quarrés, les Diagonales ne doivent jamais avoir des lettres moyennes qu'en nombre impair, afin que les cellules restantes qui

feront en nombre pair puiffent être remplies par des analogues qui ne vont que deux à deux.

Chaque lettre devant être autant de fois repetée qu'il y a de cellules dans une bande, il s'enfuit qu'une lettre avec fon analogue peut remplir deux bandes entieres paralleles, & alors le Quarré eft par bandes *continuës* ; il eft par bandes *interrompuës*, fi la même lettre avec fon analogue eft répanduë dans plus de deux bandes paralleles. Les bandes continuës peuvent de plus être *correfpondantes*, c'eft à-dire également éloignées des extremités du Quarré, ou non correfpondantes, ou enfin mixtes. M. Sauveur a épuifé toutes ces differentes conftructions même dans les Quarrés qu'il appelle *impairement pairs*, c'eft-à-dire dont la racine comme 6 ou 10 à deux moitiés impaires. On n'en avoit donné jufqu'à prefent que des cas particuliers.

Si dans une bande quelconque il y a des lettres fans leurs analogues, M. Sauveur met à la place de ces analogues qui manquent, des *réciproques* qui font la même fomme.

Si dans un Quarré impair la fomme des 1eres lettres eft plus grande ou plus petite que le produit de la moyenne par le nombre des termes, ce qui eft encore la difpofition ordinaire, il faut que la fomme des 2des lettres foit de la même quantité plus grande ou plus petite que ce même produit de fa moyenne, & c'eft-là ce que M. Sauveur appelle *Quarrés par excedants & par défaillants.*

Il paroît que ces 3 Méthodes, *par analogie*, *par réciprocation*, *par excedants & défaillants*, comprennent tout ce qu'on peut jamais obferver pour entretenir l'égalité perpetuelle des fommes.

On peut juger que les *Enceintes*, dont nous avons parlé dans l'Hift. de 1705, n'échapent pas à une Théorie fi générale. M. Sauveur y ajoûte même les *Chaffis* & les *Croix*, que l'on ne connoiffoit point encore. Les Quarrés *géometriques* entreront auffi dans cette même Théorie. Il n'y a d'autre changement à faire dans les opérations que

celui que la difference de l'arithmetique au géometrique emporte necessairement.

Il reste en cette matiere une curiosité ; c'est de sçavoir en combien de façons peut varier un Quarré magique. Quand on en a fait un en 1eres & 2des lettres, & qu'on a fait choix de certains nombres qu'on leur substituë, il est indifferent à quelle lettre on substituë un certain nombre, si ce n'est qu'il n'y ait quelque assujettissement indispensable, comme dans un Quarré impair de substituer le nombre moyen à la lettre moyenne. On trouve aisément par les regles des combinaisons combien il y a de substitutions libres, & ce sont autant de variations dont est susceptible un Quarré magique composé des mêmes nombres. M. Sauveur appelle cela *variation de nombres.* De plus un même Quarré peut être construit par differentes méthodes, dont chacune a une certaine quantité de variations de nombres. La somme de toutes les *variations de nombres de toutes les méthodes* est le nombre de toutes les variations que peut recevoir un Quarré magique déterminé, pourvû cependant qu'il n'y ait pas certaines constructions d'une méthode qui retombent dans celles d'une autre, ce qu'on ne peut pas trop garantir.

A cela près, il seroit à souhaiter qu'on eût des formules générales & algebriques pour les variations des Quarrés, & on en auroit 1°. si dans chaque Quarré d'une racine differente on pouvoit exprimer le rapport des variations de nombres à la racine ; 2°. si on étoit sûr d'avoir toutes les méthodes possibles pour la construction. Mais ni on ne peut dans chaque méthode exprimer toûjours le rapport des variations de nombres à la racine, ni on n'est absolument sûr d'avoir toutes les méthodes. On voit bien qu'il seroit très difficile d'en imaginer d'autres que celles de M. Sauveur, & que cette difficulté approche fort de l'impossibilité, mais enfin ce n'est pas-là une certitude de démonstration.

Cependant M. Sauveur a fait sur cela ce qui se pou-

voit faire, & a donné les formules algebriques qui pouvoient être déterminées. On voit par-là, du moins en général, que toutes les variations possibles des Quarrés un peu grands comme du Quarré de 7, doivent monter à des nombres prodigieux, & que celui de 406425600 constructions que nous avions marqué pour ce Quarré dans l'Hist. de 1705, est bien éloigné d'être exageré.

Une utilité nouvelle des lettres de M. Sauveur, & même agreable, c'est qu'un Quarré en nombres étant donné tout construit, il n'y a qu'à changer ces nombres en lettres 1eres & 2des selon les principes qui ont été établis, & alors on voit par la disposition & l'arrangement des lettres quelle méthode a été employée dans la construction de ce Quarré. L'artifice qui se cachoit dans les nombres, se découvre necessairement par les lettres, qui contiennent tout le fin & tout le mystere. On le démêle plus facilement, quand les nombres dont on a formé le Quarré sont en progression arithmetique. Ils laissent des traces plus visibles, & il est aisé d'en apercevoir la raison. Ce sont eux aussi qu'il est le plus naturel d'employer, & les seuls qu'on ait employé jusqu'ici. Par-là M. Sauveur a eu le plaisir de découvrir à laquelle de ses méthodes se rapportoient les Quarrés construits par les Auteurs qui l'ont précedé.

Enfin à tout cela il ajoûte les *Cubes magiques*, espece d'enchantement toute nouvelle. 27 est un Cube, qui peut être conçû comme composé de 27 petites cellules cubiques, dont chacune a 3 pour racine, & on peut concevoir que chacune de ces cellules porte ou renferme un nombre different de ceux de toutes les autres. Si les nombres de toutes les bandes de cellules soit horizontales soit verticales, & de plus des 6. bandes de cellules qui sont dans les 6 Diagonales du Cube, font toûjours une même somme, ou un même produit, le Cube sera magique, soit arithmetique, soit géometrique.

Il faut trois lettres ou nombres pour un Cube, au lieu qu'il n'en falloit que deux pour un Quarré. Mais nous

ne pousserons pas plus loin cette speculation, que M. Sauveur ne regarde lui-même que comme une simple recreation mathématique. C'est dommage qu'il n'y ait que trois dimensions dans la nature, on voudroit aussi disposer toutes les autres magiquement.



ALGEBRE.

SUR LA CONSTRUCTION
DES EGALITE'S.

LA Regle de M. Descartes pour la construction des Egalités ou Equations déterminées a été expliquée dans les Hist. de 1705 * & de 1707 *, & les objections de M. Rolle contre cette Regle dans les Hist. de 1708 * & de 1709 *. Elles ont réveillé les idées de M. de la Hire sur cette matiere qu'il avoit traitée dans un petit Livre imprimé en 1678, où il suivoit les idées de M. Descartes, & de M. Sluze, qui avoit bâti sur celles de Descartes. Il n'a pû se rendre aux objections de M. Rolle, ni se persuader qu'il y eût des erreurs dans des opérations qu'il croit fondées sur des démonstrations géometriques. Mais il est entré dans un examen plus ample, qui lui a valu quantité de vûës, nouvelles non-seulement par rapport à celles qu'il avoit déja données au Public, mais encore par rapport à tout ce que l'on sçavoit jusqu'ici sur ce sujet.

V. les M. p. 7.
* p. 110. & suiv.
* p. 73. & suiv.
* pag. 71. & suiv.
* p. 52. & suiv.

1°. M. de la Hire prétend que ce qu'on appelle la Regle de Descartes n'est point proprement une Regle que ce grand Auteur ait proposée dans les formes. Ce sont plûtôt quelques exemples de construction qui lui suffisoient alors, mais dont il est vrai qu'on peut tirer, &

dont

dont on a tiré effectivement une bonne Regle. L'Inventeur n'a point touché aux difficultés qu'on pouvoit trouver dans l'application, & il y à beaucoup d'apparence qu'il a voulu se conserver une partie de son secret.

2°. Il a suffisamment insinué lui-même que dans ces Constructions le choix du premier Lieu n'étoit pas entierement arbitraire, & cependant de fort habiles Géometres semblent avoir crû depuis qu'il l'étoit. On est obligé d'accorder à M. Rolle qu'il ne l'est pas, & il aura toûjours empêché le progrès de cette erreur dans la Géometrie, mais la véritable idée de Descartes ne laisse pas de demeurer en son entier.

3°. La regle telle qu'on la prend d'ordinaire peut jetter dans des inconveniens, dans des difficultés, dans des impossibilités même, mais tout cela n'est qu'apparent. Il faut sçavoir ne pas prendre pour un écueil ce qui n'en est pas un, ou si c'en est un, il faut sçavoir l'éviter avec adresse. Voilà surquoi roulent les principales découvertes de M. de la Hire, & nous allons donner ici les éxemples les plus instructifs de ses nouveaux préceptes.

Il propose quelque cas où en opérant selon la Regle, on peut pour construire une équation déterminée, ou en trouver les Racines, se contenter d'une Courbe, & d'une ligne droite, qui ne se coupant qu'en deux points ne donneront que deux Racines de l'Equation déterminée, qui cependant en a quatre. La Courbe & la ligne droite ont été bien prises, il est certain même qu'elles doivent donner la construction; où est donc l'erreur? C'est qu'au lieu d'une simple ligne droite, il falloit prendre deux Hyperboles opposées devenuës lignes droites.

Telle est la nature de l'Hyperbole, ou des Hyperboles opposées, que quand le *premier* Axe, c'est à dire, celui qui se termine aux deux sommets, est plus petit par rapport à son *conjugué* qu'on appelle le *second*, il s'ensuit que l'angle des Asimptotes entre elles en est plus grand, que celui qu'elles font avec le second Axe est plus petit, & qu'elles s'en approchent davantage, & que les Ordon-

nées de differentes Hyperboles correſpondantes à des Abſciſſes égales, ſont plus grandes ; de ſorte que ſi le ſecond Axe devient infini, le premier qui eſt déterminé étant toûjours le même, les Aſimptotes ſe confondent avéc le ſecond Axe, les Hyperboles dont les Ordonnées ſont devenuës infinies, ne ſont plus que deux lignes droites infinies, paralleles aux Aſimptotes & au ſecond Axe, & rencontrées perpendiculairement par le premier, qui meſure leur diſtance. C'étoient ces deux droites qu'il falloit prendre au lieu d'une ſeule, elles coupent la Courbe en quatre points. Et ce qui marque la néceſſité de les prendre, c'eſt que le Lieu à la ligne droite que l'on a eſt un Quarré inconnu égal à un Quarré connu. Or un Quarré à toûjours deux Racines égales, affectées des deux Signes contraires.

Voici quelque choſe de plus remarquable. M. Rolle avoit fait voir que quoique les Racines égales ne ſe doivent trouver ſelon la Regle de Deſcartes qu'aux points d'attouchement des Courbes, les trois racines égales d'une Equation conſtruite par une Parabole, & par une Hyperbole ſe trouvoient à un point d'interſection. Certainement la difficulté étoit des plus conſiderables, tout paroiſſoit renverſé. Mais M. de la Hire diſſipe cette apparence de défectuoſité dans la Regle, en démontrant que dans le point où les deux Courbes ſe coupent, elles ont une Tangente commune. Or il eſt conſtant en Géometrie qu'un point d'attouchement en vaut deux d'interſection; ces deux ſuppoſés, & celui d'interſection veritable, c'en ſont trois, & ces trois ne doivent donner, & ne donnent effectivement qu'une ſeule Ordonnée ou Racine, équivalente à trois égales.

Cependant cette réponſe elle-même n'eſt pas ſans de grandes difficultés. Car quoique M. de la Hire démontre que les deux Courbes out une Tangente commune à leur interſection, il eſt bien ſûr qu'elles ne ſe touchent pas, puiſqu'au contraire elles ſe coupent, & pourquoi, dequel droit, ſuppoſe-t-on qu'un point qui n'eſt pas

d'attouchement vaut deux points? Il n'en doit valoir qu'un, puiſqu'il n'eſt que point d'interſection. Il faudroit pour en valoir trois qu'il fût en même temps point d'attouchement & d'interſection, ce qu'il n'eſt pas & ne peut être. Dailleurs comment eſt-il poſſible que deux Courbes ayent une Tangente commune ſans ſe toucher, & qu'elles ſe coupent ayant une Tangente commune? On voit toûjours que quand deux Courbes ſe touchent, elles ont la même Tangente, & que ſi elles ſe coupent leurs Tangentes ſe coupent auſſi, & par conſéquent ſont differentes, & cela paroît abſolument néceſſaire. Il reſte donc beaucoup d'éclairciſſemens à déſirer, même dans une choſe démontrée. Nous allons tâcher de les donner ſelon la Géometrie des Infiniment petits, qui ſeule peut aller à ces ſortes de fineſſes.

Une Courbe quelconque étant conçûë comme un Poligone d'une infinité de côtés infiniment petits, chaque côté fait avec celui qui le précede ou le ſuit un angle obtus, non pas de 180. degrès, car alors les deux côtés ſeroient poſés bout à bout en ligne droite, ce qui narrive que dans des points d'*Inflexion*, mais un angle infiniment peu different de 180, de ſorte que ſon complément à 180. eſt un angle aigu infiniment petit. Les Anciens qui ont appellé *angle de contingence* celui qu'une Tangente de Cercle fait avec ſa circonference, ont entendu par-là cet angle aigu, qu'ils ne connoiſſoient pourtant pas auſſi diſtinctement qu'ils euſſent fait par nôtre Géometrie moderne, & quand ils ont démontré qu'il ne pouvoit paſſer par le point d'attouchement aucune ligne droite entre la Tangente d'un Cercle, & la circonference, ils ont ſenti & reconnu l'infinie petiteſſe de l'angle de contingence, puiſqu'ils le trouvoient indiviſible. Cependant cet angle infiniment petit, & par conſéquent indiviſible en parties finies eſt diviſible en parties du même genre de petiteſſes que lui, il peut être 2. fois, 3. fois, & à l'infini plus petit, & delà vient que ne pouvant être diviſé par aucune ligne droite, il le peut être par

une infinité de circonferences toûjours plus grandes, qui le rendront toûjours plus petit. Un côté du poligone infini peut donc faire avec celui qui le précede un angle de contingence different de celui qu'il fait avec le coté qui le suit, & même cela est ainsi dans toutes les Courbes, horsmis dans le Cercle.

Il faut encore supposer deux choses, 1°, que les Tangentes des Courbes ne sont que leurs côtés infiniment petits prolongés, 2°. que ces côtés peuvent être eux-mêmes conçûs comme composés d'infiniment petits *du 2^d^ genre.*

Quand deux Courbes se rencontrent de quelque maniere que ce soit, elles ont quelque partie commune. Si cette partie n'est que l'infiniment petit d'un de leurs côtés infiniment petits, & c'est tout ce qu'il peut y avoir de moins, les deux côtés qui n'ont rien de commun que cet infiniment petit du 2^d^ genre, se coupent donc en ce point, & par consequent les Tangentes & les Courbes s'y coupent aussi. Si la partie commune est un côté infiniment petit du 1er genre, il faut voir comment il est posé dans les deux differentes Courbes ausquels il apartient, ici, par exemple, dans la Parabole, & dans l'Hyperbole. S'il y est posé de maniere qu'il fasse dans la Parabole avec les deux côtés dont l'un le précede, & l'autre le suit deux angles de contingence plus grands que ceux qu'il fait dans l'Hyperbole avec les deux côtés voisins, il est évident que la Parabole & avant que d'avoir le côté commun, & après, sera au dedans de l'Hyperbole, c'est à dire, que ces deux Courbes se toucheront. Ce seroit la même chose renversée si les deux angles de contingence du côté commun, étoient plus petits dans la Parabole que dans l'Hyperbole. Mais si le côté commun, fait avec le côté qui le précede dans la Parabole un plus petit angle de contingence que celui qu'il fait avec le côté qui le précede dans l'Hyperbole, & si en même temps il fait avec le côté qui le suit dans la Parabole un plus grand angle que celui qu'il fait avec le côté qui le suit

dans l'Hyperbole, ou si c'est le contraire, la Parabole ayant été au dehors de l'Hyperbole viendra à être au dedans, ou au contraire, & par conséquent elles se couperont. Si à cette explication des intersections & des attouchements, on veut ajoûter celles des *baisements*, qui est dans l'Hist. de 1706*, on aura toutes les manieres dont les Courbes peuvent se rencontrer.

* p. 91. & 92.

Il est donc visible qu'un côté infiniment petit du 1er genre commun à deux Courbes ne les détermine pas necessairement à se toucher, mais seulement à avoir une même Tangente, soit quelles se touchent ou non. D'une autre part, tout point d'attouchement vaut deux points, parceque si l'on imagine qu'une Corde qui coupe une Courbe, un Cercle, par exemple, en deux points, devienne toûjours plus petite elle coupera toûjours la Courbe en deux points quelque petite qu'elle soit, & par conséquent lors même qu'elle le sera infiniment, & alors elle sera un côté infiniment petit de la Courbe, & une Tangente, si on la prolonge. Par-là, on conçoit qu'un point d'attouchement en vaut deux d'intersection, puisque ce sont deux points d'intersection auparavant éloignés, & qui se sont infiniment raprochés. Mais cette valeur d'un seul point vient précisément, non de ce qu'il est point d'attouchement, mais de ce qu'il est formé de deux points infiniment raprochés, & par conséquent il aura toûjours cette même valeur si sans être point d'attouchement, il peut être formé de la même maniere. Or tout côté infiniment petit du 1er genre peut être concû comme ayant été Corde qui a coupé la Courbe en deux points, donc tout côté infiniment petit du 1er genre commun à deux Courbes, vaut deux points, soit qu'à ce côté-là il se fasse un attouchement des deux Courbes, ou une intersection, ce qui lui est indifferent.

S'il s'y fait un attouchement, les deux Courbes n'ont plus absolument de partie commune, & ce point n'en peut valoir que deux. Mais s'il se fait une intersection, elle ne se peut faire que les deux Courbes n'ayent encore

quelque partie commune que l'interfection demande neceſſairement, & qui n'eſt point le côté infiniment petit du 1[er] genre, puiſqu'il eſt indifferent à l'attouchement & à l'interſection. Cette nouvelle partie commune ſera un infiniment petit du 2[d] genre, qui donnera un troiſiéme point. Ainſi voilà les trois points trouvés aſſés diſtincts les uns des autres, & toutes les difficultés éclaircies.

On voit même pourquoi le cas propoſée eſt rare, & pourquoi il a ſurpris quand il s'eſt preſenté. Ce ſont les angles de contingence plus grands ou plus petits, qui rendent la courbure des Courbes plus grande ou plus petite, & ils varient continuellement dans toutes, horſmis dans le Cercle ſeul. Deux Courbes ayant dans une conſtruction une origine commune, ou du moins deux origines peu éloignées, il eſt aſſés naturel que dans leurs parties correſpondantes la courbure de l'une ſoit toûjours ou plus grande ou plus petite que celle de l'autre, & que par conſéquent ſi elles ſe rencontrent, elles ſe coupent ou ſe touchent ſimplement. Il faut pour le cas propoſé qu'elles ſe rencontrent juſtement au point où la courbure de l'une ayant été plus grande ou plus petite que celle de l'autre vient à être le contraire de ce qu'elle étoit, & que de plus elles s'y rencontrent de maniere à avoir un infiniment petit du 1[er] genre commun, & non pas du 2[d]. Ces deux conditions ne doivent ſe trouver que rarement enſemble. La premiere ſeule doit même être rare.

Après cette digreſſion, qui peut être pardonnée à la nouveauté du ſujet, à la neceſſité de le developer, reprenons la matiere principale. Si dans le cas que nous venons de voir, un ſeul point donne plus de Racines qu'il ne ſemble en pouvoir donner, il y en a d'autres où l'on trouve plus de Racines que l'on n'en cherche, ou que l'on n'a beſoin d'en trouver, M. de la Hire en donne un exemple dans la Triſection de l'angle*.

* V. les M. p. 200.

Ce Problême ſe réduit toûjours a une Equation déterminée du 3[eme] degré, & M. de la Hire la conſtruit par le

Cercle même dont il faut diviſer un arc déterminé en 3. parties égales, & par une Hyperbole ou plutôt par deux Hyperboles équilateres entre leurs Aſimptotes. Ces Hyperboles coupent le Cercle en 4. points, & determinent 4. Racines.

D'abord on pouroit peut-être penſer qu'il y auroit une racine de trop, puiſque l'Equation que l'on conſtruit n'en a que 3, mais une Equation du 3eme degré ſe conſtruiſant par les mêmes Lieux qu'une du 4eme, il faut que la conſtruction de ces deux Equations donne également 4 racines. Ce qui remedie à l'excès dans celle du 3eme degré, c'eſt que l'on voit auſſi tôt, comme dans le cas propoſé, qu'une des 4 racines eſt la même, & ne fait rien de plus qu'une des quantités connuës & données dans l'opération, & par conſéquent n'eſt pas une des grandeurs inconnuës que l'on cherche. Si l'équation avoit été veritablement du 4eme degré, cette égalité ne s'y fût point trouvée. Il y a toûjours ſelon une progreſſion raportée dans l'Hiſt. de 1707 * un certain nombre d'Equations déterminées de differents degrés, qui ſe conſtruiſent par deux Lieux du même degré, & il eſt bon de remarquer ici que dans l'Equation moins élevée il doit toûjours arriver par rapport à celle qui l'eſt davantage quelque choſe de ſemblable ou d'équivalent à ce que nous venons d'expliquer dans le cas dont il s'agit.

* p. 74.

Il reſte donc dans ce cas 3 racines ou 3 points d'interſection à conſiderer. Quand on veut diviſer en 3 un arc quelconque, par exemple de 40 degrés, on a néceſſairement ſa corde, & c'eſt d'une de ſes extremités que doit commencer la diviſion. Ainſi il ſuffiroit d'avoir ſur cet arc un point où dût ſe terminer la premiere des 3 petites cordes égales qui diviſeront l'arc. Il ſuffiroit donc que la conſtruction donnât ce point, & les deux autres qu'elle donne paroiſſent inutiles. Mais la corde donnée de l'arc de 40 eſt la même que celle de ſon complément à 360, qui eſt l'arc de 320, & le Problême eſt autant la triſection de l'arc de 320, que celle de l'arc de 40. Il

faut un point pour chaque arc, & en voilà déja deux d'utiles.

Le tiers d'un arc ajoûté au tiers de l'autre qui lui est contigu est le tiers de la somme des deux arcs, ou du Cercle entier, & par-là le Cercle même est divisé en trois, ce qui dans la même construction produit une solution nouvelle. Mais si la somme des deux arcs y est divisée en trois, leur difference doit l'être aussi, & c'est ce que le troisiéme point d'intersection execute. De ces 3 points & des divisions qu'ils donnent naît encore la trisection de la moitié de la difference des deux arcs.

Cette construction si riche & si abondante en solutions, n'en produit point d'inutiles; quoiqu'elle en produise plus qu'on n'en cherchoit, car ou l'on les cherchoit sans le sçavoir, c'est à dire qu'elles tenoient necessairement à ce qu'on cherchoit, ou elles appartiennent au Problême tourné de plus de sens, & plus compliqué qu'on ne l'envisageoit d'abord. M. Descartes dans la solution du même Problême qu'il a donné par une autre voye, a laissé une de ses Racines sans en marquer l'usage, mais ce n'est pas à dire quelle fût oisive, quoique peut-être l'usage en fût difficile à apercevoir. Non-seulement on fait tout ce qu'on vouloit faire, mais on fait souvent plus qu'on ne pensoit, & souvent même il faut beaucoup de reflexion pour comprendre jusqu'où va tout ce qu'on a fait.

A l'occasion de ce Problême, M. de la Hire donne une nouvelle formule fort simple & fort aisé à démontrer pour la Section indéfinie des Arcs circulaires. Nous avons parlé dans les Hist. de 1702 *, & de 1707 * de cette section indéfinie, & des solutions qu'on en a données.

* p. 58. & suiv.
* p. 75. & 76.

M. de la Hire remarque qu'il y a des Constructions qui donnent des Racines repetées. Ce défaut apparent de la Regle en est effectivement une perfection; car cela n'arrive que lorsque les Lieux dont on se sert sont trop élevés, & que de leurs Equations on en déduiroit une Equation

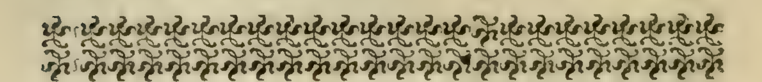
Equation déterminée d'un dégré plus élevé que la proposée.

Il y a certaines opérations trompeuses dont il faut se défier. Par exemple, si on a une Courbe exprimée par une certaine Equation, & que l'on quarre ou que l'on cube cette Equation, on croira avoir une Courbe d'un degré plus élevé, & differente de la premiere ; quelquefois cependant ce n'est que la même, & par conséquent on n'aura que le même nombre d'interfections de cette Courbe avec une autre ligne, quoiqu'on se fût peut-être proposé d'en avoir davantage.

Quelquefois ce nombre est trop petit, parcequ'on n'a pas construit la Courbe qu'il falloit, quoiqu'on l'ait employée dans les opérations, & c'est là un des principaux défauts où l'on tombe. Par exemple, on aura pris d'abord pour premier Lieu une Parabole cubique, qui est fort simple, & fort en usage. On n'aura pû s'en servir pour le second Lieu sans la quarrer, & ensuite quand on vient à la construction de l'Equation proposée, on employe pour un des deux Lieux la Parabole cubique telle qu'on l'a prise d'abord, au lieu de l'employer *cubique-quarrée*, comme elle est entrée dans les opérations, ce qui auroit donné une autre Courbe, ou du moins la même Courbe avec plus de *Rameaux*, & un plus grand nombre d'interfections avec le second Lieu.

M. de la Hire ne compte pas pour un défaut de la Regle que l'on ne trouve aucune racine de l'Equation. quand même les Lieux qu'on a pris seroient les plus simples qu'il soit possible, si d'ailleurs ils n'ont par eux-mêmes aucune des racines cherchées. Ils veut qu'on les prenne tels, qu'ils puissent contenir ce qu'on leur demande. Ainsi le plus sûr est, selon lui, de construire une Equation par deux Courbes qui comme la Parabole ayent des Ordonnées depuis Zero jusqu'à l'Infini, tant positives que negatives, car dans ce nombre infini d'Ordonnées de toutes grandeurs, & de toute espece se trouveront celles qui exprimeront les Racines de l'Equation propo-

ſée. Un Cercle ou toute autre Courbe bornée pourroît les manquer. Il eſt vrai que ce ſeroit-là une reſtriction très conſiderable à la Regle, & qu'elle perdroit infiniment de ſon univerſalité, & ce qui eſt une des prétentions de M. Rolle, mais rien n'oblige à lui conſerver la gloire de cette univerſalité prétenduë, & il ne s'agit que de ſa verité.



GEOMETRIE.

SUR

UNE INTEGRALE DONNE'E

PAR M. LE MARQUIS DE L'HOPITAL.

OU SUR LES PRESSIONS DES COURBES

EN GENERAL.

V. les M. p. 158.
* p. 78. & ſuiv.

L'Hiſt. de 1700 * a expliqué en quoi conſiſtoit le Problême de *la Courbe qu'un Corps qui la décriroit en deſcendant librement preſſeroit dans tous ſes points d'une force toûjours égale à celle de ſa peſanteur abſoluë.* Feu M. le Marquis de l'Hôpital en réſolvant ce Problême ſe ſervit d'un tour d'*integration* adroit & ſingulier, dont il borna l'uſage à ce qu'il avoit alors entrepris. Mais M. Varignon, dont le zele pour la gloire de ce grand Géometre lui fait dire *qu'il ne prétend preſque rien donner ici de lui*, montre que ce même tour, ou cette même *Integrale* peut aller beaucoup plus loin, & s'étendre à tous les Problêmes, où, comme dans celui de M. de l'Hôpital, il s'agit de preſſions cauſées ſur des Courbes par la peſanteur & par

la force Centrifuge d'un Corps qui les décrit en tombant librement. Il faut ſe rappeller ici ce qui a été dit ſur la force Centrifuge dans l'Hiſtoire de 1706 *, & ſur les preſſions des Courbes dans celle de 1708 *. Ces principes ſupposés, nous allons donner une ébauche de la Théorie de M. Varignon.

* p. 56. & ſuiv.

* pag. 84. & ſuiv.

En ſuivant la route que M. de l'Hôpital avoit ouverte, il donne en général la Courbe toûjours preſſée ſelon telle puiſſance qu'on voudra des hauteurs d'où le Corps ſera tombé à chaque inſtant. On ſuppoſe d'ordinaire que les viteſſes acquiſes à chaque inſtant par un Corps qui tombe ſont comme les racines des hauteurs d'où il eſt tombé depuis l'origine de ſa chute, & par conſéquent ſi les preſſions ſont comme ces hauteurs, elles ſont comme les quarrés des viteſſes, ſi elles ſont comme les quarrés des hauteurs, elles ſont comme les 4emes puiſſances des viteſſes, &c. les hauteurs ſont les Ordonnées de la Courbe génerale.

Tant que l'on y ſuppoſe les preſſions variables, ce qui comprend tous les cas poſſibles, hormis le ſeul où elles ſont conſtantes, on voit que la Courbe ne peut avoir une derniere Ordonnée infinie, car elle devient *imaginaire* dès qu'on lui en veut donner une. Il ne peut donc y avoir de preſſion infinie, & cela s'accorde avec ce que nous avons dit dans l'Hiſtoire de 1706, que la force centrifuge ne peut être *réellement* & phyſiquement infinie, non plus que la peſanteur qui n'eſt elle-même qu'une force centrale. Puiſque ces deux forces finies font la preſſion, il eſt neceſſaire qu'elle ne ſoit jamais que finie. Quand une Courbe devient imaginaire, c'eſt-à-dire que non ſeulement il n'y a plus alors de Courbe, mais qu'il ne peut pas même y avoir de ligne droite, & en effet la ligne droite ne peut être décrite dans le cas preſent, puiſque la force centrifuge qu'on y ſuppoſe n'en fait jamais décrire une, & qu'au contraire ſa fonction perpetuelle eſt d'en détourner le Corps.

Si dans la Courbe générale de M. Varignon on ſup-

pose les pressions constantes, ce qui est le cas de M. de l'Hôpital, on voit naître deux Courbes particulieres, l'une imaginaire, l'autre réelle. Il peut paroître bisarre que la même supposition produise ces deux Courbes d'une nature entierement opposée, mais voici d'où cela vient, & il n'arrive par le Calcul que ce qui doit arriver selon la simple Metaphysique. Les pressions peuvent être constantes en deux manieres. Elles le seront, si l'action tant de la pesanteur que de la force centrifuge est constante. L'action de la pesanteur ne peut être toûjours la même que sur une ligne droite, ou horizontale, ou inclinée; mais dès que la ligne est droite la force centrifuge n'agit plus, donc il y a contradiction que les pressions soient constantes de cette façon, & la Courbe est imaginaire. Mais si l'action de la pesanteur, & celle de la force centrifuge varient de maniere que toutes deux ensemble elles soient toûjours égales à une quantité constante, ainsi que nous l'avons expliqué dans l'Hist. de 1708, la Courbe, qui est celle de M. de l'Hôpital, est réelle. La variation perpetuelle des deux causes demande que les vitesses, & par conséquent les hauteurs, ou les Ordonnées de la Courbe varient, & delà il suit que ces Ordonnées ne peuvent plus être comme des pressions constantes. Il peut donc y avoir, & il y a effectivement une derniere Ordonnée infinie, qui represente une vitesse & non pas une pression infinie, & de toutes les Courbes enveloppées dans la Courbe générale elle est la seule qui ait une pareille Ordonnée.

Il faut remarquer que dans la supposition des pressions constantes, la Courbe n'est imaginaire que parceque l'on conçoit la pesanteur & la force Centrifuge constantes, & de plus agissant ensemble. Mais si l'on conçoit la pesanteur agissant seule, la Courbe deviendra une ligne droite réelle, horizontale, ou inclinée, comme nous l'avons dit.

Puisque les pressions étant inégales, la Courbe générale ne peut avoir d'Ordonnée infinie, ou ce qui revient

au même, s'étendre à l'infini, les Courbes particulieres qu'elle produira seront *bornées*. Ainsi si les pressions doivent être comme les racines des hauteurs, ou comme les vitesses, on a la Cycloïde trouvée par M. Parent en 1706. Si les pressions sont comme les hauteurs ou les quarrés des vitesses, c'est le Cercle de M. Saurin trouvé dans la même année. Si les pressions sont comme les quarrés des hauteurs, c'est l'*Elastique* de feu M. Bernoulli * &c.

* V. l'Hist. de 1705. p. 133. 134. & 144.

M. Varignon pour étendre encore plus sa Théorie, & l'usage de l'Integrale de M. de l'Hôpital, suppose ensuite que les pressions, toûjours proportionnées aux puissances quelconques des hauteurs, ne soient causées que par la seule force Centrifuge, & il trouve une seconde Courbe générale presque entierement semblable à la premiere, & il est visible qu'elle doit l'être, puisque la pesanteur & la force centrifuge étant de la même nature, toutes deux, par exemple, incapables d'Infini, la somme des deux, ou une seule ne doivent produire que les mêmes effets pour la génération d'une Courbe. Aussi les Courbes particulieres de ce second cas se trouvent-elles les mêmes que celles du premier.

Si à la supposition de la force centrifuge agissant seule on ajoûte qu'elle soit constante, il naîtra deux Courbes, l'une réelle, l'autre imaginaire, nouvelle bisarrerie apparente du Calcul, que nous pouvons encore justifier, pourvû que nous remontions jusqu'à la premiere idée de la force centrifuge.

Elle est d'autant plus grande, ou pour parler plus précisément, elle agit d'autant plus à un point quelconque d'une Courbe, que le Corps qui tombe a plus de vitesse, & que la Courbe est plus courbe en ce point-là. La vitesse se mesure par la hauteur d'où le Corps auroit dû tomber pour l'acquerir, & cette hauteur est comme le quarré de la vitesse acquise. Une Courbe est d'autant plus courbe à un point quelconque que le Rayon de sa Dévelopée y est plus petit. Donc l'action de la force centrifuge à un point quelconque est le quarré de la vi-

tesse divisé par le Rayon de la Dévelopée, ou, ce qui est la même chose, le rapport d'une de ces grandeurs à l'autre. Ce rapport peut être constant en deux manieres; où les deux grandeurs dont il est formé le seront chacune, ou toutes deux varieront toûjours selon la même proportion. Si c'est la premiere maniere, & si par conséquent la vitesse est constante, les Ordonnées de la Courbe sont toûjours égales, c'est-à-dire qu'elle n'est plus une Courbe, ni même une ligne droite à cause de la force centrifuge supposée. Mais si le rapport varie de la seconde maniere, les vitesses & par consequent les Ordonnées sont inégales comme il faut qu'elles le soient, & on a une Courbe très réelle. Voilà tout le mystere. Le Calcul ne donne que les effets, & souvent envelope & cache les causes.

Il reste encore deux suppositions de M. Varignon, l'une que la Courbe ne soit pressée que par la seule pesanteur, l'autre que la pression causée par la pesanteur soit à celle de la force centrifuge en telle raison qu'on voudra, mais ni l'une ni l'autre ne nous donne lieu à de nouvelles réflexions, & ce que nous avons dit des Courbes nées des deux premieres suppositions enferme tout ce que nous pourrions dire de celles-cy.

SUR LES FORCES CENTRALES

INVERSES.

V. les M. p. 519. & p. 533.

TOut ce que nous avons dit jusqu'à present sur le Problême des forces Centrales ne regardoit que ce Problême *direct*, c'est-à-dire qu'une Courbe étant donnée il s'agissoit de sçavoir quelle étoit à chaque point de cette Courbe l'action de la force centrale; par exemple, si un Corps décrivoit une Section Conique, & que la force centrale le tirât ou le poussât vers un foyer, il falloit trouver que cette action à chaque point de la

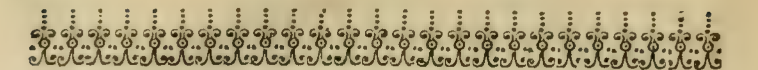
Section étoit en raiſon renverſée des quarrés de la diſtance de chaque point au foyer. Maintenant le Problême eſt *inverſe*; la force centrale étant donnée il faut trouver la Courbe; ſi l'on ſçait que les actions de cette force ſur une Courbe ſont en raiſon renverſée des quarrés des diſtances de chaque point de la circonference au point où elle tend, il faut déterminer que cette Courbe eſt une Section Conique.

Le Problême direct ne demande que le Calcul Differentiel, l'Inverſe demande le Calcul Integral. Car dans le direct on exprime la force Centrale par les infiniment petits d'une Courbe en général, qui ſont enſuite ſpecifiés par la Courbe donnée; mais dans l'inverſe, avec ces infiniment petits ainſi ſpecifiés on cherche la Courbe dont ils ſont infiniment petits, ce qui dépend indiſpenſablement de quelque integration.

Nous avons déja fait ſentir dans l'Hiſt. de 1702* la difference du Calcul Differentiel & de l'Integral. L'un differentie tout, mais l'autre n'integre pas tout, ſoit que tout ne ſoit pas integrable en ſoi-même, ſoit que ce qui l'eſt en ſoi-même ne le ſoit pas toûjours pour nôtre Art, ou ne le ſoit qu'avec de trop grandes difficultés.

* p. 61.

M. Herman Profeſſeur en Mathématique à Padouë, & M. Bernoulli ayant travaillé au Problême inverſe des forces centrales, M. Varignon qui avoit tant manié le direct, voulut voir ſi les formules qu'il en avoit données, & qui étoient toutes des expreſſions de forces centrales où entroient les infiniment petits des Courbes, ſouffriroient l'integration. Il eut le plaiſir de voir que de 18 de ces formules générales, 14 s'integroient aſſés facilement, & rétomboient dans les ſolutions de M[rs] Herman & Bernoulli trouvées par d'autres voyes. Cette integrabilité facile eſt un bonheur, dont on n'a qu'à joüir, quand il s'offre naturellement; ſinon, il faut ſçavoir éviter les écueils qui ſe preſenteroient d'un côté, & eſſayer de ſe tourner de quelque autre, & c'eſt ce que M. Bernoulli a pratiqué avec beaucoup d'adreſſe dans la route qu'il avoit priſe.



ASTRONOMIE.

SUR LE MOUVEMENT
DE LA LUNE.

V. les M. p. 292.

LA proximité de la Lune a donné aux Aſtronomes la commodité d'obſerver ſûrement & exactement la variation de la grandeur apparente de ſon diametre, qui ſuit neceſſairement la même proportion que la variation de ſes diſtances à la Terre. Ainſi ſon plus petit diametre apparent étant de 29′ 30″, & le plus grand de 33′ 30″, ce qui eſt ſelon la raiſon de 177 à 201., ſi la plus grande diſtance de la Lune à la Terre eſt 201, la plus petite ſera 177.

Delà il ſuit que ſi l'on ſuppoſe que la Lune décrive une Ellipſe dont la Terre occupe un des foyers, le grand Axe de cette Ellipſe ſera 378, ſomme de 177, & de 201, & la diſtance des foyers 24, ce qui donne 12 pour la diſtance d'un des foyers au centre, & pour le petit Axe un nombre irrationel un peu plus grand que 376. Si on a d'ailleurs par la parallaxe de la Lune ſa diſtance à la Terre évaluée en demi diametres de la Terre, tous ces nombres ſe changeront en d'autres qui auront rapport à la grandeur abſoluë de ce demi-diametre de la Terre qui eſt de 1500 lieuës. Ainſi au lieu de 177 & de 201 on aura, ſelon M. de la Hire, 5597 & 6356 qui auront le même rapport, & dont chaque unité vaut une centiéme partie du demi-diametre de la Terre, c'eſt-à-dire 15 lieuës.

L'Ellipſe de la Lune étant donc établie & déterminée ſur le fondement de la variation apparente de ſon diametre,

metre, il eſt certain que ſon mouvement, fût-il égal & uniforme en lui-même, doit paroître inégal à la Terre placée dans un foyer, & que cette inégalité doit dépendre de la nature de l'Ellipſe, ou ce qui eſt la même choſe, du rapport de la diſtance de ſes foyers au grand Axe; car ſi la diſtance des foyers devenoit nulle, c'eſt-à-dire que l'Ellipſe devint Cercle, un mouvement qui ſeroit égal, le paroîtroit auſſi, & ſi cette diſtance devenoit égale au grand Axe, l'Ellipſe ne ſeroit plus qu'une ligne droite ſur laquelle le mouvement paroîtroit le plus inégal qu'il ſoit poſſible. Puiſque le mouvement de la Lune nous paroît inégal d'une certaine inégalité déterminée par la nature particuliere de l'Ellipſe, il faut, ſelon ce qui a été dit dans l'Hiſt. de 1704 *, trouver pour chaque point de l'Orbite de la Lune quelle eſt la difference de ce mouvement inégal, qui eſt *l'apparent* ou *le vrai*, à un mouvement feint qui ſeroit égal & qu'on appelle *moyen*. Cette difference eſt *l'Equation du centre* de la Lune.

* p. 65. & 66.

Les Aſtronomes appellent *Anomalie* un arc quelconque de l'Orbite d'une planete depuis ſon Aphelie, ſi ſon mouvement ſe rapporte au Soleil; ou depuis ſon Apogée, s'il ſe rapporte à la Terre, ce qui n'eſt que pour la Lune ſeule. Ils comptent auſſi l'Equation du centre depuis l'Aphelie ou l'Apogée, & ſuppoſent que la Planete parte de l'un ou de l'autre de ces points. Comme ils ſont les plus éloignés du foyer où ſe rapporte le mouvement, & d'où l'on ſuppoſe qu'il eſt vû, c'eſt vers ces points que le mouvement apparent ou vrai eſt le plus lent, & le plus ſurpaſſé par le moyen. Donc l'Equation du centre étant nulle préciſément au point de l'Aphelie ou de l'Apogée, puiſque c'eſt-là qu'on ſuppoſe que le mouvement de la Planete commence, cette Equation ſera *ſouſtractive* pour les degrés d'anomalie ſuivans, parceque du mouvement moyen que l'on a toûjours il en faudra ôter alors une certaine quantité pour avoir le mouvement vrai. Le moyen ayant commencé par devancer le vrai, il le de-

vance toûjours, parceque ses avantages sur le vrai s'accumulent toûjours ; mais comme ces mêmes avantages vont en diminuant à mesure que l'anomalie augmente, ou, ce qui est le même, que la Planete s'éloigne de son Aphelie ou Apogée, le mouvement moyen devance toûjours le vrai de moins en moins, & enfin ils se retrouvent ensemble au Perihelie ou au Perigée. Delà vient que l'Equation est soustractive dans tout le premier demi-cercle d'Anomalie, qu'elle croît toûjours jusqu'au point de la *moyenne distance*, qui est au quart de cercle, & qu'ensuite elle diminuë toûjours jusqu'au Perihelie ou Perigée, où elle est Zero. Ensuite elle est *additive* dans tout le demi-cercle suivant, &c. car ce n'est que ce qu'on vient de dire, mais renversé. La plus grande Equation du centre de la Lune, ou celle des moyennes distances, est selon les Tables de M. de la Hire de 4° 59′ 16″.

Pour avoir dans l'Ellipse d'une Planete les mesures du mouvement vrai & du moyen, Kepler divise tout son aire elliptique en parties égales par des lignes droites, qui du foyer où se rapporte le mouvement, sont tirées à toute la circonference. Puisque ces lignes comprennent des Secteurs ou triangles elliptiques égaux en superficie, les arcs ausquels elles se terminent sont necessairement inégaux, plus grands aux endroits plus proches du foyer, & réciproquement. Ces triangles égaux representent les parties du mouvement moyen, ou, ce qui revient au même, les tems pendant lesquels se font les differentes parties du mouvement vrai, representées par les arcs elliptiques inégaux correspondants. Cette hipothese est Phisique aussi bien qu'Astronomique, c'est-à-dire qu'elle peut non-seulement fonder les calculs, ausquels il suffit de se rencontrer avec les phenomenes, mais encore fournir l'explication de la mechanique des mouvements célestes. Car si une matiere fluide contenuë dans un plan elliptique se meut autour d'un foyer, il est fort naturel que par rapport à ce foyer elle parcoure en tems égaux des Secteurs elliptiques ou des superficies égales, ce qui rend

inégaux les arcs décrits en même tems par une Planete qu'elle emportera. On prend des angles qui ſoient entre eux comme les ſuperficies elliptiques par rapport à la demi-ſuperficie elliptique totale, & la difference de ces angles à ceux du vrai mouvement de l'Equation du centre.

Mais M. de la Hire fait voir par un calcul qu'il expoſe tout du long, que ſelon cette hipotheſe l'Equation du centre de la Lune dans la moyenne diſtance ſeroit de 7° 16′ 54″, au lieu de 4° 59′ 16″, ou du 5° quelle ne doit jamais paſſer, de l'aveu même de Kepler; car il ne trouve pas par ſon calcul cette exorbitante Equation, mais c'eſt que dans l'Ellipſe de la Lune il ne poſe pas la diſtance des foyers aſſés grande. Dès qu'on vient à la poſer telle qu'elle eſt, cette Equation qu'on ne peut recevoir ſuit de ſon hipotheſe.

D'autres Aſtronomes venus après lui en ont pris une autre, qui à la verité n'a rien de phyſique, mais qui ſuffit pour l'Aſtronomie. Autour du ſecond foyer de l'Ellipſe, c'eſt-à-dire de celui où ne ſe rapporte pas le mouvement, ils décrivent au dedans de l'Ellipſe un Cercle, qui étant diviſé en arcs égaux, ils tirent par ces diviſions des lignes juſqu'à la circonference de l'Ellipſe, & des points ainſi déterminés ſur cette circonference, ils tirent des lignes droites au premier foyer. Par-là il ſe forme des angles égaux & inégaux correſpondants, dont les differences ſont l'Equation du centre.

M. de la Hire prétend encore qu'à l'égard de l'Equation de la Lune cette ſeconde hipotheſe jette dans l'erreur, mais qu'on peut la rectifier en décrivant le Cercle qui meſure le mouvement moyen, non autour du ſecond foyer, mais autour d'un autre point qui ſoit plus proche du premier, & dont il détermine géometriquement la poſition ſur le grand Axe.

En un mot la diſtance des foyers étant neceſſairement telle qu'elle eſt dans l'Ellipſe de la Lune par l'obſervation de ſes diametres apparents, & la plus grande Equation

du centre ne pouvant être plus grande que 5°, comme tous les Astronomes en conviennent, il est impossible de trouver une mesure du mouvement moyen & du vrai, qui dépende directement & immediatement des foyers. Et si l'hypothese de Kepler qui s'y rapporte uniquement ne laisse pas de réüssir pour les autres Planetes, c'est que la distance des foyers de leurs Ellipses n'est pas absolument déterminée par l'observation, & qu'on est assés libre de la poser telle que les autres besoins la demandent. Du moins est-ce là ce que M. de la Hire soupçonne avec assés de vrai-semblance.

Il est à remarquer que la plus grande & la plus petite distance de la Lune à la Terre, d'où dépend la distance des foyers, & la nature de l'Ellipse, ne sont 6356, & 5597, que quand l'Apogée ou le Perigée de la Lune sont joints au Soleil, ce qui revient à ce qu'on a dit dans l'Hist. de 1702 *. Si cet Apogée ou ce Perigée sont à 3 Signes du Soleil, la plus grande distance ne change point, mais la plus petite est de 5769 au lieu de 5597, ce qui change le rapport des deux distances, & par conséquent la nature de toute l'Ellipse, qui depuis la conjonction au Soleil a dû n'arriver à ce terme que par degrés, c'est-à-dire en variant toûjours. On ne sera pas surpris que les calculs astronomiques manquent quelquefois d'attraper juste les points de cette Ellipse toûjours variable, ne le fût-elle que par des principes connus; mais il y a bien de l'apparence qu'elle l'est encore par des irregularités physiques, & imprévûës, qui ne se soûmettent point au calcul. La grande proximité de la Lune nous les rend plus sensibles que dans le cours des autres Planetes, où elles ne doivent pas avoir moins de lieu. De plus comme il est certain que les mouvements de la Lune variant selon les differentes situations où elle est par rapport au Soleil, on peut croire avec raison que le Soleil a plus d'empire sur elle, que sur les Lunes ou Satellites de Jupiter & de Saturne dont il est beaucoup plus éloigné, & qu'à cet égard ces Satellites doivent être moins irreguliers. Ainsi

* p. 77.

tout concourt à rendre contre toute apparence ce qui eſt plus proche de nous plus difficile à connoître.

SUR LES REFRACTIONS.

LA matiere des Refractions eſt trop Phyſique, & trop dépendante des expériences pour pouvoir être promptement finie. Le P. Laval qui continuë de s'y appliquer avec ſoin & avec ſuccès, a ajoûté une obſervation ſinguliere à toutes celles qu'il avoit déja communiquées à l'Académie *.

* V. l'Hiſt. de 1706. p. 101. & ſuiv. de 1707. p. 89. & ſuiv. & de 1708. p. 105. & ſuiv.

La hauteur meridienne du centre du Soleil obſervée exactement tant au Solſtice d'Hiver qu'au Solſtice d'Eté donne la diſtance des deux Tropiques, & la moitié de cette diſtance eſt celle de l'Equateur à l'Ecliptique, ou, ce qui eſt la même choſe, l'angle ſous lequel l'Ecliptique coupe l'Equateur, Element très important dans toute l'Aſtronomie. Differents Obſervateurs, & ſouvent le même en differents tems, trouvent cet angle different, quelquefois d'une quantité aſſés conſiderable, & cela avec les Inſtruments les plus parfaits, & en opérant avec la plus grande exactitude. Seroit-ce qu'effectivement l'obliquité de l'Ecliptique changeroit? Quelques-uns l'ont crû poſſible; mais outre que dans ce changement prétendu il ne paroît rien de reglé, ce qui eſt déja un grand préjugé contre le changement, le P. Laval leve entierement par une obſervation qu'il a faite le ſcrupule qu'on pourroit avoir.

Le 22 Juin 1710 il obſerva la hauteur meridienne apparente du bord ſuperieur du Soleil de 70° 25′ 50″, & le lendemain 36 heures après que le Solſtice étoit paſſé, & par conſéquent le Soleil devant être plus bas, il obſerva cette même hauteur de 70° 26′ 0″, c'eſt-à-dire, de 10″ plus grande, au lieu qu'elle eût dû être plus petite. Il eſt vrai qu'à un Quart de Cercle de 3 pieds de rayon, tel

que celui dont il se servoit, 10″ ne sont pas une grandeur bien sensible, mais enfin il est sûr que la hauteur du 23 étoit au moins égale à celle du 22, ce qui ne devoit pas être, & ne peut être attribué qu'à l'irrégularité de la Refraction.

Le P. Laval avoit remarqué que la Refraction étoit plus grande en Hiver qu'en Eté, mais il doutoit qu'elle pût varier sensiblement d'un jour à l'autre à la même heure, & c'est ce que son observation lui a appris.

Elle s'accorde avec ce que nous avions déja dit d'après lui dans l'Hist. de 1706, que la refraction est moindre par un Nord-Oüest, ou un Sud-Est frais. En effet le 22 il soufloit un Nord-Oüest frais, & le 23 un Sud-Oüest foible.

Jusqu'à present c'est une circonstance qui n'a point été marquée dans le détail des observations Astronomiques, que celle du Vent, & l'on n'eût pas crû qu'elle eût dû jamais y entrer. Cependant si la découverte naissante du P. Laval se confirme, si la Refraction a quelques variations qui se reglent par rapport aux Vents, ou en général à la constitution de l'Air, il faudra ajoûter à la Table astronomique de la Refraction, c'est-à-dire à celle où elle n'est calculée que pour les differentes hauteurs sur l'Horison, une Table Physique, qui representera ses inégalités dépendantes de la constitution de l'air, & l'on consultera ces deux Tables pour corriger les hauteurs apparentes des Astres, & les réduire aux vraïes. Le P. Laval entrevoit déja un commencement de cette seconde Table, qui seroit & fort curieuse, & fort utile, quoiqu'elle laissât toûjours quelque chose à desirer. L'extrême précision, & nos soins pour y parvenir ressemblent aux Courbes qui ont des Asimptotes.



SUR LES TACHES

DU SOLEIL.

MEssieurs Cassini, de la Hire, & Maraldi n'ont vû cette année qu'une Tache dans le Soleil. Elle parut tout d'un coup le 24. Octobre, car on n'avoit rien aperçû le jour précedent, elle étoit fort grande, seule, & déja dans la partie Occidentale du Disque, éloignée seulement du centre apparent de 1′ 7 ou 8″ en longitude. Les nuages empêcherent qu'on ne pût observer ce jour là sa latitude ou déclinaison, mais le lendemain on la trouva Meridionale de 3′ à peu près. Le 28 qu'elle fut encore observée, elle continuoit son cours vers l'Occident selon l'hypothese des 27 jours $\frac{1}{2}$, mais sa déclinaison étoit devenuë Septentrionale presque de la même quantité dont elle étoit Meridionale le 25. On ne pût l'observer les jours suivans à cause des nuages. Quoiqu'elle fût fort grande, elle ne réparut point dans le tems où elle l'auroit pû après avoir fait sa révolution derriere le Soleil.

M. Cassini le fils ayant placé cette Tache sur le globe du Soleil suivant la Méthode expliquée dans l'Hist. de 1707 *, trouva que le 24 Octobre à 7 heures $\frac{1}{2}$ du soir elle étoit précisément au milieu du disque avec une latitude meridionale de 12 à 13 degrés, le demi-diametre du Soleil étant supposé en avoir 90.

* p. 106. & suiv.

NOus renvoyons entierement aux Memoires

Les Observations de l'Eclipse de Lune & de celle de Soleil de cette année faites par M[rs] de la Hire, Cassini, & Maraldi.

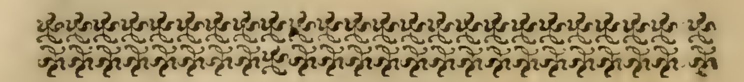
V. les M. p. 169. 172. 175. 195. 196. 198. 215.

L'Observation de la Conjonction de la Lune & d'une des Pleïades par M. Maraldi.

V. les M. 218.

V. les M. p. 223.
L'Ecrit de M. Caſſini le fils ſur la neceſſité de bien centrer les Verres de Lunette.

V. les M. p. 310.
L'Obſervation du paſſage de Jupiter proche d'une Etoile du Scorpion par M. Maraldi.



CATOPTRIQUE.

DES FOYERS PAR REFLEXION

EN GENERAL.

V les M. p. 46. * p. 76. & ſuiv.
L'Article de Dioptrique qui eſt dans l'Hiſt. de 1704* ſur les Foyers par refraction, fait une eſpece de ſimetrie avec celui-ci où l'on conſidere les Foyers par réflexion, & ſi l'on faiſoit un Corps d'Optique, ce dernier devroit marcher avant l'autre, parceque la Catoptrique comme plus ſimple précede la Dioptrique. Ce que M. Guiſnée avoit fait ſur une des deux eſpeces de Foyers, M. Carré l'a fait auſſi ſur l'autre; les deux Theories ſe rapportent également à celle des Cauſtiques expliquée dans l'Hiſt. de 1703*. Il s'agit maintenant de déterminer ſur l'Axe d'un Verre de courbure quelconque quel eſt le point où cet Axe touche la Cauſtique par réflexion, ou, ce qui revient au même, quel eſt le point où les rayons d'un point lumineux qui ſe ſont réfléchis à la rencontre du Verre, & qui en ſe réfléchiſſant ont pris de nouvelles directions, ſe réüniſſent en plus grande quantité que par tout ailleurs.

* p. 69. & ſuiv.

Comme le rapport conſtant des Sinus d'incidence & de refraction eſt le grand principe de la Dioptrique, celui de la Catoptrique eſt l'égalité perpetuelle des angles d'incidence, & de réfléxion. Après cela, il ne reſte à

confiderer que la courbure du Verre, & la direction des rayons incidents. Auffi la Formule générale de M. Carré, qui eft la même que celle de M. de l'Hôpital pour les Cauftiques par refléxion, ne comprend-elle que le Rayon de la Dévelopée d'où dépend la courbure du verre, & la diftance du point lumineux au verre, d'où dépend la direction des rayons incidents. Nous fuppofons ici les idées expliquées dans l'Hift de 1704.

Si l'on ne veut confiderer que des verres fphériques, qui font effectivement les plus ordinaires, le rayon de la Devélopée devient le demi-diametre de la Sphére dont ils font une portion. Prenons d'abord les Miroirs fphériques concaves, dont les réprésentations font les plus furprenantes, & en apparence les plus bifarres. Tantôt l'Image eft au-delà du Miroir, tantôt elle eft en deçà, & quand elle eft en deçà, tantôt elle eft entre le Miroir, & l'Objet, tantôt elle fe confond avec l'Objet même, tantôt elle eft derriere lui. Tout cela dépend de la diftance de l'Objet au Miroir, car on voit par la Formule de M. Carré que felon que cette diftance varie, le lieu du Foyer par reflexion, ou, ce qui eft la même chofe, le lieu de l'Image varie auffi. Nous allons tâcher de rendre fenfible la néceffité de ces phenomenes.

Il faut imaginer que le Miroir concave ait un Axe prolongé à l'infini. Le point où cet axe rencontre la furface du Miroir en eft le *fommet*. Si l'on place d'abord l'Objet ou le point lumineux à ce fommet, & qu'enfuite on le faffe mouvoir vers l'autre extrêmité de l'Axe infiniment éloignée, jufqu'à ce qu'enfin il y foit parvenu, il feroit aifé de prouver, & même on conçoit aifément fans preuve, que le *chemin* de l'Objet étant toûjours de même part, & en un mot *regulier*, le chemin correfpondant de l'Image ne peut être que regulier auffi, c'eft à dire tel que la variation des Ordonnées d'une Courbe, toûjours affujetties à certaines loix. Cela fuppofé, quand j'aurai par la Formule de M. Carré quelques lieux de l'Image, la néceffité de la variation reguliere me donnera tous les

autres ; je trouve qu'il ne m'en faut que deux.

Si je place l'Objet au ſommet du Miroir, ou, ce qui eſt le même, ſi la diſtance de l'objet au Miroir eſt nulle, la Formule donne la diſtance de l'Image au Miroir nulle auſſi, mais negative, ce qui ſignifie que cette Image eſt au-delà du Miroir, & comme appliquée ſur ſa convexité, parcequ'en faiſant le calcul de la Formule on a pris pour poſitives toutes les grandeurs qui étoient du côté de la concavité. Si enſuite j'éloigne l'Objet du Miroir & le place au quart du diametre de la Sphere ; je vois par la Formule le Foyer devenu infini, c'eſt à dire que l'Image eſt infiniment éloignée, & je puis concevoir qu'elle eſt encore au-delà du Miroir, puiſqu'elle a commencé par y être. Voilà les deux lieux ſeuls que j'ai beſoin d'avoir par la Formule, les autres viennent enſuite d'eux-mêmes.

Puiſqu'au chemin fini, & même très-court qu'a fait l'Objet en deçà du Miroir, depuis ſon ſommet juſqu'au quart de ſon diametre, répond un chemin infini de l'Image au delà du Miroir, il faut qu'elle s'en éloigne toûjours plus de ſon côté que l'Objet ne fait du ſien. Cependant il faut remarquer que la progreſſion ſelon laquelle elle s'en éloigne, quoiqu'elle ait un dernier terme infini, ne fait pas de grands *ſauts*, tant qu'elle demeure dans le fini. Ainſi ſi l'on diviſe le quart du diametre de la Sphére en 10 parties égales à compter du ſommet où ſera Zero, & que l'on conçoive l'Objet placé ſucceſſivement ſur chacune de ces diviſions, enſorte que les pas qu'il fera ſeront, 0, 1, 2, 3, &c. juſqu'à 10, les pas correſpondants de l'Image ſeront, 0, $1\frac{1}{9}$, $2\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{7}$, $6\frac{2}{3}$, 10, 15, $23\frac{1}{3}$. 40, 90, l'Infini. Il peut paroître ſurprenant que cette progreſſion qui croît peu ſaute ſi bruſquement de 90. à l'infini, mais tout autre nombre, quelque prodigieux qu'il fût, n'auroit pas plus de rapport à l'infini que 90. De plus ſi le dernier pas de l'Objet qui eſt depuis 9 juſqu'à 10 eſt encore diviſé en 10 parties égales qu'il parcourra ſucceſſivement, & qui ſeront $9\frac{1}{10}$, $9\frac{2}{10}$, &c. on

trouvera pour les pas correſpondants de l'Image des nombres plus grands que 90, & toûjours croiſſants, & ce ſeroit encore la même choſe ſi l'on diviſoit en 10 le dernier pas de l'Objet, qui ſera depuis 9 $\frac{9}{10}$ juſqu'à 10 & ainſi à l'Infini, de ſorte que tandis que l'Objet ira de 9 à 10, les pas de l'Image ſeront une infinité de nombres toûjours croiſſants, & à de très petits pas de l'Objet, il en répondra de très-grands de l'Image.

Si du quart du diametre de la Sphére je continuë à mouvoir l'Objet vers le centre, quel doit être le chemin de l'Image? Il eſt clair qu'elle ne doit pas revenir ſur ſes pas puiſque l'Objet ne revient pas ſur les ſiens, & qu'au contraire il pourſuit ſon chemin vers un même côté. Mais comment pourſuivra-t-elle le ſien après être arrivée à une diſtance infinie? Il eſt impoſſible qu'elle aille au delà. Voici le dénouëment de la difficulté, il eſt tiré des myſteres de l'Infini, ſubtils, ſi l'on veut & delicats, mais cependant ſûrs & invariables. Comme Zero eſt le terme commun des grandeurs poſitives décroiſſantes, & des negatives croiſſantes, ou réciproquement, de ſorte qu'il lie enſemble ces deux Suites & les rend continuës, de même l'Infini eſt le terme commun qui lie les Suites poſitives croiſſantes, & les negatives décroiſſantes; ou réciproquement, & par ſon moyen les unes ſont la continuation des autres. On doit ſe ſouvenir que le chemin de l'Image étoit negatif; donc pour le continuer, étant arrivée à l'Infini, elle n'a qu'à le changer en poſitif, c'eſt à dire qu'au lieu qu'elle étoit au-delà du Miroir, il faut maintenant qu'elle ſoit en deçà, & qu'elle a paſſé du derriere du Miroir au devant. L'Infini eſt tellement par ſa nature le terme commun du poſitif & du negatif, qu'après qu'on a trouvé les 9 nombres 1 $\frac{1}{9}$ &c. 90, tous negatifs, on ne trouve point que l'Infini le ſoit, quoiqu'il apartienne à la même progreſſion; c'eſt qu'il apartient en même temps à une autre qui eſt poſitive, & à proprement parler il n'a point de ſigne non plus que Zero. Ainſi l'Image infiniment éloignée du Miroir n'eſt pro-

prement ni au delà ni en deçà. Elle n'a point de lieu.

L'Objet étant au centre de la Sphére, il eſt évident que l'image y eſt auſſi, car tous les rayons que l'Objet envoye alors au Miroir lui étant perpendiculaires, ils ne peuvent ſe reflèchir que ſur eux-mêmes, & delà vient qu'un Oeil placé au centre d'un Miroir concave ne voit que lui-même dans tout le Miroir. Donc tandis que l'Objet s'eſt mû depuis le quart du diametre de la Sphére juſqu'au centre, l'Image a fait le chemin infini qui eſt depuis l'extremité de l'Axe infiniment prolongé juſqu'au centre, & pendant ce mouvement de l'Objet l'Image étoit toûjours derriere lui, & alloit à ſa rencontre. Elle paroit alors ſuſpenduë en l'air.

Pour trouver la progreſſion ſelon laquelle l'Image fait ce ſecond chemin infini, il ne faut que continuer la diviſion du quart de diametre juſqu'au centre, & par conſéquent compter 10, 11, &c. juſqu'à 20. Ce ſeront-là 10. nouveaux pas de l'Objet. Ceux qui leur répondront dans le chemin de l'Image ſeront, l'infini, 110, 60, $43\frac{1}{3}$, 35, 30, $26\frac{2}{3}$, $24\frac{2}{7}$, $22\frac{1}{2}$, $21\frac{1}{9}$, 20. Quand l'Image eſt à 20 elle eſt au centre. On entend aſſés que toutes ces parties dont les unités ſont égales à celles de la diviſion du demi-diametre ſe comptent ainſi que ces diviſions depuis le ſommet du Miroir ſur l'axe prolongé.

Il eſt viſible que cette ſeconde progreſſion eſt la même que la premiere renverſée, & dont chaque terme ſeroit augmenté de 20 parcequ'ici 20 tient lieu du Zero de la premiere, & que le ſecond chemin infini de l'Image ſe termine à 20, comme le premier commençoit à Zero. Dans le premier l'Image s'éloigne peu d'abord du terme d'où elle part & dans le ſecond elle s'approche ſur la fin à petits pas du terme où elle doit arriver, & c'eſt de la même quantité de part & d'autre, &c.

Si l'on préſente une Epée à un Miroir concave, de ſorte qu'elle ſoit dans l'axe du Miroir, & ſa pointe entre le quart du diametre & le centre, il faut donc, puiſque l'Image eſt alors derriere l'Objet, & plus éloignée que

lui du Miroir, que l'on voye l'image de cette pointe en l'air s'élancer hors du Miroir vers l'œil de celui qui tient l'Epée, comme si la veritable Epée s'étoit retournée d'elle-même pour se mettre dans une position contraire à celle où on la tenoit. Plus la pointe de l'Epée sera près du quart du diametre, plus son image s'élancera loin du Miroir.

Puisque l'Objet & l'Image se rencontrent au centre, il faut qu'ils se séparent si l'Objet en sort. Faisons-lui continuer le chemin qu'il a commencé vers l'extrémité de l'Axe, l'Image continuëra aussi celui qu'elle a commencé vers le Miroir, c'est à dire qu'alors elle sera entre le Miroir, & l'Objet, toûjours suspenduë en l'air.

Lorsqu'en s'approchant toûjours du Miroir, elle sera arrivée au quart du diametre, l'Objet doit être à l'extremité de l'Axe infiniment éloignée, car quand il étoit à ce même quart du diametre, l'Image étoit à cette même distance infinie, or l'Objet ou point lumineux, & l'Image ou le Foyer, sont deux points *réciproques*, comme nous avons dit dans l'Hist. de 1704 *. L'Objet arrivé à l'extrémité de l'Axe infiniment éloignée ne peut plus faire de mouvement, donc l'Image n'en peut plus faire non plus, & elle ne peut jamais être entre le quart du diametre, & le Miroir.

* pag. 87.

Il ne sera peut-être pas hors de propos de remarquer ici, que quand on parle absolument du Foyer d'un Miroir concave, on entend celui qui se fait au quart du diametre, & qui répond à la distance infinie de l'Objet, ou, ce qui revient au même, qui est formé par des rayons d'un même point si éloigné qu'ils sont censés paralleles. Tels sont ceux d'un point quelconque du Soleil. La nature de la Caustique faite de ces rayons refléchis fait voir que s'il tombent sur une demi-Sphére concave parallelement à son axe, ils occupent après la refléxion un espace presque égal à la demi-Sphére sur laquelle ils sont tombés, que cependant ils sont beaucoup plus serrés vers l'axe qu'ils ne l'étoient auparavant, & qu'ils occupent sur

la Cauſtique une eſpace beaucoup moindre que l'eſpace correſpondant de la demi-Sphére ſur lequel ils ſont tombés, que par conſéquent ſi l'on veut avoir un Foyer brûlant, il ne faut prendre de toute la demi-Sphére qu'un certain eſpace autour de ſon axe, & que le Foyer correſpondant à cet eſpace eſt fort éloigné d'être geometriquement un point, quoiqu'on le puiſſe prendre phyſiquement pour en être un, & qu'il croît ſelon la même proportion que la Sphére eſt plus grande, ou, ce qui revient au même, ſelon qu'il eſt lui-même à une plus grande diſtance du Miroir, d'où il ſuit que ſa force de brûler diminuë à meſure que cette diſtance augmente. Cela revient en partie à ce qui a été dit ſur les Foyers par refraction dans l'Hiſt. de 1700*. Celle de 1704 en traitant de ces mêmes Foyers a aſſés fait entendre comment ce qui eſt concave devient plan ou convexe dans une même formule. Ainſi celle de M. Carré qui nous a donné juſqu'ici les proprietés des Miroirs concaves, doit s'étendre également aux Miroirs plans ou convexes.

* pag. 128. & 129.

On y voit d'abord pour ceux qui ſont plans que la diſtance de l'Image au Miroir eſt égale à celle de l'Objet, mais negative, c'eſt à dire que l'Objet eſt vû autant au-delà du Miroir qu'il eſt en deçà. De cette proprieté très-connuë s'enſuivent un grand nombre d'autres qui ne le ſont gueres moins.

Quant aux Miroirs convexes, l'Image eſt toujours au-delà. Si la diſtances de l'Objet au Miroir eſt nulle, celle de l'Image l'eſt auſſi. Si l'Objet eſt infiniment éloigné, l'Image eſt au quart du diametre de la Sphére dont le Miroir eſt portion, & il eſt viſible qu'elle ne peut jamais être plus loin, ni même être ſi loin réellement. En diviſant toûjours le demi-diametre de la Sphére en 20. à compter du ſommet du Miroir, le chemin de l'Objet ſera cette progreſſion déja trouvée pour les Miroirs concaves, l'Infini, 90, 40, &c. & celui de l'Image, 10, 9, 8, &c.

Après avoir conſideré les rapports de diſtance que

l'Objet & l'Image ont aux trois differentes eſpeces de Miroirs, il reſte à conſiderer leurs rapports de grandeur.

Dans un Miroir plan, l'Image eſt égale à l'Objet, par ce qu'elle eſt vûë autant au-delà du Miroir que l'Objet eſt en deçà. On ſe peut convaincre de cette raiſon de l'égalité de l'Image par une expérience tres facile. Que l'on ſe regarde dans une Glace, & que l'on y poſe un fil qui aille depuis le point où l'on voit le haut du front juſqu'à celui où l'on voit le bas du menton, on trouvera que ce fil n'a que la moitié juſte de la longueur du viſage. Or il marque préciſément la grandeur dont eſt l'Image priſe ſur la Glace, donc elle n'y eſt que la moitié de l'Objet, & ſi elle eſt vûë égale à l'Objet ou une fois plus grande que ſur la Glace, c'eſt qu'elle eſt vûë & rapportée une fois plus loin que la Glace, ou, ce qui revient au même, à une diſtance de la Glace égale à celle de l'Objet. On pourroit donc prendre pour principe, & M. Carré le démontre géométriquement, que la grandeur de l'Objet & celle de l'Image ſont entre elles comme leurs diſtances au Miroir. On entend ici que ces grandeurs ne ſoient priſes que pour des lignes, car ſi on les prenoit pour des ſurfaces, il eſt évident qu'elles ſeroient comme les quarrés des diſtances.

Cela poſé, nous avons les grandeurs de l'Image tant dans les Miroirs concaves, que dans les convexes, puiſque nous avons ſes diſtances au Miroir comparées à celles de l'Objet. Par exemple, le premier chemin que nous avons fait faire à un Objet placé devant un Miroir concave étant 0, 1, 2, &c. juſqu'à 10, & celui de l'Image au delà du Miroir étant 0, 1 $\frac{1}{9}$, 2 $\frac{1}{2}$, &c. juſqu'à l'Infini, les rapports de 0 à 0, de 1 à 1 $\frac{1}{9}$, de 2 à 2 $\frac{1}{2}$, &c. qui ſont ceux des diſtances, ſeront auſſi ceux des grandeurs de l'Objet & de l'Image. Or on trouvera par un calcul très-aiſé que ces rapports ſont $\frac{10}{10}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{8}{10}$, &c. juſqu'à $\frac{1}{10}$, de ſorte que le dénominateur étant toûjours 10, les numerateurs ſuivront la progreſſion des nombres naturels, d'où il ſuit

que la grandeur de l'Objet ſera d'abord à celle de l'Image comme 10 à 10, c'eſt à dire égale, enſuite comme 9 à 10, &c. enfin comme 1 à 10, ou, ce qui eſt la même choſe, que l'Objet étant pris pour 1 la grandeur de l'Image ſera 1, 2, 3, &c. juſqu'à 10, après quoi elle ſera infinie. Cette augmentation de l'Image, remarquable par ſon extrême ſimplicité, l'eſt encore davantage en ce qu'elle ſuit, non les diſtances de l'Image même dans le Miroir, mais celles de l'Objet hors du Miroir, qui ſont auſſi 1, 2, 3, &c. Ce qui a été dit cy-deſſus fait aſſés entendre que l'augmentation finie de l'Image n'eſt bornée à 10, que quand on fait paſſer l'Objet immediatement de 9 ſur 10, mais que ſi on le fait paſſer par toutes les diviſions infinies dont cet intervalle fini eſt capable, l'Image augmentera au deſſus de 10 ſelon une infinité de nombres differents. Cela explique en même temps les diminutions de l'Image dans les Miroirs concaves, puiſqu'elles ne ſont que cette même augmentation renverſée.

Dans les Miroirs convexes, où l'Image eſt toûjours plus petite que l'Objet, à moins qu'il ne ſoit au ſommet du Miroir, elle a les mêmes diminutions que dans les Miroirs concaves. Elle eſt infiniment petite quand elle eſt au quart du diametre, l'Objet étant alors infiniment éloigné, mais comme il ne peut l'être réellement, une Image infiniment petite n'exiſte point. Seulement on peut prendre pour telle phyſiquement celle du Soleil dans un Miroir convexe, auſſi n'y eſt-elle qu'un point. Il ſembleroit au contraire qu'une Image infiniment grande devroit exiſter, parcequ'elle dépend d'une poſition de l'Objet très-poſſible, mais ſa grandeur infinie la rend auſſi infiniment confuſe, & fait qu'elle n'eſt plus une Image. La Nature n'eſt pas obligée à exécuter réellement toutes les idées abſtraites de la Géometrie

DIOPTRIQUE



DIOPTRIQUE.

SUR LES REFRACTIONS

D'UNE ESPECE DE TALC.

SI l'on vouloit donner aux Philoſophes une grande défiance des principes qu'ils recoivent le plus généralement, l'exemple du Criſtal d'Iſlande y ſeroit fort propre. Après avoir bien connu les Refractions qui ſe font dans l'Eau & dans le Verre, ils étoient en droit de croire que celles de tous les autres corps tranſparents, étoient en général de la même nature, & ne differoient que par les differentes proportions des Sinus d'incidence & de refraction, dépendantes de la differente denſité des corps. Cependant en 1670 parut pour la prémiere fois à leur grand étonnement dans un livre d'Eraſme Bartholin ſçavant Danois, le Criſtal d'Iſlande, qui renverſoit les Regles établies, ou plutôt en faiſoit naître de nouvelles, tout à fait imprévûës.

V. les M. p. 341.

Ce Criſtal eſt toûjours naturellement formé en parallelepipede non rectangle, & par conſéquent ſes 6 faces ſont des parallelogrammes non rectangles auſſi. M. de la Hire donne la meſure de tous ſes angles aigus & obtus, plans & ſolides, ce qu'il eſt aſſés difficile de déterminer avec préciſion. Ce Criſtal eſt plus proprement un Talc puiſqu'il ſe fend aiſément en tous ſens, mais toûjours parallelement à quelqu'une de ſes 6 faces. Delà il ſuit que tous les fragmens de cette Pierre ſont des parallelepipedes, qui ont les mêmes angles qu'avoit la Pierre entiere, & ſemblablement poſés.

Un Rayon qui tombe ſur une ſurface de ce Talc, s'y partage en deux, ce qui fait paroître doubles les Objets qu'on regarde au travers, ſur-tout ceux qui ſont tout contre. Les deux nouveaux rayons formés du premier ont chacun une refraction differente. Dans l'Eau & dans le Verre, l'angle d'incidence, d'où dépend celui de refraction, ſe prend par rapport à une perpendiculaire tirée ſur la ſurface du Diaphane au point où le rayon tombe. Ici, il faut conſiderer pour le même rayon deux angles d'incidence, l'un qui ſe prend, comme nous venons de le dire, par rapport à une perpendiculaire, l'autre par rapport à une autre ligne aſſés inclinée à la même ſurface du Criſtal. A ces deux angles d'incidence repondent deux refractions. La premiere peut être nommée *reguliere*, la ſeconde *irreguliere*. Elles different non-ſeulement en ce qu'elles dépendent de deux differens angles d'incidence, mais encore en ce que les Sinus de leurs angles d'incidence & de refraction ſuivent differentes proportions. Dans la reguliere, ils ſont comme 5 à 3, dans l'irreguliere, comme $4\frac{1}{2}$ à 3, or $\frac{5}{3}$ étant plus grand que $\frac{3}{2}$ qui eſt la refraction du Verre, & $4\frac{1}{2}$ à 3, ou $\frac{9}{6}$ étant égal à $\frac{3}{2}$ la refraction reguliere du Criſtal d'Iſlande, quoique ce ſoit une pierre fort tendre, eſt plus grande que celle du Verre, & l'irreguliere lui eſt égale.

Puiſqu'une certaine ligne inclinée à la ſurface du Criſtal regle l'angle d'incidence dans la refraction irreguliere, il eſt naturel qu'un rayon qui tombera ſelon la direction de cette ligne n'ait point de refraction irreguliere, & paſſe tout droit à cet égard, mais ſouffre ſeulement la refraction reguliere. C'eſt auſſi ce qui arrive, car il eſt dans le même cas où eſt le rayon perpendiculaire dans la refraction ordinaire & commune. Et puiſque les deux refractions ſont inégales, il faut que la plus forte éleve davantage l'Objet, & c'eſt effectivement ce que fait la reguliere. Monſieur de la Hire a déterminé par des obſervations fort délicates quelle eſt & la ligne qui regle la refraction irreguliere, & celle où ſe voïent les deux Images d'un même objet.

Le Criſtal d'Iſlande a encore d'autre phenomenes ſinguliers. Quand les rayons tombent d'un certain ſens, ils ſortent par la refraction du plan perpendiculaire où ils étoient en tombant, & s'en détournent à droite ou à gauche, ce qui n'arrive jamais dans les refractions communes. Si l'on met deux morceaux de ce Criſtal l'un ſur l'autre, ſéparés ou non par quelque intervalle, on voit ſelon la maniere dont ils ſont poſés, que tantôt les deux rayons venus d'un ſeul ſe repartagent chacun en deux en paſſant du criſtal ſuperieur dans l'inferieur, tantôt ils ne ſe repartagent point, mais que dans ce ſecond cas quelquefois chacun fait dans le criſtal inferieur la même refraction qu'il a déja faite dans le ſuperieur, quelquefois ils échangent leurs refractions enſemble. On diroit que la Nature a eu peur que cette pierre tranſparente ne fût pas une Enigme aſſés inexplicable pour les Phyſiciens, & qu'elle l'a chargée à plaiſir d'obſcurités, & de difficultés.

Cependant M. Huguens entreprit de penetrer ce myſtere du moins en partie, dans ſon Traité *de la Lumiere* imprimé en 1690. Il ſuppoſe que la Lumiere ſe répand par ondes comme le Son, ce que nous n'expliquerons pas ici plus en détail. Il prétend qu'un corps peut être tranſparent en deux manieres, ou parceque les intervalles que laiſſent entre elles ſes parties ſont remplies de matiere étherée dans laquelle les ondes *lumineuſes* ſe continuënt, ou parceque ſes parties ſolides étant dures & à reſſort, elles prennent elles-mêmes le mouvement d'ondulation, auſſi-bien que la matiere étherée. De laquelle de ces deux manieres qu'un Corps ſoit tranſparent, il eſt aiſé de concevoir que l'ondulation en paſſant de l'air dans ce Corps doit ſe ralentir, ce qui rend le Sinus de refraction plus petit que celui d'incidence ; mais ſi le Corps eſt tranſparent de la ſeconde maniere, l'ondulation doit ſe ralentir plus que s'il l'étoit de l'autre, & rendre le Sinus de refraction plus petit par rapport à celui d'incidence ; la raiſon en eſt aſſés viſible.

Si un Corps étoit tranſparent des deux manieres tout à la fois, il s'y feroit donc auſſi tout à la fois deux refractions differentes du même rayon, & le même Objet y feroit vû double, & c'eſt ce que M. Huguens avoit obſervé avec ſoin dans le Criſtal commun, qui par-là ne peut ſervir aux Lunettes d'approche, auſquelles il feroit d'ailleurs ſi propre par la netteté de ſa tranſparence.

Cette double émanation d'Ondes obſervée dans le Criſtal commun étoit déja un degré pour arriver à un Siſtême ſur le Criſtal d'Iſlande. Mais les deux Ondulations du Criſtal commun ne pouvoient être que circulaires, l'une ſeulement un peu plus lente que l'autre, ce qui produiſoit deux refractions differentes à la verité, mais regulieres toutes deux. Il falloit pour l'irreguliere du Criſtal d'Iſlande quelque choſe de nouveau & de plus ſingulier, & M. Huguens s'aviſa de la faire dépendre d'Ondes elliptiques, differentes par leur eſpece & par leur nature des Ondes circulaires, d'où la refraction reguliere dépendoit. Cette idée réüſſit à ſon inventeur ſur une grande partie des phenomenes.

Il n'étoit pas moins difficile de juſtifier cette heureuſe ſuppoſition, qu'il l'avoit été de l'imaginer. Sans doute il n'y a que la figure & l'arrangement des parties inſenſibles du Criſtal d'Iſlande, qui puiſſe déterminer les ondulations naturellement circulaires à ſe changer en elliptiques, mais comment aller juſqu'à une recherche ſi délicate? Il nous ſuffit préſentement que l'on entrevoye que les Ondes ſuppoſées, le tiſſu interieur du corps diaphane en peut changer l'eſpece; ou qu'enfin dans tout autre Siſtême de la Lumiere il peut produire des refractions fort differentes de la commune.

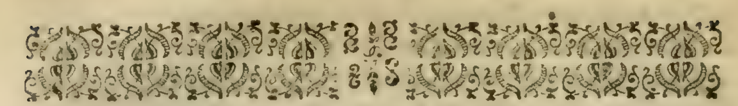
Auſſi dans une autre eſpece de Talc, qu'on trouve auprès de Paris au-deſſus des bancs de pierre de Plâtre, & qui a quelque rapport à celui d'Iſlande, M. de la Hire a-t-il cherché fort curieuſement en l'obſervant quelle pouvoit être la figure & la diſpoſition de ſes parties *elémentaires*. Il a trouvé que chacune des lames qui le com-

posent étoit un assemblage de petits triangles, dont les angles sont toûjours de 50, 60 & 70 dégrés, particularité fort singuliere. Il seroit inutile que nous fissions une plus ample description de cette Pierre, après celle que M. de la Hire en a faite.

De quelque sens qu'on la prenne, ses refractions sont $\frac{10}{7}$, ce qui est à fort peu près $\frac{3}{2}$, refraction du Verre, & refraction irreguliere du Cristal d'Islande. L'Objet n'y est doublé qu'imparfaitement, & ce n'est même que quand on le pose sur de certaines fentes ou fêlures qui sont aux côtés.

M. de la Hire promet l'explication de ces phenomenes aussi bien que de ceux du Cristal d'Islande. Il ne seroit peut-être pas aisé de décider laquelle de ces deux especes de Talc doit mener à la connoissance de l'autre. Il est vrai que celui d'Islande est de beaucoup le plus compliqué, mais sa double refraction aussi sensible & aussi bien marquée qu'elle est, doit être un grand principe pour tout ce qu'il y aura d'approchant dans les autres Diaphanes. Quelquefois un sujet plus composé expose dans une plus grande étenduë, & met mieux au jour ce que le simple envelopoit, & cachoit dans sa simplicité même.





MECHANIQUE.

SUR LA RESISTANCE
DES SOLIDES.

LA Theorie de M. Parent ſur la réſiſtance des Poutres expoſée dans l'Hiſt. de 1708 * ceſſe d'être auſſi particuliere qu'elle étoit, & s'éleve préſentement à cette univerſalité dont toute la Géometrie moderne ſe pique. Il s'agit donc maintenant de la Réſiſtance des Solides en général, matiere déja traitée à fond par M. Varignon *, mais qui ne laiſſera pas de prendre une face nouvelle.

V. les M. p. 177.

* p. 116. & ſuiv.

* V. l'Hiſt. de 1702. p. 102 & ſuiv.

Nous avons prouvé en 1708 d'après M. Parent que dans une Poutre poſée horizontalement & retenuë fixement par un bout, la réſiſtance de ſa baſe à être rompuë, & par conſéquent la réſiſtance totale de la Poutre, eſt le produit du quarré de la hauteur de cette baſe par ſa longueur. Cette idée n'eſt pas bornée aux Poutres ſeules, car ſi l'on conſidere dans un Solide quelconque ſa réſiſtance à être rompu dans toutes les *tranches* paralleles à la baſe, qui ſont elles-mêmes comme autant de baſes, il eſt viſible que cette réſiſtance ſera exprimée en général & indéterminément par le même produit, pourvû que toutes ces tranches ſoient ſemblables entre elles, comme le ſeront, par éxemple, toutes celles d'un Cône ou d'un Conoïde, ou du moins qu'elles ſoient proportionnelles, c'eſt à dire que l'axe particulier de chaque tranche étant diviſé en un nombre égal de parties égales, les Ordonnées correſpondantes ſoient en même raiſon. Ainſi ſi un Solide étoit tel & tellement poſé que

ſon plan vertical fût le plan d'une certaine Courbe, & ſon plan horizontal celui d'une autre, & que toutes deux euſſent pour axe commun ſa longueur horizontale, la hauteur d'une de ſes baſes quelconques ſeroit une Ordonnée de la 1ere Courbe, la largeur l'Ordonnée correſpondante de la 2de, & ſa réſiſtance indéterminée, le produit du quarré de la 1ere Ordonnée par la 2de. Il paroît d'abord que ſi l'on change ce même ſolide de poſition, & que ſon plan vertical devienne l'horiſontal, ſa réſiſtance changera, comme nous l'avons dit d'une Poutre quadrangulaire poſée ſur le chan, ou ſur le plat, & cela par la même raiſon. Mais il n'y aura nul changement, ſi les deux plans du ſolide appartiennent à la même Courbe, ou ce qui revient au même, s'il eſt formé par une révolution circulaire d'une Courbe autour de ſon axe, ce qu'on peut appeller en général un *Conoïde.*

La réſiſtance du Solide étant trouvée, il faut trouver auſſi la puiſſance qui agit contre elle. C'eſt ou le poids même du Solide, ou un poids étranger, l'un & l'autre agiſſant par un bras de levier d'une certaine longueur, ou géometriquement parlant, multiplié par ce bras.

Ces deux produits, dont l'un exprime l'action du poids qui tend à rompre le Solide, & l'autre ſa réſiſtance à être rompu, ont un certain rapport. Si la figure du Corps eſt telle que ce rapport y ſoit toûjours le même dans toutes ſes parties, elles ſeront toutes également tirées, & également tenduës par le poids, & ſi le Corps rompt, toutes ſes baſes qui ſont en nombre infini doivent ſe ſéparer les unes des autres en même temps, ce qui n'eſt qu'une idée géometrique ou metaphyſique, car réellement & phyſiquement il y aura toûjours quelque baſe plus foible où ſe fera la fraction. On dit que ce Corps eſt *d'égale réſiſtance.* Mais ſi le rapport des deux produits eſt tel en quelque endroit que l'action du poids y ſurpaſſe la réſiſtance plus que partout ailleurs, le Corps y rompra: & ce ſera dans cette baſe ſeule que ſe fera la ſéparation. Dans le premier cas le rapport des deux pro-

duits eſt donc toûjours égal à une quantité conſtante, dans le ſecond il devient *un plus grand*, & ce plus grand ſe trouve par les Methodes ordinaires. Comme il eſt poſſible que dans une Courbe il y ait pluſieurs *plus grands*, de même il peut y avoir dans un même Solide pluſieurs endroits où il rompe par le même poids, ou pluſieurs baſes de fraction.

Il n'y a de difficulté qu'à exprimer le produit qui repreſente l'action du poids, & voici d'où elle vient. Si un Solide arrêté par un bout dans un Mur, & tiré ſeulement par ſon propre poids; rompoit toûjours, comme un Cilindre, par ſon bout arrêté, le produit dont il s'agit ſeroit toûjours, le poids de ce Corps multiplié par la diſtance de ſon centre de gravité au Mur où eſt la baſe de fraction. Mais le Solide peut aiſément être de telle figure qu'il rompra par un autre endroit, par exemple, à la baſe qui ſera au tiers de ſon axe à compter depuis le Mur. Alors ce ſont ſeulement les deux tiers de ce Corps pris ſur ſon axe qui ont agi, c'eſt à dire le poids de ces deux tiers multiplié par la diſtance de leur centre de gravité à la baſe de fraction. Le poids de la partie *agiſſante* & ſon levier varient donc ſelon la figure des Corps, & il faut les traiter dans le calcul comme des quantités variables.

En effet lorſqu'un Solide n'eſt tiré que par ſon propre poids, il en faut conſiderer chaque baſe infiniment peu épaiſſe comme un poids qui le tire, or dans la Theorie générale toutes ces baſes ſont inégales entre elles, puiſqu'elles ſont formées par des Ordonnées de Courbes, & par conſéquent M. Parent conſidere un Corps tiré par ſon propre poids, comme s'il l'étoit par des puiſſances variables. Ce poids ſeroit une puiſſance conſtante, ſi l'on ſçavoit en quel endroit ce Corps doit rompre, car ce ſeroit le poids de la partie agiſſante, mais c'eſt ce qu'on ne ſçait pas, & ce qui varie ſelon les figures.

De même ſi un Solide, par exemple, une Piramide ou un Cône, eſt expoſé à l'action du Vent, le Vent eſt une puiſſance

puissance variable, parcequ'il fait d'autant plus d'impression sur les parties inégales de la surface de ce Corps, qu'elles sont plus grandes.

Enfin dans la Theorie générale un Corps n'est proprement tiré par une puissance constante, que quand on fait abstraction de son propre poids, & qu'on lui attache un poids étranger connu. Si on vouloit considerer les deux poids, ce seroit un mêlange d'une puissance constante, & d'une variable.

Dans l'hipothese d'un Corps sans pésanteur tiré par un poids étranger, il peut arriver que le Corps n'ait aucune base de fraction. Car si l'on conçoit le poids attaché justement à la base qui par elle même est la moins résistante, il n'aura aucun levier à son égard, & par conséquent aucune action contre elle, & il peut d'ailleurs être tellement placé qu'il n'ait qu'un trop petit levier à l'égard des autres qui sont plus résistantes. Ainsi ce poids qui étoit capable de rompre le Corps, s'il eût été autrement placé, ne le rompra point. Ce seroit la même chose, si le poids n'avoit qu'un trop petit levier à l'égard de la base la moins résistante, & ensuite à l'égard des autres. Ce cas n'a point de lieu pour les Corps tirés seulement par leur propre poids, parceque ce poids qu'on suppose assés grand pour les rompre ne peut être placé ailleurs que dans le centre de gravité soit du tout, soit de la partie agissante.

Toutes ces idées supposées, M. Parent arrive par le calcul à deux Theorêmes fort remarquables. 1°. Un Corps tiré par une puissance variable est d'égale résistance, si les infiniment petits d'infiniment petits ou les differences secondes des résistances de ses bases sont par tout en même raison que les puissances rompantes appliquées à ses bases, c'est à dire en même raison que ces bases mêmes, lorsque le Corps n'est tiré que par son propre poids. 2°. Si le Corps rompt en quelque endroit, qui est par conséquent sa base de fraction, le levier par lequel la puissance ou les puissances rompantes ont agi est

égal au produit des deux Soûtangentes de la hauteur & de la largeur de cette bases de fraction, divisé par la Soûtangente de la hauteur, plus deux fois la Soûtangente de la largeur.

Il suit du 1er Theorême qu'il y a une infinité de Corps d'égale résistance, quoiqu'on n'en ait jusqu'ici découvert qu'un assés petit nombre. Car si un Corps est terminé d'un côté par un plan vertical d'une Courbe, & de l'autre par un plan horizontal d'une autre Courbe, toutes deux encore indéterminées, il est clair que dés qu'on en aura déterminé l'une à être, par exemple, une Parabole, l'autre se déterminera necessairement ensuite par la proprieté essentiele qui apartient à l'égale résistance. Or la premiere détermination étant entierement libre, il naîtra une infinité de figures differentes. Si le Corps étoit un Conoïde, cette reflexion n'auroit point de lieu, parcequ'il ne seroit formé que d'une seule Courbe.

Il suit du 2d Theorême que si un Corps est de telle figure que la quantité tirée des Soûtangentes de chaque base soit toûjours égale au levier par lequel les puissances rompantes ont dû agir à l'égard de cette base, ce Corps est d'égale résistance, puisque, s'il rompt, il doit rompre également par tout. Hors delà, il peut avoir une base de fraction.

C'est cette base qu'il s'agit maintenant de déterminer, & qui donne lieu à plusieurs considerations selon les differentes circonstances. M. Parent n'envisage ici que les plus simples d'où il passera aux autres. Il supose les Solides sans pesanteur, tirés seulement par un poids constant attaché à leur sommet, de sorte que le levier de ce poids est toûjours la distance du sommet à la base de fraction. Cette distance indéterminée & inconnuë devant être toûjours égale à la quantité tirée des Soûtangentes de la base de fraction, elle deviendra déterminée & connuë par les grandeurs constantes & connuës de l'expression des Soûtangentes.

Si un corps est un Conoïde, les deux Soûtangentes d'u-

ne base quelconque étant toûjours égales, il saute aux yeux que la quantité tirée des Soûtangentes sera toûjours le tiers d'une Soûtangente quelconque. Si le levier indéterminé, par lequel agit le poids attaché au sommet, est toûjours le tiers de la Soûtangente de chaque base, ce Conoïde est visiblement d'égale résistance. Tel est celui qui est formé par la révolution d'une 1ere Parabole Cubique autour de son axe, car dans cette Courbe une Abscisse quelconque est toûjours le tiers de la Soûtangente correspondante, or le levier indéterminé du poids attaché au sommet est une Abscisse. Si le Conoïde étoit formé par la révolution d'une Parabole ordinaire autour de son axe, comme dans cette Parabole une Abscisse quelconque est toûjours la moitié de la Soûtangente correspondante, on trouveroit que le levier indéterminé du poids devroit être égal aux deux tiers de lui-même, ce qui est absurde, & par conséquent ce Conoïde n'a point de base de fraction, le poids étant placé comme il l'est. Il faudra afin que quelque autre Conoïde en ait une, qu'il ait quelque Soûtangente triple de son Abscisse.

Si l'on considere des Corps qui ne soient point des Conoïdes, mais dont une face soit un parallelogramme, & les autres formées par des Courbes, à peu près comme sont les Consoles, il faut observer que les Ordonnées des Parallelogrammes sont des lignes toutes égales, dont les Soûtangentes sont infinies, ou les côtés mêmes des parallelogrammes prolongés à l'infini, Ainsi dans la quantité tirée des deux Soûtangentes, il y a une Soûtangente qui devient infinie, & qui aneantit l'autre. Si le Corps est tellement posé que ce soit la Soûtangente de la largeur de la base qui devienne infinie, ou ce qui est la même chose, si sa face qui est un parallelogramme est horizontale, auquel cas le corps est posé de chan, la quantité tirée des Soûtangentes sera la moitié de la Soûtangente de la hauteur, & un Corps ou cette moitié sera toûjours égale à l'Abcisse, sera d'égale résistance étant posé de chan, & tiré par un poids attaché à son sommet; telle

feroit une efpece de Confole dont les deux plans verticaux feroient des Paraboles ordinaires. Si ce même Corps eft pofé fur le plat, auquel cas fa face qui eft un parallelogramme eft verticale, & la Soûtangente de fa hauteur eft infinie, la quantité tirée des Soûtangentes n'eft que la Soûtangente même de fa largeur. Or ce n'eft que dans un Triangle dont on confiderera toutes les bafes paralleles comme autant d'Ordonnées, que l'on peut trouver des Soûtangentes toûjours égales à leurs Abfciffes, & delà il eft aifé de former la figure du Corps qui pofé fur le plat & tiré à fon fommet par un poids fera par tout d'égale réfiftance. Toutes fes faces ne feront que des triangles & des parallélogrammes.

Si au lieu de fuppofer toûjours un Corps fans pefanteur, & de lui attacher un poids à fon fommet, on le confidere comme devant rompre par fon propre poids, qui eft une puiffance variable, il eft aifé de voir par ce qui a été dit, que le levier indéterminé ne fera plus une Abfciffe, mais feulement la diftance du centre de gravité de la partie agiffante à la bafe de fraction & il faudra que cette diftance foit égale en quelque endroit ou en plufieurs à la quantité tirée des Soûtangentes, s'il doit rompre en un endroit feulement ou en plufieurs, ou égale par tout, s'il doit rompre également par tout ou être d'égale réfiftance. Pour cette recherche, il faut avoir par les Méthodes ordinaires les Centres de gravité du Corps & de fes portions quelconques.

C'eft la même chofe fi un Corps eft expofé à l'action du Vent, ou de quelque autre puiffance variable, pourvû que l'on ait égard à la maniere dont cette action s'y applique. Lorfqu'elle varie comme les bafes du Corps, elle ne fait que le même effet que fa propre pefanteur.

Toutes les fois que M. Parent trouve par fon Theorême des Soûtangentes qu'un Corps eft d'égale réfiftance à l'égard d'une puiffance variable, il lui confirme cette propriété par fon 1[er] Theorême, c'eft à dire qu'il fait voir que les differences fecondes des refiftances de fes bafes

ſont par tout comme les puiſſances rompantes. Ainſi une Conſole poſée ſur le plat, ayant ſon plan horiſontal ſuperieur & l'inferieur formés par deux plans égaux de Logarithmique, & tirée ſeulement par ſa propre peſanteur, ſera par tout d'égale réſiſtance; car d'un côté les puiſſances rompantes qui ſont les baſes ne ſont dans cette poſition que comme les largeurs de ces baſes, ou comme les Ordonnées de la Logarithmique, puiſque toutes les hauteurs qui apartiennent à un parallelogramme ſont égales, & d'un autre côté les réſiſtances des baſes ne ſont par la même raiſon que comme leurs largeurs ou les mêmes Ordonnées de Logarithmiques, dont par la proprieté eſſentielle de cette Courbe les differences 1eres, 2des, &c. à l'infini, ſont comme les Ordonnées mêmes.

Nous n'entrerons point avec M. Parent dans un plus grand détail d'Exemples. Il ſuffira de remarquer qu'il en donne auſſi quelques-uns de figures, qui n'ayant par elles mêmes aucune baſe de fraction pour un poids attaché à un certain point, en ont une à l'égard de ce même poids demeurant immobile, pourvû qu'on les augmente de quelque autre figure. Cet expedient revient au même que celui de déplacer le poids, mais il demande un autre calcul & d'autres tours géometriques. On ſe plaît préſentement à multiplier les difficultés, on les recherche avec ſoin, tant on eſt ſûr de l'Art qui les doit vaincre.

SUR LA RESISTANCE

DES MILIEUX

AU MOUVEMENT.

DEs trois Hipotheſes les plus vrais ſemblables qu'on puiſſe faire ſur la Réſiſtance des Milieux au Mouvement, & les ſeules que M. Varignon ait jugées dignes de

V. les M. p. 243 & 491.

les examiner, les deux premieres étant entierement finies *, il passe à la troisiéme, c'est celle où la Résistance croît comme la somme de la vitesse & de son quarré. Tout le reste demeure le même que dans les deux autres Hipotheses.

* V. l'Hist. de 1707. p. 139. & suiv. celle de 1708. p. 123. & suiv. & celle de 1709. p. 97. & suiv.

Nous avions supposé dans la premiere que la vitesse du 1er instant qui étoit 1, la résistance du Milieu en retranchoit la 10eme partie. Cette même supposition a subsisté dans la seconde Hipothese, parceque soit que la résistance croisse comme les vitesses ou comme leurs quarrés, la vitesse du 1er instant, & son quarré sont également 1. Mais ce n'est plus la même chose dans la troisiéme Hipothese. La somme de la vitesse du 1er instant & de son quarré est 2, & par consequent si dans les 2 premieres Hipotheses la résistance qui suivoit ou les vitesses ou leurs quarrés a retranché $\frac{1}{10}$ de la vitesse du 1er instant, maintenant qu'elle suit les sommes des vitesses & de leurs quarrés, & que par-là elle est dans le 1er instant double de ce qu'elle étoit, elle doit retrancher $\frac{1}{5}$ de la vitesse de cet instant. Cette vitesse qui de 1 ou $\frac{10}{10}$ devenoit $\frac{9}{10}$ devient donc $\frac{8}{10}$, ou $\frac{4}{5}$.

Sur ce pié-là, pour avoir la vitesse du 2d instant, il ne faut que faire le même raisonnement qui a été fait pour la seconde Hipothese dans l'Hist. de 1709 *. La vitesse primitive du 2d instant, qui, si le Milieu ne résistoit plus, seroit $\frac{4}{5}$ plus 1 ou $\frac{9}{5}$, perdra une partie qui sera à $\frac{1}{5}$, comme la somme de la vitesse $\frac{9}{5}$ & de son quarré, est à la somme de la vitesse 1 & de son quarré ou à 2. Cette partie sera donc $\frac{63}{125}$ qui étant retranchée de la vitesse primitive du 2d instant $\frac{9}{5}$ ou $\frac{225}{125}$ la réduit à n'être plus que $\frac{162}{125}$, de sorte que les vitesses des deux premiers instants, qui sans la résistance auroient été 1 & 2, ne seront plus que $\frac{4}{5}$ & 1 $\frac{37}{125}$ Et si on multiplie par 1000 afin de les pouvoir comparer aux mêmes vitesses qui ont été calculées pour les deux premieres Hipotheses, on trouvera que les vitesses primitives qui étoient 1000 & 2000, deviennent dans la 1ere Hipothese 900 & 1710, dans la 2de 900 & 1536, & dans la 3eme 800, & 1299.

* p. 99.

La viteſſe va donc toûjours en diminuant d'une Hipotheſe à l'autre, & ſi dans les deux premieres elle ne devenoit au bout d'un temps infini qu'une viteſſe terminale finie, elle doit à plus forte raiſon le devenir dans cette troiſiéme Hipotheſe, & même être moindre.

Dans la 1ere, la Réſiſtance que fait le Milieu en quelque inſtant que ce ſoit eſt à la Peſanteur du Corps qui tombe, comme la viteſſe actuelle qu'il a en ce même inſtant, eſt à la viteſſe terminale qu'il aura au bout d'un temps infini. Delà nous avons conclu que pour la 2de Hipotheſe il n'y avoit qu'à faire dans cette proportion le changement que demande naturellement & neceſſairement le changement d'Hipotheſe, & que la Réſiſtance ſeroit à la Peſanteur comme le quarré de la viteſſe actuelle au quarré de la terminale. Il eſt donc naturel de conclure que pour la 3eme Hipotheſe, il n'y a qu'à mettre dans la même proportion au lieu des quarrés des viteſſes, les ſommes de leurs quarrés & d'elles, & cela eſt effectivement vrai, quoiqu'avec une certaine modification.

Il s'agit dans toute cette Theorie générale de trouver des Courbes par le moyen deſquelles des lignes ou des ſurfaces repreſentent les grandeurs qu'on veut connoître, viteſſes, réſiſtances, eſpaces parcourus. Il faut donc ſuivre les loix que la Geometrie obſerve neceſſairement en conſiderant differentes grandeurs. Ici la réſiſtance ſe proportionne toûjours à la ſomme faite de la viteſſe actuelle & de ſon quarré, mais en Geometrie on ne ſçauroit faire une ſomme d'une grandeur & de ſon quarré, d'une ligne & d'une ſurface, parceque ces deux grandeurs ne peuvent être comparées, & que l'une n'eſt que l'élement infiniment petit de l'autre. Il faut donc, ſi l'on veut les comparer, les réduire à l'*homogeneïté*, & les rendre de même eſpece en diviſant le quarré par quelque grandeur arbitraire, moyenannt quoi le quotient de cette diviſion n'eſt qu'une ligne, grandeur de même eſpece que la racine du quarré, & l'on fait fort naturellement

une ſomme de cette racine, & de la nouvelle ligne. Afin que ces nouvelles lignes qui naiſſent de la diviſion des quarrés ſoient toûjours en même raiſon qu'eux, la diviſion ſe fait toûjours par une même grandeur conſtante, & entant qu'il n'eſt queſtion que de rapports, il n'y a rien de changé.

Mais il arrive du changement à l'égard des grandeurs *abſoluës*. Plus la grandeur arbitraire & conſtante par laquelle ſe font les diviſions eſt grande, plus les quotients ſont petits, & réciproquement. Or dans l'hipotheſe preſente la réſiſtance d'un inſtant quelconque s'exprime par la viteſſe de cet inſtant, plus ſon quarré diviſé par la grandeur conſtante, donc plus cette grandeur eſt grande, plus les réſiſtances ſont petites en elles-mêmes, quoique toûjours proportionnées aux ſommes des viteſſes & de leurs quarrés, & réciproquement. Mais d'un autre côté la réſiſtance d'un inſtant quelconque eſt toûjours à la peſanteur conſtante du Corps, comme la ſomme faite de la viteſſe actuelle de cette inſtant & de ſon quarré, eſt à une pareille ſomme faite de la viteſſe terminale. Donc ſi les réſiſtances ſont plus petites en elles-mêmes & par conſequent auſſi par rapport à la peſanteur, les viteſſes actuelles ſeront auſſi plus petites par rapport à la Terminale, ou, ce qui eſt la même choſe, la Terminale ſera plus grande. Donc la grandeur de la terminale dépend de cette grandeur arbitraire & conſtante par laquelle on diviſe les quarrés ; & en effet M. Varignon trouve que la Terminale eſt toûjours un peu plus de la moitié de cette grandeur.

Il peut paroître étrange que la terminale ſoit dépendante d'un choix arbitraire, car n'a-t-elle pas par elle-même ſa grandeur déterminée ? Qu'un Corps tombe librement dans l'air, & que l'air lui réſiſte ſelon l'hipotheſe preſente, ce Corps n'acquerera-t-il pas au bout d'un temps infini une certaine viteſſe, neceſſairement reglée par les cauſes phyſiques, & qui ſeroit toûjours la même dans toute autre chute égale ? Cela eſt vrai, mais cette

cette viteſſe Terminale n'eſt pas connuë. Si on la connoiſſoit, on en prendroit un peu moins que le double pour faire la diviſion des quarrés, & tout ſeroit fixe & déterminé. Mais à ſon défaut, on prend une grandeur arbitraire & conſtante qui tient ſa place, & fait le même effet à l'égard des ſimples rapports, mais qui ſelon qu'elle eſt priſe plus ou moins grande fait varier les grandeurs abſoluës.

Dans la proportion dont les 4 termes ſont la réſiſtance, la peſanteur, la ſomme faite d'une viteſſe quelconque & de ſon quarré, & une pareille ſomme de la viteſſe Terminale, la néceſſité de diviſer les quarrés par une grandeur conſtante y fait entrer dès le 3eme terme cette grandeur d'où dépend la Terminale, ainſi cette Terminale inconnuë ne peut être trouvée par les 3 premiers termes, comme elle l'a été dans les deux hipotheſes précedentes. On ne peut que la ſuppoſer.

Aprés cet éclairciſſement ſur la nouvelle eſpece dont eſt ici la Terminale, il ne nous reſte plus de reflexions importantes à faire ſur les deux Courbes qui repreſentent ou les viteſſes *actuelles* & qui reſtent au Corps malgré la réſiſtance du Milieu, ou les viteſſes *perduës*. M. Varignon les trouve toutes deux comme dans la ſeconde hipotheſe, d'abord par la Logarithmique enſuite par l'Hiperbole.

L'eſpace parcouru dans cette troiſiéme hipotheſe eſt auſſi-bien que dans les deux autres infini en un temps infini, mais il arrive ici une choſe particuliere; c'eſt que quand on ſe ſert de l'Hiperbole pour la conſtruction de la Courbe qui doit repreſenter par ſes aires curvilignes les eſpaces parcourus, on trouve que cet eſpace parcouru en un temps infini eſt infiniment infini, ou infini du 2^{d} genre. Or que veut dire cela? pourquoi cet eſpace de l'ordre du fini où il étoit *ſaute-t-il* dans l'infini du 2^{d} genre? & peut-il y ſauter ſans avoir paſſé par l'infini du 1er? Pour répondre à ces difficultés M. Varignon fait une digreſſion, dont nous donnerons les principes, en y

ajoûtant quelques reflexions.

Si l'on considere une progression géometrique quelconque, comme 1, 2, 4, &c. il est certain que chacun des intervalles égaux qui sont entre 1 & 2, entre 2 & 4, &c. peut être rempli par une infinité de nombres irrationnels, qui entreront dans la même progression géométrique. Par exemple, entre 1 & 2 est la Racine de 2, moyenne proportionnelle géometrique entre 1 & 2; entre 1 & la Racine de 2, est la Racine 4eme de 2; entre 1 & la Racine 4eme de 2, est la Racine 8eme de 2, & toûjours ainsi en s'approchant de 1, de sorte que la derniere d'un nombre infini de ces racines irrationnelles de 2 ne sera que 1. De même entre la Racine de 2 & 2, on trouvera un nombre infini de grandeurs irrationnelles qui s'approcheront toûjours de 2, & dont la derniere lui sera égale. Il n'y a point d'intervalle entre deux grandeurs, quelque petit qu'il soit, qui ne soit divisible à l'infini, c'est à dire qui ne puisse être rempli par une infinité de grandeurs *intermediaires*, qui entreront dans la progression des *extrêmes* ou *principales.*

Ces grandeurs intermediaires sont d'une autre nature que les principales, non en elles-mêmes, puisqu'elles entrent dans la même progression, mais par rapport à nous, qui ne les concevons pas aussi distinctement que les autres. Ainsi tous ces nombres irrationnels qui sont entre 1 & 2, sont fort obscurs pour l'esprit humain, & ce qui le prouve bien entre plusieurs autres choses, c'est que, comme dit M. Varignon, tous les nombres dont nous avons une idée nette, sont pairs ou impairs, cependant ceux-là ne sont ni l'un ni l'autre.

Si l'on imagine les differents Ordres d'Infini que je suppose démontrés à toute rigueur, le Fini, l'Infini du 1er genre, l'Infini du 2^{d} &c. il est évident qu'ils sont ensemble une progression géometrique croissante; mais dequoi sont remplis leurs intervalles? Le premier ne le peut être que d'une infinité de grandeurs moyennes proportionnelles entre le Fini, & l'Infini du 1er genre, & qui par

consequent ne sont ni de l'un ni de l'autre ordre, ni finies, ni infinies, ce qui n'est pas plus incomprehensible, & est prouvé de la même maniere que les nombres irrationnels. Ces grandeurs intermediaires entre le Fini & l'Infini du 1er genre, qui sont les seules que nous considerons ici, peuvent être appellées *Infinis imparfaits*.

Ces Infinis imparfaits ne laissent pas d'être infiniment grands par rapport au Fini dans le même temps qu'ils sont infiniment petits par rapport à l'Infini du 1er genre. Ainsi l'essence de la Parabole consistant en ce que son Parametre, grandeur constante & finie, une Ordonnée quelconque, & l'Abscisse correspondante sont toûjours en progression géometrique, si l'on conçoit cette Courbe prolongée à l'infini, & par consequent sa derniere Ordonnée & son Abscisse ou l'Axe devenus infinis, il faut necessairement que cette Ordonnée soit un Infini imparfait, infiniment grand par rapport au Parametre, & infiniment petit par rapport à l'Axe devenu infini du 1er genre, car la proprieté essentielle d'une Courbe se conserve jusque dans l'Infini, lorsque la Courbe y peut aller. Et il faut remarquer que sans cette idée d'Infini imparfait, & dans la supposition des seuls Infinis parfaits, la Parabole prolongée à l'Infini, comme elle peut certainement l'être, renfermeroit une difficulté inexplicable. Il faudroit que l'Ordonnée fût un Infini du 1er genre, & l'Axe du 2d, or les Ordonnées & l'Axe ayant toûjours crû ensemble & de compagnie, il seroit inconcevable que l'Axe eût passé de l'ordre du Fini à l'Infini du 2d genre sans passer par celui du 1er, tandis que l'Ordonnée n'auroit fait que le chemin *regulier* de l'ordre du Fini dans l'Infini du 1er genre.

Selon le sistême que nous établissons ici, il y a des Infinis imparfaits, qui quoiqu'ils soient toûjours infiniment plus grands que le Fini, s'en approchent pourtant toûjours de plus en plus. On peut trouver un exemple d'un Infini imparfait le moins au-dessus du Fini qu'il se puisse dans la Logarithmique, dont les Ordonnées séparées

par des intervalles égaux infiniment petits font en progreffion géometrique, & peuvent s'étendre fur l'Axe à l'infini. Car fi l'on conçoit qu'elle arrive à une Ordonnée infinie du 1er genre, il eft de fa nature qu'entre cette Ordonnée infinie, & la derniere des finies, il y en ait une infinité qui feront des moyennes proportionnelles du genre de l'Infini imparfait. Et fi l'on conçoit que la Logarithmique fe termine à la premiere Ordonnée infinie qu'elle peut avoir, car à quoi ferviroit-il de la pouffer au-delà ? cette premiere Ordonnée fera la premiere de ces moyennes proportionnelles, moins differente que toute autre de la derniere Ordonnée finie.

Comme toutes les Courbes cheminent par les degrés les plus infenfibles qu'il fe puiffe, on peut de même imaginer, lorfqu'elles arrivent à l'Infini, que c'eft à quelque Infini imparfait, à moins qu'il ne foit néceffaire de l'imaginer parfait, ainfi que l'Axe de la Parabole devenuë infinie. Le Calcul ne détermine pas néceffairement & par lui même la differente efpece de l'Infini parfait & de l'imparfait, car ils n'ont tous deux à cet égard qu'un caractere commun, qui eft que toute grandeur finie difparoît devant eux.

Toutes ces idées & ces raifonnemens fur l'Infini fe tranfportent naturellement à l'Infiniment petit. Il y a entre le fini & l'infiniment petit du 1er genre une infinité de moyennes proportionnelles, toutes infiniment plus petites que le fini, & infiniment plus grandes que l'infiniment petit du 1er genre. Un exemple feul fuffira pour prouver la néceffité de les admettre.

On connoît plufieurs Courbes qui n'ayant qu'un axe fini qu'elles rencontrent à leur origine, ont fur cet axe une derniere Ordonnée infinie, & afimptotique à la Courbe. Il eft certain que cette derniere Ordonnée n'eft que la fomme de toutes les *differences* infiniment petites précedentes, mais comment peut-elle l'être ? Il n'y a de differences infiniment petites précedentes qu'autant qu'il y a d'intervalles infiniment petits pris fur l'Axe entre les

Ordonnées. Or l'Axe étant ſuppoſé fini, il ne peut avoir qu'un nombre de ces intervalles infini du 1er genre tout au plus. Donc le nombre des differences n'eſt non plus qu'un infini du 1er genre. Donc puiſqu'elles ſont infiniment petites, leur nombre infini ne peut faire qu'une ſomme, & par conſéquent une derniere Ordonnée finie; cependant elle eſt infinie. Il eſt évident que ſi l'Axe étoit infini, & que par conſéquent il contînt une infinité d'intervalles infiniment petits, cette difficulté n'auroit pas lieu.

Il ne paroît pas qu'on la puiſſe réſoudre autrement qu'en concevant que les differences dont il s'agit ſont des infiniment petits *imparfaits* plus petits, à la verité, que toute grandeur finie, mais infiniment plus grands que les infiniment petits du 1er genre, & qui par conſéquent font une ſomme infiniment plus grande, ou infinie.

Aprés cet éclairciſſement qui étoit important pour la Géometrie de l'Infini, & qui n'eſt pas le ſeul qu'elle demandât encore, M. Varignon reprend ſa matiere, & paſſe aux Mouvemens qui ayant commencé par une viteſſe finie quelconque, auroient été toûjours enſuite accelerés par la peſanteur, & auroient éprouvé de la part du Milieu la réſiſtance de la troiſiéme Hipotheſe. Cette viteſſe *initiale* ſeroit plus petite que la terminale, ou égale, ou plus grande, mais nous avons déja épuiſé dans les deux hipotheſes précedentes les raiſonnemens généraux que l'on peut faire ſur ces trois cas.

MOnſieur Jaugeon a donné un Ecrit de l'Origine des Caracteres Latins, compoſé à l'occaſion de la conſtruction des nouveaux Caracteres, à laquelle il a travaillé.

MACHINES OU INVENTIONS
APPROUVE'ES PAR L'ACADEMIE
DES SCIENCES EN MDCCX.

I.

UNe Machine inventée par M. Olaine, Gentilhomme Irlandois, pour mouler un très-grand nombre de Chandeles tout à la fois, & très-facilement. De plus le Suif qu'il employe à ces Chandelles eſt tellement préparé qu'elles brûlent fort bien ſans couler, n'ont aucune mauvaiſe odeur, & ſont preſque auſſi ſeches au toucher que de la Cire.

I I.

Un Fauteüil mobile ſur des Roulettes, que celui qui eſt aſſis dedans, peut faire mouvoir ſeul dans une Chambre, & tourner du côté qu'il veut. Il a été préſenté par le Sieur de Bezu, & a paru ſimple, & d'uſage.



ELOGE
DE M. DE CHAZELLES.

JEAN MATHIEU DE CHAZELLES nâquit à Lyon le 24. Juillet 1657. d'une Famille honnête, qui etoit dans le Commerce. Il fit toutes ses études dans le grand College des Jesuites de cette Ville, aprés quoi il vint à Paris en 1675. La passion qu'il avoit d'y connoître les gens de mérite le conduisit chés feu M. du Hamel, Secretaire de cette Academie, qui de son côté favorisoit de tout son pouvoir les jeunes gens, dont on pouvoit concevoir quelque esperance. Il remarqua dans celui-cy beaucoup de disposition pour l'Astronomie, car le jeune homme étoit déja Géometre, il le présenta à M. Cassini, qui le prit avec lui à l'Observatoire, école où Hipparque & Ptolomée eux-mêmes auroient encore pû apprendre.

La Théorie & la Pratique, toûjours si differentes, le sont peut-être plus en fait d'Astronomie qu'en toute autre matiere, & le plus habile Astronome, qui ne le seroit que par les Livres, seroit tout étonné, quand il viendroit à manier la Lunette, qu'il ne verroit presque rien. Les Observations sont une manœuvre très-fine & très-délicate. M. de Chazelles étudia cet art à fond, & en même tems il embrassa toute cette vaste science, dont il est le fondement. Il travailla sous M. Cassini à la grande Carte Géographique en forme de Planisphére qui est sur le pavé de la Tour Occidentale de l'Observatoire, & qui a 27 pieds de diametre. Elle avoit été dressée sur les observations que l'Academie avoit déja faites par ordre du Roi en differens endroits de la Terre, & ce qui en est le plus remarquable, c'est qu'elle fut en quelque sorte pro-

phetique. Elle contenoit ſur de certaines conjectures de M. Caſſini des corrections anticipées & fort importantes, qui ont été juſtifiées depuis par des obſervations incconteſtables.

En 1683. l'Academie continua vers le Septentrion, & vers le Midi le grand ouvrage de la Meridienne commencé en 1670, & M. Caſſini a qui le côté du Midi étoit tombé en partage, aſſocia à ce travail M. de Chazelles. Ils pouſſerent cette ligne juſqu'à la campagne de Bourges.

Aprés avoir pris des leçons de M. Caſſini à l'Obſervatoire pendant 5 ans, M. de Chazelles devoit être devenu un excellent Maître. Feu M. le Duc de Mortemar le prit pour lui enſeigner les Mathematiques, & le mena avec lui à la campagne de Genes en 1684. Il lui fit avoir l'année ſuivante une nouvelle place de Profeſſeur d'Hidrographie pour les Galeres à Marſeille, car il y en avoit depuis long-temps une ancienne remplie par un Pere Jeſuite, à qui il falloit donner du ſecours, parceque la Marine de France s'étoit conſiderablement fortifiée.

Ces Ecoles ſont des eſpeces de petits Etats aſſés difficiles à gouverner. Tous les ſujets qui les compoſent ſont dans la force de leur jeuneſſe, impetueux, indociles, amoureux de l'indépendance avec fureur, ennemis preſque irréconciliables de toute application, & ce qui eſt encore pis, ils ſont tous gens de guerre, & leur Maître n'a ſur eux aucune autorité militaire. Cependant on rend ce témoignage à M. de Chazelles, qu'il fut toûjours reſpecté, & même aimé de ſes redoutables ſujets. Il avoit cette douceur ferme & courageuſe, qui ſçait gagner les cœurs avec dignité. Le ſuccés qu'il avoit eu l'encouragea à ſe charger encore d'une nouvelle école de jeunes Pilotes deſtinés à ſervir ſur les Galeres. Elle a fourni, & fournit encore tous les jours un grand nombre de bons Navigateurs.

Pendant l'Eté de 86 les Galeres firent 4 petites campagnes, ou plutôt 4 promenades, où elles ne ſe propoſoient

ſoient que de faire de l'exercice. M. de Chazelles s'embarqua toutes les 4 fois, & alla tenir ſes écoles ſur la Mer. Il montroit aux Officiers la pratique de ce qu'il leur avoit enſeigné. Il fit auſſi pluſieurs obſervations géometriques & aſtronomiques, par le moyen deſquelles il donna enſuite une nouvelle Carte de la Côte de Provence.

Nous paſſons ſous ſilence deux campagnes, quoique plus longues, & plus conſiderables, qu'il fit en 87 & 88. Elles produiſirent toutes deux un grand nombre de Plans qu'il leva, ſoit des Ports & des Rades, où il aborda, ſoit des Places qu'il pût voir. On ſçait aſſés que ces Plans ne ſont pas de ſimples curioſités, & qu'étant dépoſés entre les mains des Miniſtres d'Etat, ils deviennent en certains temps la matiere des plus importantes déliberations, & les reglent d'autant plus ſûrement, qu'ils ont été faits de meilleure main.

Il y a long-temps que l'Expérience, maîtreſſe ſouveraine de tous les Arts, a fait entre les deux eſpéces des grands Bâtimens de Mer un partage, où tous les peuples de l'Europe ont ſouſcrit; elle a donné l'Océan aux Vaiſſeaux, & la Mediterranée aux Galeres. Elles ont trop peu de bord pour ſoûtenir une vague auſſi haute que celle de l'Océan. Mais auſſi les Vaiſſeaux ont ce défaut eſſentiel qu'ils ne peuvent rien ſans le Vent; ce ſont de grands corps abſolument dépendants de cette ame étrangere, inconſtante, & qui les abandonne quelquefois entierement. Au commencement de la derniere guerre quelques Officiers de Marine, & M. de Chazelles avec eux, imaginerent qu'on pourroit avoir des Galeres ſur l'Océan, qu'elles y ſerviroient à remarquer les Vaiſſeaux, quand le Vent leur feroit contraire, ou leur manqueroit, qu'enfin elles les rendroient indépendants du Vent, & par conſéquent beaucoup plus agiſſants que ceux des Ennemis. Elles devoient auſſi aſſurer & garantir les Côtes de Ponant. Ces ſortes d'idées hardies, pourveu qu'elles le ſoient dans certaines bornes, partent d'un

courage d'esprit, rare même parmi ceux qui ont le courage du cœur. Sans cette audace, un faux impossible s'étendroit presque à tout. Comme M. de Chazelles avoit beaucoup de part à la proposition, il fut envoyé en Ponant au mois de Juillet 1689. pour visiter les Côtes par rapport à la navigation des Galeres. Enfin en 90, 15 Galeres nouvellement construites partirent de Rochefort presque entierement sur sa parole, & donnerent un nouveau spectacle à l'Océan. Elles allerent jusqu'à Torbay en Angleterre, & servirent à la descente de Tingmouth. M. de Chazelles y fit les fonctions d'Ingenieur, fort differentes de celles de Professeur d'Hidrographie. Quoiqu'il ne se fût pas destiné à la guerre, & qu'il ne soit gueres naturel qu'un Soldat ait été élevé à l'Observatoire, il marqua & en cette occasion, & en plusieurs autres pareilles, toute l'intrépidité que demande le métier des armes. Les Officiers généraux sous qui il a servi, attestent que quand ils l'avoient envoyé visiter quelque poste ennemi, ils pouvoient compter parfaitement sur son rapport. Il n'est que trop établi que ceux qui sont chargés de ces sortes de commissions, n'y portent pas tous, ou n'y conservent pas une vûë bien nette. M. de Chazelles n'étoit originairement qu'un Sçavant, & les Sciences mêmes en avoient fait un homme de guerre. Ce qui éleve l'esprit devroit toûjours aussi élever l'ame.

Les Galeres après leur expédition revinrent à l'embouchure de la Seine dans les Bassins du Havre & de Honfleur, mais elles n'y pouvoient pas hiverner, parce qu'il étoit nécessaire de mettre de tems en tems ces Bassins à sec, pour éviter la corruption des eaux. M. de Chazelles proposa de faire monter les Galeres à Roüen, tous les Pilotes y trouvoient des difficultés insurmontables, il soûtint seul qu'elles y monteroient ; il s'étoit acquis une grande confiance, on le crut, & elles monterent heureusement. Une grande habileté ne suffit pas pour oser se charger d'un évenement considérable, il faut encore un zele vif, qui veuille bien courir les ris-

ques de l'injuſtice des hommes, toûjours portés à ne donner leur approbation qu'aux ſuccès.

Les Galeres hivernerent donc à Roüen, & celui qui les y avoit amenées devoit naturellement les préſerver des accidens dont elles étoient menacées dans ce ſéjour étranger. Auſſi imagina-t-il une nouvelle ſorte d'amarrage, & une petite jettée de pilotis, qui les mettoient à couvert des glaces qu'on craignoit, & cela à peu de frais, au lieu que de toute autre maniere la dépenſe eût été conſiderable.

Pendant qu'il étoit à Roüen, il mit en ordre les obſervations qu'il venoit de faire ſur les Côtes de Ponant, & en compoſa 8 Cartes particulieres accompagnées d'un *Portulan*, c'eſt-à-dire d'une ample deſcription de chaque Port, de la maniere d'y entrer, du fond qui s'y trouve, des marées, des dangers, des reconnoiſſances, &c. Ces ſortes d'Ouvrages, quand ils ont toute leur perfection, ſont d'un grand prix, parceque, comme nous l'avons déja dit dans l'Hiſtoire de 1701*, & à l'occaſion de M. de Chazelles même, *les Sciences qui ſont de pratique ſont les moins avancées. Deux ou trois grands Genies ſuffiſent pour pouſſer bien loin des Théories en peu de tems, mais la pratique procede avec plus de lenteur, à cauſe qu'elle dépend d'un trop grand nombre de mains, dont la plûpart même ſont peu habiles.* Les nouvelles Cartes de M. de Chazelles furent miſes dans le *Neptune François*, qui fut publié en 1692. Dans cette même année il fit la campagne d'Oneille, & ſervit d'Ingenieur à la deſcente.

* p. 121.

En 93 M. de Pontchartrain alors Secretaire d'Etat de la Marine, & aujourd'hui Chancelier de France, ayant réſolu de faire travailler à un ſecond Volume du *Neptune François*, qui comprît la Mer Mediterranée, M. de Chazelles propoſa d'aller établir par des obſervations aſtronomiques la poſition exacte des principaux points du Levant, & il ne demandoit qu'un an pour ſon voyage. Il eût été difficile de lui réfuſer une grace ſi peu briguée. Il partit, & parcourut la Grece, l'Egypte, la Tur-

quie, toûjours le Quart de cercle & la Lunette à la main. Il est vrai que ce n'est là que recommencer continuellement les mêmes operations, sans acquerir de lumieres nouvelles, au lieu qu'un Sçavant de Cabinet en acquiert tous les jours avec volupté & avec transport, mais plus ce plaisir est flateur, plus il est beau de le sacrifier à l'utilité du Public, qui profite plus de quelques faits bien sûrs, que de plusieurs spéculations brillantes.

Le voyage de M. de Chazelles donna sur l'Astronomie un éclaircissement important, & long temps attendu. Il est necessaire pour la perfection de cette Science que les Astronomes de tous les Siécles se transmettent leurs connoissances, & se donnent la main. Mais pour profiter du travail des Anciens, il faut pouvoir calculer pour le lieu où nous sommes, ce qu'ils ont calculé pour les lieux où ils étoient, & par conséquent sçavoir éxactement la longitude, & la latitude de ces lieux. On ne peut pas trop s'en rapporter aux Anciens eux-mêmes, parcequ'on observe presentement avec des Instruments, & une précision qu'ils n'avoient pas, & qui rendent un peu suspect tout ce qui a été trouvé par d'autres voyes. Les Astronomes dont il étoit le plus important de comparer les observations aux nôtres, étoient Hipparque, Ptolomée, & Ticho Brahé. Les deux premiers étoient à Alexandrie en Egypte, & ils la rendirent la Capitale de l'Astronomie. Ticho étoit dans l'Isle d'Hüene, située dans la Mer Baltique; il y fit bâtir ce fameux Observatoire, qu'il appella Uranibourg, *Ville du Ciel.* L'Academie presque encore naissante avoit formé le noble dessein d'envoyer des Observateurs à Alexandrie & à Uranibourg, pour y prendre le fil du travail des grands hommes, qui y avoient habité. Mais les difficultés du voyage d'Alexandrie firent que l'on se contenta de celui d'Uranibourg, que M. Picard voulut bien entreprendre en 1671.

Il y traça la Meridienne du lieu, & fut fort étonné de la trouver differente de 18' de celle que Ticho avoit déterminée, & qu'il ne devoit pas avoir déterminée negli-

gemment, puiſqu'il s'agiſſoit d'un terme fixe, où ſe rapportoient toutes ſes obſervations. Cela pouvoit faire croire que les Meridiens changeoient, c'eſt-à-dire, que la Terre, ſuppoſé qu'elle tourne, ne tourne pas toûjours ſur les mêmes Poles, car ſi un autre point devient Pole, tous les Meridiens qui doivent paſſer par ce nouveau point ont neceſſairement changé de poſition. On voit aſſés combien il importoit aux Aſtronomes de s'aſſurer ou de la variation, ou de l'invariabilité des Poles de la Terre, & des Meridiens.

M. de Chazelles étant en Egypte meſura les Piramides, & trouva que les 4 côtés de la plus grande étoient expoſés préciſément aux 4 Regions du Monde. Or comme cette expoſition ſi juſte doit ſelon toutes les apparences poſſibles avoir été affectée par ceux qui éleverent cette grande maſſe de pierres, il y a plus de 3000 ans, il s'enſuit que pendant un ſi long eſpace de temps rien n'a changé dans le Ciel à cet égard, ou, ce qui revient au même, dans les Poles de la Terre, ni dans les Meridiens. Se ſeroit-on imaginé que Ticho, ſi habile & ſi éxact obſervateur, auroit mal tiré ſa Meridienne, & que les anciens Egyptiens ſi groſſiers, du moins en cette matiere, auroient bien tiré la leur? L'invariabilité des Meridiennes a été encore confirmée par celle que M. Caſſini a tirée en 1655 dans l'Egliſe de S. Petrone à Bologne.

M. de Chazelles rapporta auſſi de ſon voyage de Levant tout ce que l'Académie ſouhaitoit ſur la poſition d'Alexandrie. Auſſi M. de Pontchartrain crut-il lui devoir une place dans une Compagnie, à qui ſes travaux étoient utiles. Il y fut aſſocié en 1695. Il retourna enſuite à Marſeille reprendre ſes premieres fonctions.

Tout le reſte de ſa vie n'eſt guere qu'une repetition perpetuelle de ce que nous avons vû juſqu'ici. Des campagnes ſur mer preſque tous les ans, ſoit en guerre, ſoit en paix, quelques unes ſeulement plus conſiderables, comme celle de 1697. où Barcelone fut priſe, des poſitions qu'il prend de tous les lieux qu'il voit, des Plans qu'il leve, des fonc-

tions d'Ingenieur qu'il fait assés souvent, & avec gloire, & puis un retour paisible à son école de Marseille. Il ne s'en dégoûtoit point pour avoir eu quelques occupations plus brillantes, jamais il ne songea à la quitter. Les plus grandes ames sont celles qui s'arrangent le mieux dans la situation presente, & qui dépensent le moins en projets pour l'avenir.

Lorsqu'en 1700 M. Cassini par ordre du Roi alla continuer du côté du Midi la Meridienne abandonnée en 83, M. de Chazelles fut encore de la partie. Il ne pût joindre qu'à Rodez M. Cassini, qui, pour ainsi dire, filoit sa Meridienne en s'éloignant toûjours de Paris. Mais depuis Rodez M. de Chazelles s'attacha si fortement à ce travail, & cela, pendant la plus fâcheuse saison de l'année, que sa santé commença à s'en alterer considerablement.

La ligne étant poussée jusqu'aux frontieres d'Espagne, il revint à Paris en 1701, & il y fut malade ou languissant pendant plus d'une année. Ce fut alors qu'il communiqua à l'Académie le vaste dessein qu'il méditoit d'un Portulan général de la Mediterranée*. On peut compter que dans les Cartes Géographiques, & Hidrographiques des trois quarts du Globe le portrait de la Terre n'est encore qu'ébauché, & que même dans celles de l'Europe, il est assés éloigné d'être bien fini, ni bien ressemblant, quoiqu'on y ait beaucoup plus travaillé.

* V. l'Hist. de 1701. p. 121. & suiv.

Malgré plusieurs soins differents, & les infirmités même qui deviennent le plus grand de tous les soins, M. de Chazelles ne perdoit point de vûë ses Galeres égarées dans l'Océan. Etant encore à Paris en 1702, il proposa qu'elles pouvoient rester à sec dans tous les Ports, où il entroit assés de marée pour les y faire entrer. Par-là il triploit le nombre des retraites qu'elles pouvoient avoir, & par conséquent aussi le nombre des occasions, où elles pouvoient être employées. On fit à Ambleteuse l'épreuve de sa proposition sur deux Galeres qu'on échoüa, & elles soûtinrent l'échoüage pendant 15 jours sans aucun inconvenient. Au contraire il donna une merveilleuse commodité pour espalmer. Il faut oser en tout genre,

mais la difficulté eſt d'oſer avec ſageſſe ; c'eſt concilier une contradiction.

Les 9 dernieres années de la vie de M. de Chazelles, quoiqu'auſſi laborieuſes que les autres, furent preſque toûjours languiſſantes, & ſa ſanté ne fit plus que s'affoiblir. Enfin il lui vint une fiévre maligne qu'il négligea dans les commencemens, ſoit par l'habitude de ſouffrir, ſoit par la défiance qu'il avoit de la Medecine, à laquelle il préferoit les reſſources de la Nature. Enfin il mourut le 16. Janvier 1710. entre le bras du P. Laval Jeſuite, ſon Collegue en Hidrographie, & ſon intime ami. Quand deux amis le ſont dans des poſtes qui naturellement les rendent rivaux, il ne faut plus leur demander des preuves d'équité, de droiture, ni même de générofité. A ces vertus, & à celles que nous avons déjà repreſentées, M. de Chazelles joignit toûjours un grand fond de Religion, c'eſt à-dire, ce qui aſſûre & fortifie toutes les vertus.

Sa place d'Académicien Aſſocié a été remplie par M. Ozanam.



ELOGE.

DE M. GUGLIELMINI.

DOMENICO GUGLIELMINI nâquit à Bologne d'une honnête Famille le 27. Septembre 1655. Il étudia en Mathématique sous M. Geminiano Montanari Modenois, & en Medecine sous l'illustre Malpighi. Il embrassa ces deux genres d'étude à la fois, comme un homme né avec d'heureuses dispositions en auroit pû embrasser un seul, & il s'attira la même affection de ses deux Maîtres, que si chacun d'eux eût eu seul la gloire de le former.

En 1676 il parut dans une grande partie de l'Italie un Meteore aussi lumineux que la Lune en son plein. M. Montanari fit un petit ouvrage intitulé *Fiamma volante*, où par les observations qu'il avoit euës de differents endroits il recherchoit géometriquement quelle étoit la ligne du mouvement de cette Flame, sa distance à la Terre, & sa grandeur. Selon son calcul, la distance étoit à peu près de 15. lieuës moyennes de France, ce qui est une hauteur extraordinaire pour ces sortes de Feux. M. Cavina qui avoit observé le même Phenomene à Faënza en avoit fait un calcul fort different, la hauteur où il le mettoit, par exemple, étoit triple de celle de M. Montanari, & celui-ci d'ailleurs avoit negligé dans son Ecrit les observations de Faënza, non pas en les rejettant avec mépris, mais en disant qu'il étoit bien fâché de les trouver trop éloignées de toutes les autres, & qu'apparemment l'erreur venoit de ceux qui les avoient données, & à qui on s'étoit fié. Cette politesse n'empêcha pas M. Cavina de repliquer aigrement à M. Montanari, qui voyant cette dispute dégenerer en injures, se sentit assés fort pour oser déclarer publiquement qu'il y renonçoit. M. Guglielmini âgé alors de 21 an, & disciple aussi zelé de

de Montanari, que nous avons dit il y a quelques années que Viviani l'étoit de Galilée*, car ces ſortes d'attachemens ſemblent avoir plus de force en Italie, demanda à ſon Maître la permiſſion de répondre pour lui. Il la lui refuſa, de peur que ſon Adverſaire ne crût toûjours voir le Maître caché ſous le nom du Diſciple, mais M. Guglielmini trouva moyen de vaincre cette difficulté. Il propoſa & il obtint de ſoûtenir des Theſes publiques, où M. Montanari n'aſſiſteroit pas, & où M. Cavina, dont elles attaquoient l'opinion, ſeroit invité, & attendu pendant un certain temps. Il n'y vint point, il traita ce défi comme un Duel ſeroit traité en France, & il paroît qu'il fit bien. Quoique M. Guglielmini avouë qu'il n'étoit pas encore entierement ſorti des Sections Coniques, il terraſſoit en Géometrie ſon Adverſaire. Il y eut aſſés d'écrits & aſſés gros ſur une matiere, qui au fond ne les meritoit pas. Deux ou trois pages auroient ſuffi pour la Verité, les paſſions firent des Livres.

* V. l'Hiſt. de 1703. p. 138.

M. Guglielmini fut reçû Docteur en Medecine dans l'Univerſité de Bologne en 1678, mais au milieu de l'application & des études que demande cette penible profeſſion, un nouveau Phenomene, qui parut au Ciel, le rappella encore pour un temps du côté des Mathematiques. Ce fut la Comete de 1680 & 81, qui par je ne ſçai quelle deſtinée particuliere remua plus qu'une autre le Monde ſçavant. Le ſentiment de ceux qui croyent les Cometes des Corps éternels, auſſi bien que les Planetes, avoit été attaqué par M. Montanari, ſur ce fondement que cette derniere Comete qui avoit diſparu à la fin de Fevrier 1681 n'étoit point alors aſſés éloignée de la Terre pour diſparoître par ſon éloignement ſeul, & qu'il devoit y avoir eu par conſequent quelque diſſolution phiſique. Cette raiſon, qui pouvoit n'être pas démonſtrative, le devint en quelque ſorte pour M. Guglielmini, parce qu'elle venoit d'un Maître qu'il cheriſſoit, & elle l'engagea à chercher quelque moyen d'expliquer la génération des Cometes. Il en imagina un aſſés ſingulier, dont

il fit un ouvrage intitulé *De Cometarum naturà & ortu Epistolica Dissertatio. Bononiæ* 1681. Il donne aux planetes des Tourbillons fort étendus, de sorte que ceux, par exemple, de Jupiter & de Saturne, qui ont leur centres éloignés de 165 millions de lieuës, lorsqu'ils s'approchent le plus qu'il est possible, peuvent alors se couper vers leurs extrémités. Dans cet entrelassement, & cet embaras de la matiere de deux Tourbillons, il se forme en vertu des mouvemens opposés qui se combattent un Tourbillon nouveau, dont les parties les plus grossieres, car la matiere céleste n'est pas toute homogene, vont occuper le centre, & produisent un nouveau Corps solide, qui est à la tête de la Comete. Nous ne rapporterons ni les preuves, ni les difficultés de ce sistême, l'Auteur déclare qu'il ne le croit ni vrai, ni même vraisemblable, mais seulement propre à expliquer les faits, & il ne le propose qu'avec une modestie, qui en répare la foiblesse, & desarme les Critiques.

Il donna de nouvelles preuves de son sçavoir dans l'Astronomie par l'observation qu'il fit à Bologne de l'Eclipse solaire du 12 Juillet 1684, & qu'il imprima en Latin la même année.

Le merite de M. Guglielmini fut reconnu jusque dans son Païs. Le Senat de Bologne le fit premier Professeur de Mathematique, & lui donna en 1686 l'Intendance générale des Eaux de cette Etat. Les Voyageurs nous rapportent qu'en Perse la Charge de Sur-intendant des Eaux est une des plus considerables, à cause de la secheresse du Païs, & de la difficulté de l'arroser suffisamment, & également. Par une raison toute contraire, cette Charge est de la même importance dans le Bolonnois, & en général dans la Lombardie, où la grande quantité & la disposition des Rivieres & des Canaux, si utiles d'ailleurs au Païs, peuvent cependant produire de grands inconveniens, à moins que l'on n'y veille continuellement, & avec des yeux fort éclairés. M. Guglielmini eut cette délicatesse assés rare de regarder sa commission de Sur-

Intendant des Eaux, non comme une de ces Commiſſions, dont on s'acquite toûjours aſſés bien avec quelques connoiſſances ordinaires, & où il ſuffit de ne rien gâter, mais comme un engagement ſerieux à tourner ſes principales penſées de ce côté-là, & à ſervir le Public à toute rigueur.

Il donna donc dès l'année 1690 la premiere Partie, & en 91 la ſeconde d'un Traité d'Hidroſtatique intitulé *Aquarum fluentium menſura nova methodo inquiſita*, & dédié au Senat de Bologne. Son principe fondamental, & reçû de tous les Philoſophes modernes, eſt que les viteſſes d'une eau qui ſort d'un tuyau vertical ou incliné, ſont à chaque inſtant comme les Racines des hauteurs de ſa ſurface ſuperieure, ce qui amene neceſſairement la Parabole dans toute cette matiere. Quand même l'eau coule dans un canal horizontal, ce qui ſe peut pourvû qu'elle ait une iſſuë pour ſe décharger, c'eſt encore le même principe, parceque l'eau ſuperieure preſſant l'inferieure, lui imprime de la viteſſe à raiſon de ſa hauteur.

Si l'on veut trouver dans un canal horizontal la viteſſe moyenne entre celle du fond qui eſt la plus grande, & celle de la ſuperficie qui eſt la plus petite, ou même nulle geometriquement, on voit auſſi-tôt par la quadrature de la Parabole que cette viteſſe eſt toûjours à celle du fond comme 2 à 3, & qu'elle eſt toûjours placée aux $\frac{4}{9}$ de la hauteur du canal diviſé de haut en bas.

Quand on a une experience fondamentale ſur la viteſſe de l'eau, par exemple, celle de M. Guglielmini, par laquelle une eau qui eſt tombée de la hauteur de 1 pied de Bologne parcourt en 1 minute 216 pieds 5 pouces d'un mouvement égal, on a ſa viteſſe pour toutes les chutes poſſibles, & il en a calculé une Table qu'il n'a pouſſée que juſqu'à 30 pieds de chute, parceque les plus grands Fleuves de l'Europe ne paſſent pas cette profondeur. Si l'on veut meſurer la quantité d'eau qui paſſe en 1 minute par un canal horizontal, comme on ſçait que ſa viteſſe moyenne eſt aux $\frac{4}{9}$ de ſa hauteur, il faut avoir ces $\frac{4}{9}$ en

pieds & en pouces; on trouve ensuite par la Table quelle vitesse convient à une chute ou pression de cette hauteur, c'est-là la vitesse moyenne de l'eau, & en la multipliant par la hauteur & largeur du canal, on a la quantité d'eau cherchée. M. Guglielmini trouve par cette methode que le Danube supposé horizontal à son embouchure, comme le sont presque toûjours les grands Fleuves, du moins sensiblement, jette dans le Pont Euxin en 1 minute près de 42 millions de pieds cubiques Bolonnois d'eau.

Pour les Canaux inclinés, il ne faut qu'un peu plus de calcul, & de plus la connoissance de l'angle d'inclinaison du canal, après quoi tout le reste est pareil,

Telle est l'idée générale de tout l'Ouvrage. Il est fort net & fort methodique. Peut-être seulement paroîtroit-il un peu diffus à ceux qui ont pris le goût & l'habitude de cette brieveté vive de l'Algebre, assez semblable en fait de Mathematique à ce qu'on appelle en Eloquence, & en Poësie le Stile serré. Mais chaque Auteur écrit principalement pour son Païs, & quoique l'Italie ait été, du moins en Europe le berceau de l'Algebre, cette Science n'y avoit pas encore beaucoup prosperé du temps de M. Guglielmini, & elle avoit trouvé les climats du Nord bien plus favorables.

Les Actes de Leipsic ayant rendu compte en 1691 du Livre de la Mesure des Eaux, M. Papin fit quelques remarques & quelques objections sur l'Extrait qu'il y en avoit vû, & les fit inserer dans ce même Journal. Cela revint en gros à M. Guglielmini par des Lettres de M. Leibnits, avant qu'il pût avoir en Italie les Actes de Leipsic. Au nom de M. Papin, il eut peur de s'être trompé, car on n'en peut douter après l'aveu qu'il en fait lui-même, à moins qu'on ne veuille tenir pour un peu suspect cet aveu si glorieux, à qui entend la veritable gloire. Il vit enfin les Actes de Leipsic, & se rassura. Il écrivit à M Leibnits pour le rendre Juge du differend.

M. Papin croyoit & prétendoit démontrer que l'eau

qui ſort d'un tuyau toûjours plein a la moitié moins de viteſſe, que la premiere eau qui ſort du même tuyau qui ſe vuide. Sa raiſon étoit que dans le premier cas l'eau n'a qu'un mouvement égal & uniforme, au lieu que dans le ſecond elle a un mouvement acceleré, puiſqu'elle tombe, ou eſt cenſée tomber. M. Guglielmini détruiſit cette prétention avec toute l'honnêteté que devoit garder un homme qui s'étoit crû ſincerement capable d'erreur, il paroît par toute ſa Lettre qu'il doit avoir entierement gain de cauſe, & cependant il paroît auſſi qu'il y avoit encore en cette matiere quelque choſe qu'il ne démêloit pas, & qui lui échapoit à lui-même. Les viteſſes de l'eau qui ſont comme les racines des hauteurs, ayant préciſement entre elles le même rapport que les viteſſes des corps peſants qui tombent, les deux Adverſaires, & tous les autres Philoſophes avoient également pris cette idée fort naturelle, que les viteſſes de l'eau dépendent donc d'une acceleration cauſée par une chute; mais nous avons fait voir après M. Varignon dans l'Hiſt. de 1703 * que cette idée ſi naturelle n'eſt point vraie, & qu'il y a un autre principe de ce rapport des viteſſes de l'eau, tout different de l'acceleration, & en même temps ſi ſimple, qu'il ne feroit pas un grand merite à ſon Inventeur, s'il n'avoit été long-temps caché aux plus habiles Géometres. Faute de l'avoir connu, M. Guglielmini ne peut éviter certains embarras, d'où il tâche à ſe ſauver par des preſſions de l'air. Il ne ſuffit pas de tenir une verité, il faut auſſi, quand on veut la ſuivre un peu loin, en tenir la veritable cauſe, autrement la fauſſe cauſe d'une verité revient à enfanter des erreurs, ſes productions naturelles. La Lettre de M. Guglielmini à M. Leibnits fut ſuivie en 1692 d'une autre adreſſée à M. Magliabecchi ſur les Siphons, parcequ'il avoit trouvé dans les Actes de Leipſic que M. Papin en examinant un Siphon fait à Virtemberg, s'étoit ſervi de ſa fauſſe propoſition. Les deux Lettres furent imprimées ſous le titre de *Epiſtolæ duæ Hydroſtaticæ.*

* p. 125. & 126.

Il s'éleva en ce temps-là un different sur les eaux entre les Villes de Bologne & de Ferrare. Il s'agissoit principalement de sçavoir si on devoit remettre le cours du Reno dans le Po. Le Pape maître de ces deux Etats envoya les Cardinaux Dada & Barberin pour juger de cette affaire. Bologne chargea de ses interests le seul qu'elle en pût charger, M. Guglielmini. Les deux Cardinaux avec qui il traita prirent une si grande idée de sa capacité, qu'ils l'employerent, non seulement pour les eaux du Bolonnois, mais encore pour celles du Ferrarois, & du territoire de Ravenne, & l'engagerent à faire des desseins de differens travaux utiles, ou necessaires. Mais il lui arriva alors ce que nous avons déja dit * qui étoit arrivé à M. Viviani en pareille matiere; des Projets qui ne regardoient que le bien public n'eurent point d'exécution.

* V. l'Hist. de 1703. p. 142.

Comme M. Guglielmini avoit porté la Science des Eaux plus loin qu'elle n'avoit encore été, du moins en Italie, & qu'il en avoit fait une Science presque nouvelle, Bologne fonda dans son Université en 1694 une nouvelle Chaire de Professeur en *Hidrometrie*, qu'elle lui donna. Le nom d'Hidrometrie étoit nouveau aussi-bien que la place, & l'un & l'autre rappelleront toûjours la memoire de celui qui en a rendu l'établissement necessaire.

Il se permettoit cependant quelques distractions de son étude des Eaux, dans des occasions où il eût été difficile de résister à d'autres Sciences qui l'appelloient. Quand M. Cassini retourna à Bologne en 1695, & y raccommoda la fameuse Meridienne qu'il avoit tracée 40 ans auparavant dans l'Eglise de S. Petrone, & que differents accidents avoient alterée, M. Guglielmini l'aida dans ce grand travail astronomique, & fit même imprimer un Memoire des operations qu'on avoit fait pour la construction, & pour la verification de ce prodigieux Instrument. Il s'en servit depuis pendant plusieurs années à observer les mouvemens du Soleil & de la Lune.

En 1697 il publia ſon grand ouvrage *Della natura de' Fiumi*, qui paſſe pour ſon Chef-d'œuvre. Il le dédia à M. l'Abbé Bignon, qui l'année précédente l'avoit fait aſſocier à l'Academie Royale des Sciences, & dont le nom & le merite, ſans le ſecours d'un pareil bienfait, s'attirent ſouvent des Sçavans même étrangers de pareils hommages. La Préface roule ſur la neceſſité de porter dans la Phiſique la certitude de la Géometrie, & ſur la difficulté ſouvent inſurmontable de faire entrer les idées ſimples de la Géometrie dans la Phiſique, auſſi compliquée qu'elle eſt.

Un Phiſicien ordinaire ne doutera peut-être pas qu'il ne connoiſſe ſuffiſamment la nature des Rivieres, mais aprés avoir lû le Livre de M. Guglielmini, il demeurera convaincu qu'il ne la connoiſſoit point. Nous ne rapporterons ici que les vûës générales de ce Traité, & nous laiſſerons à imaginer ce que peuvent produire les differentes combinaiſons des principes, & les applications aux cas particuliers.

Les Fleuves près de leurs ſources deſcendent ordinairement de quelques Montagnes, & là il tirent leur viteſſe de l'acceleration de la chute, mais à meſure qu'ils s'éloignent cette viteſſe diminuë, parceque l'eau frotte toûjours contre le fond & contre les rives, qu'elle rencontre en ſon chemin differents obſtacles, & qu'enfin venant à couler dans les Plaines elle a toûjours moins de chute, & s'incline davantage à l'Horizon. Le Reno y eſt â peine incliné de 52 ſecondes vers le bas de ſon cours. Si la viteſſe acquiſe par ſa chute ſe perd entierement, ce qui peut arriver à force d'obſtacles redoublés, & après que le cours ſera devenu tout à fait horizontal, il n'y a plus que la hauteur, ou la preſſion toûjours proportionnée à la hauteur, qui puiſſe rendre de la viteſſe à l'eau, & la faire couler. Heureuſement cette reſſource croît ſelon le beſoin, car à meſure que l'eau perd de ſa viteſſe acquiſe par la chute, elle s'éleve, & augmente en hauteur.

Les parties ſuperieures de l'eau d'une Riviere, & éloignées des bords, peuvent couler par la ſeule cauſe de la déclivité, quelque petite qu'elle ſoit, car n'étant arrêtées par aucun obſtacle elles peuvent ſentir avec délicateſſe, pour ainſi dire, la moindre difference du niveau, mais les parties inferieures, qui frotent contre le fond, ne ſeroient pas ſuffiſamment muës par une ſi petite déclivité, & elles ne le ſont que par la preſſion des ſuperieures.

La viſcoſité naturelle des parties de l'eau, & une eſpece d'engrainement qu'elles ont les unes avec les autres, fait que les inferieures muës par la hauteur entraînent les ſuperieures, qui dans un canal horizontal n'auroient eu d'elles-mêmes aucun mouvement, ou dans un canal peu incliné en auroient eu peu. Ainſi les inferieures en ce cas rendent aux ſuperieures une partie du mouvement qu'elles en ont reçû. Delà vient auſſi qu'aſſés ſouvent la plus grande viteſſe d'une riviere eſt vers le milieu de ſa hauteur, car ces parties du milieu ont l'avantage & d'être preſſées par la moitié de la hauteur de l'eaü, & d'être libres des frotements du fond.

On peut reconnoître ſi l'eau d'une riviere à peu près horizontale coule par la viteſſe acquiſe dans la chute, ou par la preſſion de la hauteur. Il ne faut qu'oppoſer à ſon cours un obſtacle perpendiculaire ; ſi l'eau s'éleve ſubitement contre cet obſtacle, elle couloit en vertu de ſa chute, ſi elle s'arrête quelque temps, c'étoit par la preſſion.

Les Fleuves ſe font preſque toûjours leur lit. Que le fond ait d'abord une grande pente, l'eau qui par conſequent aura beaucoup de chute & de force emportera les parties de ce terrain les plus élevées, & les entraînant plus bas, rendra ce fond plus horizontal. C'eſt ſous le fil de l'eau qu'eſt ſa plus grande force de creuſer, & par conſequent c'eſt-là que le fond s'abbaiſſe le plus, & il s'y fait une plus grande concavité. L'eau qui a rendu ſon lit plus horizontal l'eſt devenuë auſſi davantage, & par-là elle

elle a moins de force de creuser, enfin cette force étant diminuée jusqu'à n'être plus qu'égale à la resistance du fond, voilà le fond en état de consistence, du moins pour un tems considerable. Les fonds de craye résistent plus que ceux de sable, ou de limon.

D'un autre côté, l'eau ronge & mine ses bords, & avec d'autant plus de force que par la direction de son cours elle les rencontre plus perpendiculairement. Elle tend donc en les rongeant à les rendre paralleles à son cours, & quand elle y est parvenuë autant qu'il est possible, elle n'a plus d'action sur eux à cet égard. En même temps qu'elle les a rongés, elle a élargi son lit, c'est-à-dire qu'elle a perdu de sa hauteur & de sa force, ce qui étant arrivé à un certain point, il se fait encore un équilibre entre la force de l'eau, & la résistance des bords, & les bords sont établis.

Il est manifeste par l'experience que ces équilibres sont réels, puisque les rivieres ne creusent & n'élargissent pas leurs lits à l'infini.

Tout le contraire de ce que nous venons de dire arrive pareillement. Les Fleuves dont les eaux sont troubles & bourbeuses haussent leur lit, en y laissant tomber les matieres étrangeres, lorsqu'ils n'ont plus la force de les soûtenir. Ils rétrecissent aussi leurs bords, parce que ces mêmes matieres s'y attachent, & y forment comme des enduits de plusieurs couches. Ces matières rejettées loin du fil de l'eau à cause de leur peu de mouvement, peuvent même suffire pour faire des bords.

Ces effets opposés se rencontrent presque toûjours ensemble, & se combinant très-differemment selon le degré dont ils sont chacun en particulier, il n'est pas aisé de juger le produit qui en résultera. Cependant c'est cette combinaison embarrassée qu'il faut saisir assés juste, quand on a affaire à un fleuve, qu'on veut, par exemple, détourner de son cours. On peut compter qu'il agira toûjours selon sa nature, & qu'il s'accommodera lui-même un lit, & se fera un cours tel qu'il lui conviendra

M. Guglielmini rapporte qu'au commencement du Siécle passé le Lamone qui se rendoit dans le Po di Primaro en fut détourné, parcequ'on vouloit qu'il s'allât jetter seul dans le Golphe Adriatique. Il est arrivé que le Lamone devenu plus foible quand il n'a eu que ses propres eaux, a tellement haussé son lit par des dépositions de limon & de fange, qu'il s'est trouvé plus haut que n'est le Po dans ses plus fortes cruës, & qu'il a eu besoin de levées très-hautes.

La necessité de faire des levées ou digues aux rivieres peut venir de plusieurs causes. Voici les principales. 1°. Si les rivieres sont tortueuses, leurs bords qui les arrêtent à l'endroit des sinuosités font élever les eaux, & leur donnent plus de force pour les ronger eux-mêmes, & pour les percer, après quoi elles se répandent dans les campagnes. 2°. Les rives peuvent être foibles, comme celles que les fleuves se sont faites eux-mêmes par la déposition des matieres étrangeres qu'ils charioient. Telles sont les rives de la plûpart des fleuves de la Lombardie, & non-seulement ces rives, mais les plaines mêmes ont été formées par les fleuves. Il est bon de remarquer que les plaines faites ainsi par *alluvion* sont plus hautes vers les bords des rivieres qui les ont produites, & toûjours ensuite plus basses. 3°. Les fleuves qui courent sur du gravier fort gros sont sujets dans leurs cruës à en faire de grands amas, qui ensuite détournent leur cours. Ils sont indomptables le plus souvent, témoin la Loire, au lieu que ceux qui ont un fond de sable leger sont plus traitables.

Un petit fleuve peut entrer dans un grand sans augmenter sa largeur, ni même sa hauteur. Ce paradoxe apparent est fondé sur ce qu'il est possible que le petit n'ait fait que rendre coulantes dans le grand les eaux des bords qui ne l'étoient point, & augmenter la vitesse du fil, le tout dans la même proportion qu'il a augmenté la quantité de l'eau. Le bras du Po de Venise a absorbé le bras de Ferrare, & celui du Panaro sans aucun élar-

giſſement de ſon lit. Il faut raiſonner de même à proportion de toutes les cruës qui ſurviennent aux Rivieres, & en général de toute nouvelle augmentation d'eau, qui augmente auſſi la viteſſe.

Si un fleuve qui ſe preſenteroit pour entrer dans un autre fleuve, ou dans la Mer, n'étoit pas aſſés fort pour en ſurmonter la réſiſtance, il s'éleveroit, ou parceque ſa viteſſe ſeroit retardée, ou parceque les eaux qui devroient le recevoir regorgeroient dans les ſiennes; mais par cette élevation il acquerroit la force neceſſaire pour entrer, il la tireroit de l'oppoſition même qu'il auroit à combattre.

Un fleuve qui entreroit perpendiculairement dans un autre, ou même contre ſon courant, ſeroit détourné peu à peu de cette direction par celui qui le recevroit, & obligé à ſe faire un nouveau lit vers ſon embouchure.

L'union de deux rivieres en une les fait couler plus vîte, parce qu'au lieu du frotement de 4 rives elles n'ont plus que celui de 2 à ſurmonter, que le fil plus éloigné des bords va encore plus vîte, & qu'une plus grande quantité d'eau muë avec plus de viteſſe creuſe davantage le fond, & diminuë la premiere largeur. Delà vient auſſi que les rivieres unies occupent moins d'eſpace ſur la ſurface de la Terre, permettent plus facilement que les campagnes un peu baſſes y déchargent leurs eaux ſuperfluës, & ont moins beſoins de levées qui empêchent leurs inondations. Ces avantages ſont tels que M. Guglielmini les croit dignes d'avoir été enviſagés par la Nature, lorſqu'elle a rendu l'union des fleuves ſi ordinaire.

Ce ſont-là les principes les plus généraux du Traité *Della natura de' Fiumi.* L'Auteur en fait l'application à tout ce qu'il appelle *l'Architecture des Eaux*, c'eſt-à-dire, à tous les Ouvrages qui ont les Eaux pour objet, aux nouvelles communications de rivieres, aux Canaux que l'on tire pour arroſer des Pays qui en ont beſoin, aux Ecluſes, au deſſechement des Marais, &c.

Ce Livre, original en cette matiere, eut un grand

éclat. Cremone, Mantouë, & quelques autres Villes eurent recours au fameux Architecte des Eaux. Il ordonna les travaux qui leur étoient necessaires, mais son art brilla principalement dans des levées qu'il fit au Po audessous de Plaisance, où ce fleuve faisoit de grands ravages, & menaçoit d'en faire encore de plus grands.

La Republique de Venise l'envia à l'Etat de Bologne, & lui donna en 1698 la Chaire de Mathematique à Padouë. Cependant sa Patrie pour se le conserver autant qu'il étoit possible, & pour se pouvoir toûjours vanter qu'il lui appartenoit, voulut qu'il gardât le titre de Professeur dans son Université, & lui continua même ses apointemens.

Venise ne le laissa pas long-temps dans des exercices tranquilles & dans l'ombre d'une Université. En 1700 elle l'envoya en Dalmatie réparer les ruines de Castelnovo, & quelque temps après dans le Frioul, où un Torrent très-impetueux qui avoit déja détruit plusieurs Villages étoit prêt à tomber sur l'importante Forteresse de Palme. M. Guglielmini fait sentir tant d'amour pour le bien public dans ses ouvrages, même dans ceux où la sécheresse mathématique domine, qu'il faut lui compter tous ses voyages, & toutes ses fatigues, pour autant d'agrémens dans sa vie.

Peut-être l'envie de servir le Public de toutes les manieres dont il le pouvoit servir, le fit-elle retourner à la Medecine, qu'il sembloit avoir sacrifiée aux Mathématiques. Il prit en 1702 la Chaire de Professeur en Medecine Théorique à Padouë, & quitta celle qu'il avoit auparavant. Une Dissertation qu'il avoit publiée l'année précedente *De Sanguinis natura & constitutione*, avoit pû être un préfage de ce changement, c'étoit du moins une preuve & de son grand travail, & de la grande étenduë de ses connoissances.

Mais il en donna une beaucoup plus éclatante par son Livre intitulé *De Salibus Dissertatio Epistolaris Physico-Medico-Mechanica*, imprimé à Venise en 1705. Il n'y a

pas encore fort long-temps que tous les raiſonnemens de Chimie n'étoient que des eſpeces de fictions poëtiques, vives, animées, agréables à l'imagination, inintelligibles, & inſupportables à la raiſon. La ſaine Philoſophie a paru, qui a entrepris de réduire à la ſimple méchanique corpuſculaire cette Chimie ſi myſterieuſe, & en quelque façon ſi fiere de ſon obſcurité. Cependant il faut avoüer qu'il lui reſte encore chez quelques Auteurs des traces de ſon ancienne poëſie, des unions preſque volontaires, des combats qui ne ſont guere fondés que ſur des inimitiés, & quelques autres idées qui peuvent ne pas convenir au ſévere méchaniſme. M. Guglielmini paroît avoir eu une extrême attention à ne leur pas permettre de ſe gliſſer dans ſa Diſſertation chimique, il y rappelle tout avec rigueur aux regles d'une Phyſique exacte & claire, & pour épurer la Chimie encore plus parfaitement, & en entraîner toutes les ſaletés, il y fait paſſer la Géometrie. Le fondement de tout l'ouvrage eſt que les premiers principes du Sel commun, du Vitriol, de l'Alun, & du Nitre ont par leur premiere création des figures fixes & inalterables, & ſont indiviſibles à l'égard de la force déterminée qui eſt dans la matiere. Le Sel commun primitif eſt un petit Cube, le Sel du Vitriol un Parallelepipede rhomboïde, celui du Nitre un Priſme qui a pour baſe un Triangle équilateral, celui de l'Alun une Piramide quadrangulaire. De ces premieres figures viennent celles qu'ils affectent conſtamment dans leurs criſtalliſations, pourvû qu'on les tienne auſſi exempts qu'il ſe puiſſe de tout mêlange, & de tout trouble étranger. Quand il s'agit de l'action des Sels, M. Guglielmini examine géometriquement & méchaniquement les proprietés de ces figures par rapport au mouvement, & en vient à un détail aſſés curieux, & fort nouveau dans un Traité de Chimie. Il ne rapporte pas d'expériences, ni d'obſervations nouvelles qu'il ait faites, il établit ſon ſiſtême ſur celles des plus fameux Auteurs, parmi leſquels il cite ſouvent les Confreres qu'il avoit dans cette Académie,

M[rs] Homberg, Lémery, Boulduc, Geoffroy. En un mot, ce n'est pas tant la Chimie qui domine dans ce Traité que la Géometrie, & ce qui vaut encore mieux, l'esprit géometrique.

Quand on achevoit l'Impression de ce Livre, il reçût l'Histoire de l'Academie de 1702 Il y trouva un sentiment de M. Homberg tout opposé au sien, que les figures constantes des Sels Acides dans leurs cristallisations ne viennent pas des premieres particules qui les composent, mais des Alcali avec lesquels il se sont unis. Il avouë qu'il eut peur que l'autorité d'un si grand Chimiste ne fut seule suffisante pour renverser tout son sistême, & il se hâta de le mettre à couvert par une Réponse, qui pour être fort honnête & fort polie ne perd rien de sa force, & peut-être en a davantage.

Il fit encore deux ouvrages de Phisique, l'un intitulé *Exercitatio de Idearum vitiis, correctione, & usu ad statuendam & inquirendam morborum naturam* en 1707., & l'autre *De Principio Sulphureo* en 1710, & ce qui est fort glorieux pour lui, la datte de ce dernier ouvrage est celle de sa mort. Sa vie entiere a été dévoüée aux Sciences. Ceux qui les aiment avec moins d'emportement pourroient lui reprocher ses excès, qui à la verité ruinerent en lui un temperament très-robuste, mais qui cependant ne peuvent être blâmés qu'avec respect. Il avoit cet exterieur que le Cabinet donne ordinairement, quelque chose d'un peu rude & d'un peu sauvage, du moins pour ceux à qui il n'étoit pas accoûtumé ; *il méprisoit*, dit le Journal des Sçavans d'Italie, *cette politesse superficielle dont le monde se contente, & s'en étoit fait une autre qui étoit toute dans son cœur.*

Sa place d'Academicien Associé Etranger a été remplie par Mylord Comte de Pembroke.

FIN.

MEMOIRES



MEMOIRES
DE
MATHEMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE.
TIREZ DES REGISTRES
de l'Académie Royale des Sciences.
De l'Année M. DCCX.

EXPERIENCES
SUR LE RESSORT DE L'AIR.

PAR M. CARRÉ.



ISANT il y a quelques jours dans l'Hiſtoire de l'Académie de l'année 1708, page dix-huitiéme quelques expériences faites par Monſieur Parent, par leſquelles il prétend appuïer l'opinion qu'il a, que l'air n'a point de reſſort : il me parut que la matiere étoit aſſez de conſéquence pour ne me pas rendre aux raiſonne-

Juillet 1709.

mens ni aux expériences de M. Parent, ſans l'avoir examinée de nouveau : Car il faut bien remarquer une choſe à laquelle on ne fait peut-être pas aſſez d'attention ; c'eſt qu'on eſt ſujet à tomber dans l'erreur lorſqu'on veut établir ſes Concluſions ſur une expérience ou deux, qui auront réüſſi conformement à nos idées, ſur tout quand il s'agit de détruire un ſentiment reçû par les Eſprits du premier ordre, fondé ſur un grand nombre d'expériences, & confirmé par des raiſonnemens ſolides.

Je me ſuis donc déterminé à réïterer les expériences de M. Parent, & à les accompagner de pluſieurs autres qui pourront ſervir à éclaircir la matiere. Mais avant que de les rapporter, il eſt bon de tranſcrire ce qu'en a dit M. Fontenelle. Le voici. *Une expérience ſinguliere & fort ſurprenante s'accorde avec cette penſée ou plûtot la prouve. M. Parent a pris pluſieurs petites phioles de verre rondes, d'environ un pouce de diametre, avec un col fort long comme 8 à 10. pouces, & large d'une ligne. Il a mis dans chacune de ces phioles une liqueur differente & en aſſez petite quantité, de l'eau, du vin, de l'eſprit de vin, de l'huile de tartre, de l'huile de petrole, du mercure : Enſuite il a fait entrer leur col dans un trou fait au Recipient d'une machine pneumatique, il a pompé l'air, après quoi il a fondu avec la lampe la partie du col qui étoit en dehors, en la tortillant, & auſſi-tôt le poids de l'air environnant l'a ſcellée hermetiquement, de ſorte qu'on étoit ſûr que toutes ces Phioles étoient bien vuides d'air. Il y en avoit en même tems d'autres toutes pareilles, & bien ſcellées auſſi, où l'on avoit laiſſé tout l'air qu'elles pouvoient contenir. On mettoit les unes & les autres ſur les charbons ardens ; celles qui étoient pleines d'air, & qui par la grande augmentation que la chaleur cauſoit à ſa force de reſſort, auroient dû crever avec grand bruit, ne faiſoient que ſe fondre paiſiblement par cette ouverture. Celles au contraire qui ne contenoient point d'air, mais ſeulement un peu de liqueur faiſoient toutes une grande détonation, & ſautoient en éclats. Que devient dans ce phénomene le reſſort de l'air ? Il paroît que la matiere étherée introduite par le feu dans les phioles ne*

pouvoit pas faire contre leurs parois interieurs un aussi grand effort par le moyen des particules de l'air, subtiles & déliées comme elles le sont, que par le moyen des particules plus massives de ces autres liqueurs.

Parlà on expliqueroit fort aisément pourquoi l'humidité augmente à un si haut degré les effets qu'on attribuoit au ressort de l'air. On ne seroit plus en peine de sçavoir comment ce ressort peut agir dans de grandes rarefactions, où il ne semble pas que les parties de l'air puissent se toucher ni s'appuier les unes sur les autres. Mais nous étendrions peut-être les conséquences plus loin qu'il ne nous est permis presentement, il y a pour les veritez de Physique une certaine maturité, que le tems seul peut leur donner. Voici maintenant mes expériences.

J'ai fait faire d'abord par le sieur de Ville Emailleur, quatre petites phioles de verre à long col, semblables à celles de M. Parent, & préparées de la même maniere. La 1re étoit pleine d'air grossier: la 2e vuide d'air grossier: la 3e pleine d'air grossier avec une petite quantité d'eau commune: la 4e étoit vuide d'air grossier, & où il y avoit aussi une très-petite quantité d'eau. Elles étoient toutes scellées hermetiquement. Les ayant mises les unes après les autres sur les charbons ardens, voici ce qui est arrivé. Celle où il n'y avoit que de l'air grossier,& qui a été quelque tems sans faire son effet à cause qu'elle étoit un peu plus épaisse que les autres, s'est ouverte par un endroit qui s'est un peu allongé auparavant, & on a entendu une espece de sifflement causé par l'air qui en est sorti sans un bruit éclatant. La 2e a fait à peu près le même effet: le sifflement a été un peu plus fort; la partie de la phiole la plus échauffée s'est allongée un peu davantage & a cedé plus promptement. La 3e a fait en fort peu de tems une grande détonation & a sauté en éclats fort petits. La 4e a aussi crevé avec bruit & fort promptement, quoiqu'il ne s'y soit fait qu'un petit trou.

J'ai ensuite fait faire quatre autres petites phioles semblables aux précedentes. La 1re qui étoit pleine d'air a demeuré assez long-tems sur les charbons sans faire son ef-

fet, puis elle a crevé avec assez de bruit en s'allongeant; & il s'y est fait un assez grand trou.

La 2e qui étoit aussi pleine d'air, a fait à peu près le même effet, mais avec moins de bruit, l'endroit par où elle a crevé, s'est plus allongé, & le trou étoit plus petit.

La 3e & 4e qui étoient vuides d'air grossier, ont rentré en dedans sans crever, sur tout la 4e, de maniere que la moitié de la convexité qui touchoit les charbons, s'est appliquée assez exactement sur l'autre moitié, & ne composoit plus qu'un hemisphere creux. Il paroît que c'est-là ce qui doit toûjours arriver dans cette expérience, parce que l'air exterieur, quoique très-dilaté par la chaleur, doit presser plus fort, que l'air subtil du dedans ne lui résiste, & obliger ainsi la partie la plus échauffée de la phiole de rentrer en dedans. Et si cela n'est pas arrivé dans la premiere expérience semblable, c'est apparemment parce qu'il étoit resté assez d'air ou de quelque autre matiere dans la phiole pour la faire crever.

N'étant pas encore content de ces expériences, j'ai fait faire quinze autres petites phioles semblables aux précedentes, dont voici le détail avec les effets que le feu a produits.

La 1re étoit pleine d'air naturel : l'ayant mise sur les charbons, elle s'est cassée en morceaux en fort peu de tems avec un peu de bruit : ce qui n'étoit pas arrivé dans les premieres expériences semblables.

La 2e étoit vuide d'air grossier : elle s'est fonduë sans crever, & s'est changée en hemisphere creux comme cy-devant.

La 3e étoit pleine d'air avec un peu d'eau, elle a crevé avec grand bruit en peu de tems.

La 4e étoit vuide d'air avec un peu d'eau; elle a crevé en peu de tems, & le bruit a été un peu plus fort que celui de la précedente.

La 5e étoit pleine d'eau : elle est demeurée fort peu de tems sur les charbons, qu'elle a jettez de tous côtez en crevant avec un très-grand bruit.

La 6e étoit pleine d'eau vuidée d'air : le col s'est cassé, & a fait une espece d'Eolipile qui a duré assez de temps, & quoique le feu fut fort ardent, la phiole n'en a reçû aucun changement.

La 7e étoit vuide d'air avec un peu d'esprit de vin coloré : elle a crevé presque aussi tôt qu'elle a été mise sur les charbons avec assez de bruit.

La 8e étoit pleine d'air avec un peu de sel marin en poudre : elle s'est fonduë, & il s'y est fait un petit trou avec bruit.

La 9e étoit pleine d'air avec un peu de salpêtre : il s'y est fait un petit trou en très-peu de tems avec un peu de bruit.

La 10e étoit pleine d'air avec un peu d'urine : elle a crevé en peu de tems avec assez de bruit.

La 11e étoit vuide d'air avec un peu d'eau salée : elle a crevé avec un fort grand bruit & en peu de tems.

La 12e étoit vuide d'air avec un peu d'or fulminant : elle a crevé presque aussi-tôt qu'elle a été mise sur les charbons avec un peu de bruit.

La 13e étoit vuide d'air avec un peu de soufre : elle s'est fonduë, & a rentré en dedans sans crever, le soufre s'est aussi fondu, & a monté au haut du col de la phiole.

La 14e étoit pleine d'air avec un peu d'huile de lampe : elle a demeuré assez long-tems sur les charbons, puis elle a crevé avec un assez grand bruit.

La 15e étoit vuide d'air avec une goute de mercure d'une ligne de diametre ou environ : elle est demeurée sur les charbons pendant trois minutes sans recevoir aucun changement. Quand elle a été refroidie, on l'a remise sur le feu pendant 7 ou 8 minutes sans produire aucun effet, le mercure se tenant toûjours au haut du col. On y a seulement apperçû une petite felure.

Il paroît que toutes ces expériences, bien loin de détruire le ressort de l'air, servent plûtôt à l'établir. Mais il semble aussi que la dilatation ni le ressort de l'air enfermé, ne sont pas la cause immediate du bruit, & de

l'éclat des parties du verre, puiſque quelques-unes des phioles qui ont été remplies d'air, ont crevé ſans faire de bruit ; dont la raiſon eſt que la force du reſſort de l'air auſſi-bien que des autres corps, ne conſiſtant que dans le débandement de ſes parties, & pouſſant également de tous côtez, & cela ſucceſſivement & uniformement, à proportion de l'action de la matiere ſubtile dans ſes pores, cette force ſe diſtribuant ſur toutes les parties de la phiole où il eſt enfermé, celle qui eſt la plus échauffée venant à ſe fondre, cede & donne paſſage à l'air qui ſort à peu près de même, que celui d'une Eolipide : Car ne ſe dilatant pas aſſez promptement, il ne briſe pas les parois de la bouteille. Mais quand l'air eſt mêlé avec quelques autres parties de matiere ſuſceptibles d'un grand mouvement, & d'une dilatation prompte & ſubtile, alors il produit le bruit que l'on entend, & met le vaiſſeau en pieces. L'on ne voit pas bien la méchanique de l'action de ces petites parties de matiere pour cauſer ce fracas. Et il faut avoüer que les moindres expériences ſont ſouvent capables d'embaraſſer l'eſprit d'un Phyſicien, qui ne reconnoît point d'autre force ni d'autre vertu dans les corps, que celle qui ſe tire du mouvement & de la figure de leurs parties. Mais quoique ſouvent l'on ne faſſe que deviner, en voulant expliquer quelques effets ou quelques expériences particulieres : on ne laiſſe pas de reconnoître que c'eſt un ſentiment veritablement ridicule, que de vouloir établir un Pyrrhoniſme abſolu dans la Phyſique, & qu'en cette ſcience auſſi-bien que dans pluſieurs autres, on eſt réduit à cette propoſition, qu'on eſt venu à connoître qu'on ne peut rien ſçavoir.

Voici encore deux expériences qui meritent d'être rapportées ici, à cauſe du rapport qu'elles ont avec les précedentes, & qui prouvent la force étonnante de la dilatation des liqueurs : à quoi ceux qui en font des expériences doivent prendre garde, de crainte d'être bleſſez. Une Eolipide ayant été miſe ſur les charbons, & le feu ayant été pouſſé un peu violemment, elle ſauta de deſſus

ſe rechaut, & alla donner contre un pilier de table qui étoit à deux ou trois pieds de là, avec aſſez de force pour ſe boſſuër, & piroüetta encore pendant quelque tems.

La ſeconde expérience a été faite à l'Académie *del Cimento.* On a pris un tuyau de verre long d'un pied & demi ou environ, dont les extremitez ſe terminoient en boule d'une égale capacité : une de ces boules étoit ouverte comme ſi le tuyau étoit prolongé en paſſant au travers. On a verſé dans le tuyau une quantité d'eau de vie ſuffiſante pour remplir la boule inferieure & la moitié du tuyau: puis on a ſcellé hermetiquement l'ouverture de la boule ſuperieure. L'on a plongé le tout dans un vaiſſeau plein d'huile, que l'on a fait bouillir ſur le feu en ſoufflant continuellement ſur les charbons ; l'eau de vie a monté dans la boule ſuperieure, & a fait crever le tout avec tant d'impetuoſité, qu'ayant employé un vaiſſeau de cuivre au lieu d'un de verre, le fond s'eſt rompu. Et ayant employé une autre fois un vaiſſeau de fer de l'épaiſſeur d'une piaſtre, il s'eſt auſſi crevé & a emporté un éclat de pierre du pavé.

REMARQUES.

Sur la conſtruction des Lieux Géometriques & des Equations.

PAR M. DE LA HIRE.

7. Decembre 1709.

NOus ne trouvons pas qu'avant M. Deſcartes on eût donné une Méthode pour la conſtruction des Equations, par deux lieux dont les rencontres ſervent à en déterminer les racines, & dont il a ſeulement propoſé quelques exemples dans ſa Géometrie. On s'eſt appliqué depuis à expliquer cette Méthode, & il ne paroiſſoit pas à ceux qui en ont écrit, qu'elle dût être ſoupconnée d'aucune erreur, puiſqu'elle étoit fondée ſur des principes ſi

clairs & si simples, que la démonstration en étoit toute évidente & ne meritoit pas de s'y arrêter. Cependant des Géometres du premier ordre ont crû y trouver des défectuositez, & l'on est venu jusqu'à dire qu'on n'en peut imaginer aucune qui n'y soit, ce qu'on fair voir par des exemples. Enfin on a crû ces exemples si convainquans qu'un Auteur celebre souhaite une démonstration *à priori* de la cause de ces erreurs.

C'étoit aussi mon sentiment lorsqu'on publia ces exemples, & le même Auteur ajoûte que cette démonstration dépendroit d'une Théorie d'Algebre fort nouvelle & fort curieuse, & que les grands progrès que l'on fait de jour en jour, semblent promettre qu'on ira bientôt jusque là.

Mais il me semble qu'on ne doit pas accuser de défaut une Méthode géometrique, dont l'application qu'on en fait dans quelques exemples pourroit avoir des défectuositez; & c'est ce qui m'a engagé à reprendre cette espece d'étude que j'avois abandonnée depuis plus de 30 ans.

En 1678 je donnai au Public dans un petit Livre trois Traitez, le premier contenoit des Elemens des Sections coniques décrites sur un plan par une proprieté de leurs foyers, & j'y joignis la construction des Lieux & celle des Equations, où je tâchai d'expliquer ce qui s'y rencontre ordinairement: mais depuis ce tems là il s'est trouvé plusieurs cas sur ce sujet, lesquels ne paroissent pas pouvoir se résoudre par les mêmes regles quoique géometriques & générales, & c'est ce que j'expliquerai dans ce Mémoire tant sur la construction des lieux en particulier que sur leurs constructions combinées dont on tire la résolution des Equations, ce qui servira de Suplement à ce que j'en ai donné autrefois.

On a toûjours consideré deux especes de lieux plans, les uns à la ligne droite & les autres aux Courbes de quelque genre qu'elles puissent être; mais il y a quelques-uns de ces lieux qui ne sont pas toûjours ce qu'ils paroissent dans leur formule, & c'est ce qui pourroit les faire regarder comme de nouveaux lieux de la même

espece,

eſpece ; leſquels n'apportent neanmoins aucun changement aux regles générales ; mais en découvrant & en expliquant ce qu'elles renferment, on vient à réſoudre des difficultez qui pouvoient faire croire que les regles étoient défectueuſes.

On ſçait que les Lieux géometriques plans ne ſont que des lignes droites ou courbes tracées ſur un plan, & dont tous les points ſont déterminez par l'extrémité d'une ligne droite qui peut changer de grandeur, & qui fait un angle conſtant avec une autre ligne droite qu'elle parcourt par ſon autre extrémité, & cette ſeconde ligne qui eſt parcouruë par la premiere peut être conſiderée indéfinie d'un côté & d'autre, mais elle a un point fixe qu'on appelle l'origine du lieu. J'avois appellé cette ſeconde ligne la *Tige* du lieu, & la premiere, dans ſes differentes poſitions ſur la ſeconde en la parcourant, les *Rameaux* du lieu. On a auſſi appellé depuis les parties de la Tige, les *Abſciſſes*, & les Rameaux les *Ordonnées*.

Ce ſont ces parties de la Tige ou Abſciſſes, & ces Rameaux ou Ordonnées qui changent de grandeur pour chaque point du lieu, & ce ſont ces deux eſpeces de lignes qui ſont les indéterminées de l'équation qui déterminent la nature du lieu par leur raport entr'elles & à d'autres quantitez connuës qui ſont mêlées dans l'équation : & comme toute équation ſe peut réſoudre à une analogie qui contient deux raports ſemblables, on peut dire que les indéterminées d'un lieu ont dans toutes leurs grandeurs differentes, un raport entr'elles qui s'exprime toûjours de la même maniere. Ainſi lorſque les lieux ſont entiers & parfaits, ils doivent contenir toutes les differentes grandeurs des indéterminées entr'elles, leſquelles peuvent s'exprimer par la même équation, ſoit que ces grandeurs ſoient affirmatives ou négatives.

DE LA CONSTRUCTION DES LIEUX & premierement des Lieux ſimples.

Je parlerai premierement de la Conſtruction des Lieux

ſimples, qui ſont ceux qu'on ne peut exprimer ni réduire à un moindre nombre de termes comme $aay = x^3$. $aa = xx + yy$. $xxy = a^3$ &c. Car c'eſt par leur moyen qu'on peut conſtruire les Compoſez.

Il y a pluſieurs manieres de faire les réductions des Lieux compoſez aux ſimples; les réductions lineaires ſont fort ſimples, mais les réductions par d'autres courbes demandent quelquefois encore de nouvelles réductions. Les Exemples ſuivans nous en fourniront des modéles.

Je ſuppoſeray dans tous les Exemples que les angles des deux indéterminées qui forment le lieu, ſeront droits, quoiqu'on les puiſſe faire pour l'ordinaire tels qu'on voudra.

PREMIER EXEMPLE.

FIG. I. Si l'on propoſe pour équation d'un lieu $ay = xx$, on ſçait que c'eſt la parabole quarrée ou la premiere parabole BAC dont les $AO = + y$, les $OC = + x$, les $OB = - x$, & le parametre $= a$, l'origine du lieu étant en A; car $- x$ quarré fait auſſi-bien $+ xx$ que $+ x$, & l'on ne peut point prendre des $- y$ ſur OA prolongée au-delà de A; car on auroit $- ay$ qu'on ne pourroit pas égaler à $+ xx$ pour rendre l'équation du lieu.

II. EXEMPLE.

Mais ſi l'on propoſe le quarré de l'équation précedente ſous cette forme $aayy = x^4$ qui eſt une parabole quarrée-quarrée, nous trouverons que c'eſt la même que la premiere ou la précedente, mais qui eſt doublée au deſſus du ſommet A & ſur le même axe : car premierement il eſt évident que le Quarré-quarré de OC ou $FE = + x$; & de OB ou $FD = - x$ ſeront auſſi $+ x^4$, & que le quarré de $+ ay$ ou $- ay$, c'eſt à-dire de $a =$ parametre par AQ ou AF ſera auſſi $+ aayy$.

III. & IV. EXEMPLE.

Des deux paraboles cubiques ſimples celle dont l'équa-

tion eſt $aay = x^3$ n'eſt que la moitié de la parabole quarré-quarrée qui va d'un côté de l'axe de C en A & paſſe de l'autre de A en D ; car $aa \times + y = AO$ ſera $+ aay = + x^3$ qui eſt CO, & $aa \times - y$ qui eſt AF ſera $- aay = - x^3$ qui eſt le cube de $FD = - x$, & cette équation $- aay = - x^3$ eſt auſſi $+ aay = + x^3$ qui eſt la propoſée.

Mais l'autre parabole cubique dont l'équation eſt $+ ayy = + x^3$ ne peut être que CAE moitié encore de la parabole quarré-quarrée, mais priſe d'un même côté de l'axe, ce qui eſt facile à voir : car $+ x^3$ ne ſçauroit jamais être produit par $- x$, quoique $+ ayy$ puiſſe être produit par $+$ ou $- y$.

V. & VI. EXEMPLE.

Les deux paraboles cube-cubes $a^4yy = x^6$ & $aay^4 = x^6$, qui ont pour leurs racines les deux précedentes, ne font que la même, & qu'on peut conſiderer comme formées chacune par celles de leurs racines doublée des deux côtez de l'axe, qui ne ſera auſſi que la ſimple repetée au-deſſus & au deſſous du ſommet, comme la quarré-quarrée. Ce qui eſt facile à connoître par les produits des ſignes de leurs termes, comme on a fait pour les précedentes.

VII. EXEMPLE.

Mais pour la parabole $a^3y^3 = x^6$ dont la racine cubique eſt $ay = xx$, elle ne peut être que la premiere parabole BAC qui eſt ſa racine, comme on le connoîtra facilement par les ſignes qui doivent préceder les valeurs des indéterminées, en ſuivant ce qui vient d'être expliqué.

Les conſtructions de ces paraboles ne ſont pas toûjours compoſées à proportion de l'élevation des inconnuës de l'équation, comme celles dont l'équation eſt $a^5y = x^6$ ou $ay^5 = x^6$, car elles n'ont pas d'autre forme que la premiere BAC, puiſque $+$ ou $- x$ donnera $+ x^6$, & ſeulement $+ y$ peut fournir l'autre terme avec le ſigne $+$ ou affirmatif.

Ce ſera la même choſe pour les autres paraboles $ay^5 = x^4$ ou $a^3y = x^4$. Mais pour $ay^4 = x^5$ elle retombe à la forme de la cubique *CAE*, & $a^4y = x^5$ revient à l'autre cubique *CAD*. Il ſera fort aiſé de connoître la figure de toutes ces ſortes de paraboles à quelque degré qu'elles ſoient élevées en examinant le produit des ſignes de leurs termes comme on a fait pour les précedentes.

Je ne m'arrêteray pas à expliquer la conſtruction des équations des lieux $aa = yy + xx$ qui eſt au Cercle, ou $aa = yy - xx$ qui eſt à l'hyperbole équilatere ; car elles ſont trop connuës ; non plus que celles des Ellipſes & des autres hyperboles ſimples.

VIII. EXEMPLE.

FIG. II. Mais ſi l'on propoſe ce lieu $a^3 = y^3 + a^3$ qui a la forme d'un lieu au cercle & qui n'en ſçauroit être un, on voit que pour le conſtruire, il en faut déterminer tous les points *D* ſur les $CO = y$ comme déterminées ; car alors on aura l'équation $a^3 - y^3$, ce qui ſera donné ou connu $= x^3$, & ce qui ſe peut faire dans quelques cas par la Géometrie ordinaire, où l'on pourra trouver quelques abregez pour l'expreſſion de tous les y, & dans d'autres par les conſtructions des équations.

Ce ſera la même choſe pour cette forme d'hyperbole équilatere dont l'équation ſeroit $y^3 - a^3 = x^3$, & pour toutes les autres équations ſemblables qui auront la forme des Ellipſes & des hyperboles, à quelque degré qu'elles ſoient élevées, & pour toutes leurs differentes racines.

IX. EXEMPLE.

FIG. III. L'équation $xy = aa$ eſt à l'hyperbole entre ſes aſymptotes, ce qui eſt très-connu : mais les autres plus compoſées qui ont la même forme ſont differentes comme $xxyy = a^4$. Car l'équation $yx = aa$ convient aux hyperboles oppoſées *IB*, *EH* entre leurs aſymptotes *FG*, *AD*, ce qui eſt évident. Mais le quarré des deux termes de cette équation $yyxx = a^4$ ſera les mêmes hyperboles conju-

guées ou les mêmes repetées dans les quatre angles des asymptotes. Ainsi la racine de cette équation quarré-quarrée ne donneroit que partie du lieu. Ce qui est évident, puisque $CG \times GK$ seroit $-yx = + aa$, ce qui ne se peut égaler; mais son quarré seroit $+ yyxx = + a^4$ aussi-bien que $CA \times AB + yx = + aa$ dont le quarré seroit $+ yyxx = a^4$.

X. Exemple.

Mais l'équation $yyx = a^3$ n'aura la forme ni de l'une ni de l'autre des deux hyperboles précedentes; mais seulement celle de la moitié des conjuguées comme *K* & *I* qui sont d'un même côté d'une des asymptotes comme *AD*, car *CA* quarré ou *CD* quarré sera toûjours $+ yy$, qui étant multiplié par *AB* ou $DK = + x$ donnera $+ yyx = a^3$, ce qui ne peut pas être pour les hyperboles *EH* ou *LM*, car on auroit pour celles-ci $-yyx = + a^3$.

Si l'on avoit $y^3x = a^4$, on verra que la forme sera celle des hyperboles opposées *IB*, *EH*.

Mais si l'on proposoit le lieu $y^4xx = a^6$ qui a pour sa racine la précedente $yyx = a^3$, on trouvera que ce seront des hyperboles conjuguées qui seront le lieu.

On trouvera de même que cette espece d'équation de lieu à quelque degré qu'elle soit élevée, se réduira toûjours à l'une de celles que nous venons d'expliquer.

DE LA CONSTRUCTION *des Lieux composez.*

Il y a des constructions des lieux composez qui se réduisent par des lignes droites & d'autres par des courbes. Ceux qui se réduisent par des lignes droites ne changent pas la figure ou la nature du lieu quand on veut changer l'angle que font les inconnuës entr'elles, & ce sont de ces sortes de réductions dont j'ai parlé assez au long dans mon Traité des Lieux. Mais pour les réductions par des courbes, le lieu change de nature, car il arrive

roit que la tige du lieu feroit une ligne courbe, laquelle nous pofons toûjours en ligne droite.

Je réduis & je conftruis tous les lieux compofez fans avoir aucun égard s'ils confervent la nature des lieux fimples defquels ils peuvent dépendre ; ce qui me femble plus facile que de changer dans quelques cas la grandeur des parametres, & les raports de quelques autres lignes, puifqu'auffi bien nous ne pouvons trouver que les points de ces lieux ; & je donne feulement quelques exemples de réductions qu'on peut varier en plufieurs manieres, lefquelles doivent toûjours donner le même lieu.

REMARQUE.

On remarquera que je me fers par tout de la feule lettre a, pour exprimer les quantitez déterminées de l'équation; car s'il y en a plufieurs qui foient feules dans leurs termes, elles peuvent fe réduire à une même, & fi elles font jointes aux indéterminées, elles ne changent pas la méthode ; mais elles rendent feulement le calcul un peu plus long, ce que j'ai tâché d'éviter dans ce Memoire.

I. EXEMPLE.

FIG. IV. Soit le lieu propofé $xx = yy + ay$.

Je pofe pour le réduite $y + \frac{1}{2}a = z$, ou bien $z - \frac{1}{2}a = y$ & fubftituant dans la propofée les valeurs de y, on aura $xx = zz - \frac{1}{4}aa$ qui eft le lieu réduit à l'hyperbole fimple équilatere.

La conftruction en eft facile, car la réduction n'eft que lineaire.

Soit $AB = a$ qui fera l'axe de l'hyperbole ou des hyperboles oppofées DAE, FBG, dont le centre eft en C. Les CH feront les $+z$, & les CI les $-z$; les HE ou IG les $+x$, & les HD ou IF les $-x$. Ces deux hyperboles feront le lieu de l'équation réduite dont l'origine eft en C.

Mais par la réduction dont on s'eft fervi, on aura $+z - \frac{1}{2}a$, ce qui eft $CH - CA = AH = +y$. L'origine

des y ſera donc en A, & les $AH = +y$ & les $AI = -y$. Et BH étant $= +y + a$, ſi on le multiplie par $+y$ on aura $yy + ay = xx$ qui eſt l'équation propoſée, ſoit que l'on poſe x affirmatif ou négatif. Et $AI = -y$ ſera $CI = -z + CA = + \frac{1}{2}a$, ou bien $-y - \frac{1}{2}a = -z$, & l'on aura $-y - a$ par $-y$, ce qui ſera $+yy + ay = xx$.

Mais ſi l'on propoſe cette autre équation $xx = yy - ay$. En prenant $y - \frac{1}{2}a = z$ pour en faire la réduction, on trouvera le même lieu réduit que le précedent ; mais par la réduction on a $z + \frac{1}{2}a = y$; donc ſi les CH ſont affirmatifs, on aura l'origine des y en B, & les BH ſeront les $+y$ & les BI les $-y$.

On voit parlà que ces deux équations quoique differentes ſont le même lieu ; mais que l'origine des $+$ & des $-y$ y eſt placée réciproquement.

Enfin ſi l'on propoſe cette autre équation $xx = ay - yy$, on trouvera par la même réduction que dans les précedentes, que ſon lieu ſera au cercle $BKAL$. Car tranſpoſant on aura $-xx = yy - ay$, & poſant $y - \frac{1}{2}a = z$ on aura $-xx = zz - \frac{1}{4}aa$, ou bien $\frac{1}{4}aa - zz = xx$; & par conſéquent poſant $CO = +z$, & la réduction donnant $z + \frac{1}{2}a = +y$, on aura l'origine des y en B & les $+y = BO$; mais dans ce cas il n'y aura point de y négatifs, à cauſe que l'on auroit $\frac{1}{2}a - y = -z$ ou $-y = -z - \frac{1}{2}a$, & que $\frac{1}{2}a$ ſera toûjours plus grand que $-z$.

Ce ſera la même méthode pour d'autres équations de la même eſpece que celles-ci, comme $yy - ay = \frac{1}{2}aa - xx$ pour laquelle l'origine ne ſera plus à l'extrémité de l'axe.

II. Exemple.

Mais ſi l'on propoſe les quarrez des trois Exemples précedens, comme le premier $x^4 = y^4 + 2ay^3 + aayy$.

Et ſi l'on vouloit en faire la réduction à l'ordinaire, il faudroit poſer $yy + ay = zz$, & l'on auroit $x^4 = z^4 - aayy + aayy$, qui ſe réduiroit à $x^4 = z^4$, ou bien $zz = xx$, ou enfin $x = z$.

Mais par la réduction en ſubſtituant xx à la place de

zz, on aura $xx = yy + ay$, & c'eſt ce qui fait connoître que cette équation eſt la racine de celle qui eſt propoſée, ſi on ne l'avoit pas ſçû. On conſtruira donc ce lieu quarré comme dans l'exemple précedent, lequel ſera auſſi le lieu quarré-quarré propoſé à l'hyperbole.

Pour ce qui eſt des deux autres lieux $xx = yy - ay$ & $xx = ay - yy$, il eſt facile à voir que leurs quarrez ſeront le même, ſçavoir $x^4 = y^4 - 2ay^3 + aayy$. Ainſi ce lieu eſt le cercle $AKBL$, & les hyperboles oppoſées tout enſemble DAE, FBG, le cercle étant conſtruit ſur le même axe que les hyperboles, quoique l'un ait pour ſa racine le lieu à l'hyperbole, & l'autre celui au cercle.

Pour les Ellipſes & pour les hyperboles non équilateres, ce ſera la même choſe que pour les autres; car elles n'en ſont differentes qu'en ce que le rapport des inconnuës n'eſt pas un rapport d'égalité, mais un autre tel qu'on veut & neanmoins conſtant.

III. EXEMPLE.

L'équation d'un lieu étant propoſée $x^3 = 2aay - ayy$.

Je diviſe d'abord par a & j'aurai $\frac{x^3}{a} = 2ay - yy$ ou $-\frac{x^3}{a} = yy - 2ay$. Pour réduire je prens $2ay - yy = zz$, qui eſt le lieu au cercle dont le rayon eſt $= a$ comme nous avons vû ci-devant; ou bien en poſant $y - a = v$ ou $a - y = -v$.

FIG. V. Pour la conſtruction du lieu, ſoit pris ſur la ligne droite FG la grandeur $AD = 2a$, & ſur AD comme diametre ſoit décrit le cercle APD, & ſur les AD en allant vers G ſoit les $AO = y$. Il eſt évident que le cercle APD eſt le lieu au cercle $2ay - yy = zz$ & qui doit être par l'équation propoſée $= \frac{x^3}{a}$ & par conſéquent $azz = x^3$.

Mais pour connoître les x^3 qui doivent être poſez ſur les $OP = z$ pour former le lieu, nous venons de trouver que $azz = x^3$, & cette équation eſt un lieu à une parabole cubique ſimple dont le parametre $= a$.

Soit cette parabole BH dont l'abſciſſe $BI = z$, & par le point I l'ordonnée ou le Rameau IH lequel ſera $= x$: ſi

ſi l'on tranſporte donc ſur OP cette grandeur IH en OR; & qu'on trouve de même pour toutes les OP ou BI, les grandeurs IH qui leur répondent, on aura tous les points R qui formeront le lieu propoſé $ARRD$.

Il eſt évident que cette courbe ARD eſt toute hors le demi-cercle APD horſmis aux points AD où elle le touche, & à l'extrémité du diametre L qui eſt perpendiculairement à AD; & que cette courbe tient plûtôt du cercle que de la parabole, comme il ſemble que le marquoit ſon équation, puiſque ſes touchantes en A & en D ſont perpendiculaires à AD, & que ſa touchante en S lui eſt parallele.

Voyons maintenant ſi le lieu propoſé ne s'étend pas plus loin que la courbe ARD. On aura auſſi dans le cercle ASD les ordonnées $OQ = -z$, ce qui donnera encore $2ay - yy = zz$, d'où l'on aura de même que ci-devant $azz = x^3$. Et par la parabole cubique nous déterminerons la grandeur de ces x par rapport à ces z: mais nous ne pourrons pas prendre les x négatives ſur OQ, car nous aurions $-x^3 = 2aay - ayy$, ce qui n'eſt pas l'équation propoſée; ainſi la courbe ne paſſe pas au-deſſous de AD.

Mais ſi nous prenons les $AG = y$ ſur AD prolongée, nous aurons $AG \times GD$, ce qui ſera $yy - 2ay = zz$, qui eſt un lieu à l'hyperbole dont les ordonnées ſeront les $+z$ d'un côté & les $-z$ de l'autre, & par conſéquent $azz = -x^3$: car par l'équation on a $-x^3 = ayy - 2aay$. Mais dans ce cas les AG étant plus grandes que a, la partie de l'équation $ayy - 2aay$ ſera affirmative qui ne peut pas être égalée à $-x^3$ qui eſt négative: donc le lieu ARD ne s'étend pas au-delà de D, ni l'autre côté au-delà de A vers L.

IV. Exemple.

Cet Exemple ſera le même que le précedent horſmis ſeulement que chaque partie de l'équation eſt élevée au quarré, laquelle ſera

$$x^6 = 4a^4yy - 4a^3y^3 + aay^4.$$

Pour conſtruire cette équation il la faudra réduire en diviſant d'abord par aa, ce qui fera $\frac{x^6}{aa} = 4aayy - 4ay^3 + y^4$.

Et enſuite poſant $yy - 2ayy = zz$, on trouvera toute l'équation réduite à $x^6 = aaz^4$, dont la racine ſera $x^3 = azz$ qui eſt la même que celle de l'Exemple précedent, & par conſéquent le lieu que nous avons déja trouvé DRA y ſatisfera ; car le quarré auquel on a élevé les inconnuës ne peut rien changer à leur détermination de grandeur.

Mais de plus ayant pris ou poſé les $AG = +y$ ſur AD prolongée, nous avons trouvé $azz = -x^3$, ce qui ne pouvoit pas donner de points de la courbe précedente ; mais pour cette équation le quarré de chacune de ces deux parties étant affirmatif $aaz^4 = x^6$ pourra en donner, leſquels ſeront en DT dont les ordonnées TG ſeront $+x$, & les GH & $OQ = -x$. Ainſi la premiere courbe trouvée DRA n'étoit que partie de celle-ci $TDRAQH$ qui doit s'étendre à l'infini des deux côtez vers T & H, ce qui eſt évident par la génération ; & la courbe de ce lieu quarré du précedent eſt la même que celle-ci, mais de plus repetée en ſens contraire de l'autre côté de l'axe, & également auſſi des deux côtez du centre en MAN à cauſe des y negatifs AL.

V. EXEMPLE.

FIG. VI. Soit l'équation propoſée $x^3 - aax = aaz$ ou $-x^3 + aax = -aaz$. Pour faire la réduction de ce lieu, on le diſpoſera de cette ſorte $x^3 = aax + aaz$. Et prenant $x + z = y$, on aura la réduite $x^3 = aay$, qui eſt une parabole cubique ſimple qu'on conſtruira, laquelle ſera $BGAI$ ſur l'axe AC, & dont le parametre ſera $= a$, & par ſon moyen on décrira le lieu.

Soit AD perpendiculaire à l'axe AC ſur laquelle on prendra les AD pour les abſciſſes $= x$, & les ordonnées $DB = y$.

Mais pour déterminer les z du lieu propoſé, on a par

la réduction $x+z=y$ ou $x=y-z$ qui n'est que lineaire, laquelle se fera en tirant par le point A la ligne droite LAG qui coupe l'angle droit CAD en deux également, & qui rencontre les ordonnées DB en E. D'où il est évident que les DB étant $=y$ les DE seront $=x$, & par conséquent les $BE=z$.

Et comme il faut que les x & les z fassent un angle droit dans le lieu, il faudra transporter les $EB=z$ sur DB en DF, & le point F sera un de ceux du lieu requis.

Il est évident par cette construction que la courbe FF doit rencontrer AD au point P lorsque $AP=x$ est $=a$; car alors la ligne AE coupe la parabole AB en G, où l'ordonnée par le point P la rencontre; ainsi EB dans ce point G est nulle.

Mais depuis G jusqu'en A les ordonnées comme HL coupent AE en K au-dessous de la courbe; c'est pourquoi les EB ou DF qui étoient $+z$ deviennent alors $LK=-z$, qu'il faudra transporter sur HL en HM au-dessus de AD pour avoir les $-z$, lesquelles donneront encore l'équation ptoposée; ainsi nous aurons la courbe $EFPMA$ pour le lieu.

Ce n'est pas tout, ce lieu se doit continuer de l'autre côté de l'axe comme la parabole cubique BGA qui sert à sa construction, s'y continuë aussi en AI; car les AN seront alors $-x$, ce qui sera facile à connoître. Ainsi la courbe du lieu $FPMAO$ sera semblablement posée, mais renversée des deux côtez de l'axe & aussi infinie par ses deux extrémitez.

VI. Exemple.

Soit proposé l'équation d'un lieu,

$$z^4-4axzz+aazz+4aaxx=4a^4.$$

Remarque.

Toutes les réductions des équations sont toûjours beaucoup plus simples en se servant de lieux aux paraboles que

de toute autre courbe, en ce que les inconnuës s'y dépriment toûjours confiderablement, cependant on les peut faire indifferemment par quelle courbe on voudra. Il arrive auffi quelquefois qu'entre les lieux qu'on peut prendre par la réduction, il y en a qui paroiffent composez, & qui ne laiffent pas de réduire l'équation propofée à peu de termes; c'eft pourquoi il y a beaucoup d'adreffe à choifir ces fortes de lieux.

Pour réduire ce lieu propofé, pour en faire la construction, foit pris l'équation ou le lieu fuivant $zz - 2ax + \frac{1}{2}aa = yy$, lequel étant quarré donnera $z^4 + 4aaxx + \frac{1}{4}a^4 - 4axzz + aazz - 2a^3x = y^4$.

Et par la fubftitution des valeurs de celui-ci dans celui qui eft propofé, on réduira le propofé à $y^4 = \frac{17}{4}a^4 - 2a^3x$, qui eft un fecond lieu, & par le moyen de ces deux lieux, on pourra conftruire celui qui eft propofé; mais pour les conftruire chacun en particulier, il les faut encore réduire; mais comme ces réductions menent affez loin, nous nous fervirons d'une autre.

FIG. VII. Pour faire la réduction de ce lieu ptopofé, prenons $zz = 2ar$, & introduifant cette valeur & celle de fon quarré nous la réduirons à $4aarr - 8aarx + aazz + 4aaxx = 4a^4$, ou bien divifant par $4aa$, on aura $rr - 2rx + \frac{1}{4}zz + xx = aa$; & prenant $x - r = \mp v$, ou $r - x = \mp v$, ce qui eft indifferent à caufe de leur quarré qui eft le même, on réduira encore à $vv + \frac{1}{4}zz = aa$, qui eft un lieu à l'Ellipfe, & dans cette réduction il n'y a que deux indéterminées v & z.

Mais pour conftruire le lieu à la parabole qu'on a prife, ce fera celui de la parabole fimple, laquelle fera doublée en $LCRHCI$ dont le parametre de l'axe BCD fera $= 2a$: les $CE = z$; & les $EP = r$.

Et pour conftruire celui de l'Ellipfe, on prendra fur l'axe de la parabole $CB = a$ qui fera fon petit demi-axe & CA ou CV perpendiculaire à $CD = 2a$ qui fera le demi-grand axe, cette Ellipfe fera $ABFV$, dont les ordonnées $FE = v$ & les abfciffes $CE = z$, comme dans la parabole,

& ces z feront communs, l'origine de ces deux lieux étant en *C*. Il eſt évident que ces deux lieux ſatisfont à leur équation.

Mais dans le lieu propoſé nous n'avons ni r ni v, mais des x qu'il faut trouver par leur moyen pour les joindre aux z pour former le lieu requis. Par la réduction nous avons $v+r=x$ par rapport aux z, & par la conſtruction ce ſera $FE+EP$ ou FP qu'il faudra tranſporter ſur EF en EG, & le point G ſera un de ceux du lieu, les EG etant $=+x$.

La même réduction nous montre auſſi que nous aurons la courbe *KR* pour les $-x$ au-deſſous de *CV* & ſemblable à la précedente *BH*, avec les deux courbes *BMR* & *KH* auſſi ſemblables entr'elles & poſées en ſens contraire, & qui ſeront formées chacune par $+x$ & $-x$.

Enfin nous formerons de la même maniere les autres parties du lieu qui ſeront *BI*, *KL* & *BL*, *KI* par rapport aux $-z$ pris ſur *CA*, ce qui ſera la repetition des portions de la courbe qu'on a trouvées pour les $+z$. Où l'on remarquera que ce lieu a double ſommet *B* & *K*, & qu'il ſe termine en *HRIL* ſur les perpendiculaires à l'axe *AV* de l'Ellipſe, leſquelles ſont menées par ſes extrémitez *A* & *V*; car le lieu à l'Ellipſe qui ſerr à former le propoſé, n'eſt pas quarré-quarré, & par conſéquent il n'a point de z au-delà de *V* & de *A*. Et de plus que les portions *BR*, *BL*; & *KH*, *KI* s'entrecoupent ſur l'axe *AV* en deux points où v & r deviennent égales, ce qui eſt facile à voir.

On peut trouver encore pluſieurs autres conſtructions de ce lieu, mais c'en eſt aſſez.

VII. EXEMPLE.

On propoſe l'équation d'un lieu $y^4-4ay^3+4aayy=63a^3x-62a^4$. FIG. VIII.

Pour conſtruire ce lieu il en faut faire la réduction, & pour celle de la premiere partie de l'équation on viendra à $yy-2ay$, ou $2ay-yy$, qui eſt la racine, car elle eſt quarrée,

& si on l'égale à zz on aura $y^4 - 4ay^3 + 4aayy = z^4$, qui sera un lieu au cercle & à l'hyperbole équilatere tout ensemble sur le même axe $= 2a$, comme on a vû dans les lieux simples.

Il faudra donc poser $z^4 = 63a^3x - 62a^4$, & en divisant par $63a^3$ ou aura $\frac{z^4}{63a^3} = x - \frac{62}{63}a$. Si nous prenons maintenant $x - \frac{62}{63}a = r$, nous aurons le lieu tout réduit à $z^4 = 63a^3r$, qui est une parabole simple quarré quarrée dont le parametre sera $\sqrt[3]{63a^3}$, & nous avons vû que cette parabole ne peut avoir que la forme de la 1[re] parabole quarrée.

Maintenant soit cette parabole MN dont les abscisses $MQ = z$ & les ordonnées $QN = r$; & si sur le lieu à l'hyperbole & au cercle $BDPAE$ où les AG ou AO sont $= y$ & les GB ordonnées $= z$, on prend quelqu'ordonnée $GB = z$, & qu'on la porte en MQ sur la tige des z de la parabole, on y aura l'ordonnée $QN = r$ qui convient à z.

Mais par la réduction $r + \frac{62}{63}a = x$; il faudra donc tirer sur la parabole la ligne EF paralelle à MQ & qui en soit éloignée de la grandeur $\frac{62}{63}a$; ainsi on aura $NF = x$ qu'on transportera sur GB en GH, & les GH trouvez de la même maniere, seront les x qui doivent être joints aux $AG = y$ pour former le lieu par les points H & qui sera infini, ce qui est évident par sa formation.

On voit par là que lorsque y sera $= 2a$, alors les z seront $= 0$, & les $r = 0$, & par conséquent la courbe HH vient rencontrer en I l'ordonnée DI, & cette ordonnée DI sera $= ME = \frac{62}{63}a$.

Ensuite si l'on prend un $y = AO$ sur le diametre du cercle, on aura aussi $OP = z$ qni nous donnera sur la parabole un r & un x, qu'on transportera sur OP en OR, & le point R sera encore un de ceux de la courbe.

Enfin lorsque y sera $= a$ qui est le rayon du cercle, la partie de la courbe IRR doit passer en K à l'extremité du rayon CK perpendiculaire à AD; car alors $MQ = z = a = CK$ aura l'ordonnée r de la parabole $= \frac{1}{63}a$, qui étant joint à $\frac{62}{63}a = ME$ fait $a = CK$.

Et si l'on prend des $AO = y$ plus petits que AC, on aura encore les ordonnées z dans le cercle qui donneront des points R de la courbe ; car on a $2ay - yy$ qui donne toûjours l'équation quarré-quarrée proposée, ce qui fournira d'autres points R de la courbe, semblablement posez aux précedens jusqu'en L où l'ordonnée $AL = x$ sera $= \frac{62}{63} a$.

La formation de cette courbe fait connoître que sa partie IHH est convexe & $IRKL$ est concave du côté de ADG.

Mais comme on peut prendre encore des $-y$ en AS qui donneront des $SE = z$ dans l'hyperbole AE, on trouvera aussi des points F de cette courbe, lesquels seront semblablement posez aux points H de l'autre côté de CK & par rapport à l'axe AD ; & parce que les x n'y ont qu'une dimension il les faudra aussi toûjours poser du même côté de AD.

VIII. Exemple.

Il y a des lieux qui étant réduits ne donnent en apparence aucune ligne courbe ni droite ; & je les appelle *des lieux au point*, parce que les courbes s'y réduisent en un point ou $= 0$. Les exemples nous les feront connoître plus clairement.

Soit un lieu proposé $y^4 - 4ay^3 + 6aayy - 4a^3y + 4aaxx - 24a^3x + 37a^4 = 0$.

Pour faire la construction de ce lieu je le réduis en prenant

$yy - 2ay + aa = az$, qui est à une parabole & en le quarrant & l'introduisant dans le lieu proposé je le réduis d'abord à

$zz + 4xx - 24ax + 36aa = 0$, & divisant par 4, j'ai $\frac{zz}{14} + xx - 6ax + 9aa = 0$, & pour les réduire encore je prens $x - 3a = v$, & j'ai le lieu tout réduit à $\frac{zz}{4} + vv = 0$, & c'est ce lieu réduit que j'appelle au point ; car il n'est pas possible que deux quantités affirmatives soient

$=0$, ſans que chacune ne ſoit $=0$. Auſſi pour la conſtruction on prendroit $v+3a=x$, ou bien $3a=x$, puiſque v eſt $=0$.

De même puiſque $\frac{zz}{4}$ eſt $=0$, auſſi $z=0$, & le terme az de la premiere réduction ſera $=0$, & par conſéquent $yy-2ay+aa=0$; mais $yy-2ay+aa$ étant $=0$, ſa racine qui eſt $y-a$ ſera auſſi $=0$ & $y=a$.

C'eſt pourquoi ſi dans l'équation propoſée on ſubſtituë à la place de y ſa valeur a que nous venons de trouver en l'élevant aux degrez où eſt y, & ſi à la place des x on ſubſtituë auſſi la valeur de $x=3a$ élevée aux degrez de x, toute l'équation ſe réduit à o : ce qui fait connoître que les y ſont $=a$ & les $x=3a$.

On remarquera que ces lieux au point peuvent être de tous genres.

Je propoſerai encore ici une autre équation de lieu qui eſt à peu près de la même eſpece que la précedente

$$y^4-4ay^3+10aayy-12a^3y+4aaxx-24a^3x+41a^4=0.$$

Et pour réduire on prendra $az=yy-2ay+aa$, & introduiſant cette valeur & celle de ſon quarré dans la propoſée & pour les x prenant $v+3a$, on la réduira à

$zz+4az+4vv=0$, qu'on ne peut pas regarder comme un lieu, puiſque un ou pluſieurs termes affirmatifs ne ſçauroient être égalez à o. Cependant on demande les valeurs des z & des v qui produiſent cette équation ou expreſſion, leſquelles donneront les y & les x.

FIG. IX. Pour déterminer les valeurs de z je réduis en prenant $z+2a=t$, & j'aurai $tt-4aa+4vv=0$, ou bien, $4vv=4aa-tt$ qui eſt un veritable lieu à l'Ellipſe laquelle ſoit BDA, dont le quarré du demi axe CA ſoit au quarré du demi-axe CD comme 4 à 1, & le demi-axe $CA=2a$, & par conſéquent $CD=a$ les abſciſſes $CE=t$ & les ordonnées $EF=v$.

Mais par la réduction on a $t-2a=z$. Mais l'abſciſſe t ne peut être tout au plus qu'égale à $2a$ auquel cas $t-2a$

$=0$

$=o=z$ & par conféquent $az=o$ & $yy-2ay+aa=o$, d'où l'on tire $y=a$.

Mais auffi dans l'équation que nous avons trouvée $zz+4az+4vv=o$, pofant $z=o$ elle fe réduit à $4vv=o$: donc $v=o$: & par la réduction $v+3a=x$, ce qui eft $3a=x$.

On aura donc enfin les valeurs des indéterminées de l'équation propofée, lefquelles y étant fubftituées la réduifent à o. D'où l'on voit que cette équation n'eft pas un lieu comme dans les autres exemples, mais une équation determinée fous la forme d'un lieu.

Il y a encore des équations de lieu toutes affirmatives où l'on tombe quelquefois dans un calcul, comme $xx+az=o$, ou bien $xx=-az$, & qu'on ne peut plus réduire; mais l'on ne peut pas dire que ce foient des lieux; cependant on s'en peut fervir, & l'on peut former la courbe, laquelle donneroit la quantité xx affirmative égale à la négative az dans fa négation, & ce feroit ici la parabole dont les abfciffes feroient $-z$.

IX. EXEMPLE.

Il y a encore une autre efpece de lieux qui n'ont la forme que d'une ligne droite, lefquels j'appelle *des lieux à la ligne droite réduite*, puifqu'ils font en effet des lieux de tous genres & qu'ils en confervent toutes les proprietez, quoiqu'ils ne paroiffent qu'à la ligne droite, les exemples que nous en apporterons dans la conftruction des équations, nous en convainqueront pleinement. On peut cependant en avoir une idée, fi l'on confidere dans les fections du cone, que les Ellipfes dégenerent enfin en paraboles d'un côté & de l'autre à la ligne droite, comme auffi l'hyperbole dont les extrêmes font d'un côté une parabole, & de l'autre une ligne droite qui eft auffi la derniere des Ellipfes, & c'eft alors que les afymptotes fe confondent avec l'hyperbole ou avec l'axe déterminé, ou que le parametre fe trouve $=o$.

Tout lieu plan doit avoir deux indéterminées, & le lieu

FIG. X. à la ligne droite *CB* a cette formule $nx = my$, dont les *CA* sont $= x$ & les $AB = y$. Et lorsqu'on regarde $y = n$ comme un lieu à la ligne droite, il est certain que ce n'en est pas un à la rigueur, puisque y est determinée. Cependant si l'on considere m infiniment grande, alors x devient aussi infiniment grande; car le point *C* qui est l'origine du lieu, sera à distance infinie, & m infiniment grande sera à x infiniment grande dans la raison d'égalité, & l'équation générale du lieu à la ligne droite, se réduira à $y = n$, & le lieu devient la ligne droite *DF* paralelle à *CA* & indéfinie des deux côtez. Ce sera la même chose si l'on considere n infiniment petite; car alors le lieu des x sera la ligne droite *CA* qui étoit la tige, & qui sera infiniment étenduë des deux côtez de l'origine *C*.

FIG. XI. Mais on peut aussi considerer ce même lieu *CA* comme une hyperbole *IML* sur l'axe *CA*; car on aura $m \mid n \mid\mid CA$ quarré $= xx - CM$ quarré $= mm \mid AI$ quarré $= yy$; d'où vient l'équation $xx - mm = \frac{myy}{n}$. Et si le parametre $MN = n$ est posé infiniment petit, alors le terme $\frac{myy}{n}$ ne peut avoir aucun rapport aux autres; car n infiniment petite est à m determinée, comme yy de quelque grandeur qu'on le puisse supposer, sera à une quantité infiniment grande qui n'entre plus en comparaison avec les autres termes.

Ce sera la même chose si l'on pose n infiniment grande; car le terme $\frac{myy}{n}$ devient infiniment petit.

Il faut remarquer que lorsque le lieu proposé est simplement $x - m = 0$, ce n'est qu'un lieu simple à la ligne droite; mais si c'est $xx - mm = 0$, ce sera un lieu à la ligne droite, mais qui ne laisse pas de conserver les proprietez du lieu qui est determiné par le degré de l'indéterminée x, comme ici celui de l'hyperbole; & par conséquent ce lieu à la ligne droite est double des deux côtez de *C*, lequel represente les deux hyperboles; ce sera la même chose pour d'autres degrez de l'indéterminée.

Enfin si l'on a des équations de lieux comme $axx=byy$, ou $ax^3=by^3$ ou &c. qui ne peuvent être que des lieux à la ligne droite; on doit remarquer que ceux dont le degré de l'indéterminée est un nombre pair, sont des lignes droites à plusieurs branches, ce qui est facile à connoître, & qu'on ne doit pas les confondre avec des lieux simples à la ligne droite; on pourroit les appeller des lieux aux *asymptotes*, dont l'angle qu'elles font est une des sections du cône, & qui sont aussi la derniere des sections hyperboliques. On verra des exemples de ces sortes de lieux dans ce Memoire & dans un autre qui doit le suivre.

X. Exemple.

Voici un autre lieu qui participe des précedens; $fxy+afy-bcx-abc=0$, qui paroît à l'hyperbole.

Pour le réduire il faut d'abord diviser par f, & l'on aura, $xy+ay-\frac{bcx}{f}-\frac{abc}{f}=0$. Et prenant $x+a=z$, on aura $zy-\frac{bcx}{f}-\frac{abc}{f}=0$. Mais x est aussi $=z-a$; c'est pourquoi aïant substitué la valeur de x, on aura $zy-\frac{bcz}{f}+\frac{bca}{f}-\frac{abc}{f}=0$, qui se réduit à $zy-\frac{bcz}{f}=0$. Et prenant encore $y-\frac{bc}{f}=v$, on aura enfin l'équation du lieu réduite à $vz=0$, qui est un lieu à l'hyperbole entre ses asymptotes lesquelles sont jointes ensemble, ou $v=0$, ou bien $z=0$. Et si l'on pose v ou $z=0$, l'autre ne sera point determinée, & on la pourra prendre de quelle grandeur on voudra & même $=0$; & si on la pose $=0$, par la réduction on a $z-a=x$, ou $0-a=x$.

Donc $-a$ est la valeur de x de ce lieu.

De même par la réduction $v+\frac{bc}{f}=y$, ou bien $0+\frac{bc}{f}=y$. Donc aussi $y=\frac{bc}{f}$; & si l'on substituë ces valeurs dans le lieu proposé, il se réduit à 0. Donc &c.

On trouvera la même chose, si ayant posé l'une $=0$, on prend l'autre de quelle grandeur déterminée que ce soit.

On remarquera que ces lieux ne ſont pas proprement des lieux, mais des équations déterminées ſous la forme de lieux, puiſque les indéterminées n'y ont qu'une valeur déterminée.

DE LA CONSTRUCTION des Equations.

Remarques générales ſur la Conſtruction des Equations.

Quand on veut conſtruire une Equation telle qu'elle puiſſe être, on y introduit d'abord par la regle générale, un lieu tel qu'on veut choiſir; & par ce lieu qui eſt une équation qui renferme deux indéterminées, dont l'une eſt la même que celle que l'équation propoſée en ſubſtituant ſa valeur, on trouve un ſecond lieu; ce que j'ai expliqué dans mon Traité, & ce qui ſe peut faire en pluſieurs manieres. Les deux lieux étant conſtruits & combinez enſemble, doivent donner par leurs rencontres toutes les racines de l'équation propoſée, puiſque chaque lieu étant parfait, contient toutes les racines poſſibles de ſon équation; & par conſéquent les rencontres communes de ces deux lieux doivent donner toutes les racines ou valeurs poſſibles de l'indéterminée de l'équation propoſée, pourvû qu'elles ſe trouvent dans ces lieux.

Mais il faut remarquer, que pour l'ordinaire le lieu qu'on prend pour être introduit dans l'équation propoſée de pluſieurs degrez, eſt un lieu ſimple, il faut même le prendre le plus ſimple qu'il eſt poſſible, pour reſoudre l'équation le plus ſimplement qu'elle le puiſſe être; c'eſt pourquoi on eſt obligé, comme j'ai fait dans la méthode que j'ai donnée, d'élever ce lieu à ſon quarré ou cube &c. pour en faire l'introduction; & c'eſt principalement en cela qu'on fait une faute dans la conſtruction de ce lieu; car ſi au lieu de conſtruire le lieu composé qu'on a introduit, on ne conſtruit que le ſimple; il ne pourra pas toûjours donner toutes les racines de l'équation propoſée puiſqu'il eſt imparfait, & quelquefois il n'en donne aucune.

Il eſt vrai que ces lieux étant quarrez, ou cubez &c. peuvent être les mêmes que leurs ſimples ; mais le plus ſouvent ils ſont differens, comme on a vû ci-devant dans la conſtruction des lieux,

Il arrive auſſi quelquefois qu'on introduit le lieu ſimple dans l'équation, & qu'enſuite on l'introduit encore dans les termes où on l'a déja introduit ; ce qui fait la même choſe que ſi l'on avoit introduit ſon quarré, & par conſéquent on doit conſtruire le lieu quarré & non pas ſeulement le ſimple, & de même des autres puiſſances.

Quoiqu'on puiſſe prendre le lieu tel qu'on veut pour l'introduire dans l'équation propoſée, il faut pourtant qu'il puiſſe avoir des racines égales à celles de la propoſée ; car ſi les racines de ce lieu n'avoient qu'une étenduë déterminée, comme ſi l'on introduiſoit un cercle, & que les racines de la propoſée fuſſent plus grandes que celles du cercle introduit, il eſt évident que ce lieu ne pourra pas ſervir à reſoudre pleinement l'équation. Il en eſt de même, ſi celui qu'on introduit en produit un autre qui n'ait pas toutes les racines de la propoſée ; car ce ſeroit la même choſe que ſi l'on avoit introduit ce dernier, lequel auroit neceſſairement fourni le premier.

Cependant comme on ne connoît pas les valeurs des racines de l'équation propoſée, il pourroit arriver que le lieu pris d'abord, ou celui qui en réſulte par l'introduction dans la propoſée, n'auroit pas toutes les racines qui y ſont, & c'eſt en partie ſur des exemples de cette nature, qu'on pourroit avancer que la Methode ſeroit défectueuſe ; mais il me ſemble qu'on ne pourroit pas dire que ce fût un défaut de la Methode, mais ſeulement de l'application qu'on en fait, comme il arrive en pluſieurs opérations géometriques & analytiques.

Enfin on peut preſque toûjours éviter cet inconvenient, ſi l'on introduit d'abord dans l'équation propoſée, un lieu qui ait des racines depuis zero juſqu'à l'infini, & de vrayes & de fauſſes comme ſont celles de la parabole ; & ſi le

lieu qu'on tire de la propoſée par l'introduction, a auſſi des racines de toutes grandeurs & de toute eſpece; car ces deux lieux combinez doivent toûjours donner toutes les racines de l'équation telles qu'elles ſoient. Cependant il ne ſera pas toûjours neceſſaire de prendre ces lieux dans cette condition, ſi celui qu'on a pris d'abord avec celui qui en réſulte, donnent autant de racines qu'il peut y en avoir dans la propoſée, ce qu'on connoît par le degré de l'inconnuë de la propoſée. Les exemples nous en convainqueront pleinement.

Si l'on prend des lieux plus élevés que ceux qui peuvent ſervir à conſtruire l'équation propoſée le plus ſimplement qu'elle le puiſſe être, on pourra trouver plus de racines qu'il ne doit y en avoir, puiſque chaque lieu doit donner toutes celles qui ſont poſſibles dans ſon équation. Mais entre ces racines ſurnumeraires, il pourra s'y en trouver quelques-unes & même pluſieurs de repetées; mais toutes celles de l'équation, vrayes ou fauſſes, s'y trouveront toûjours, ſi elles ſe trouvent dans les deux lieux & dans la diſpoſition où ils ſont.

On dit ordinairement que le nombre des racines que l'on trouve par la conſtruction combinée de deux lieux, eſt celui du produit des dégrez de la même quantité inconnuë ou indéterminée qui eſt dans ces deux lieux: mais il me ſemble plus à propos de dire, que c'eſt ſeulement le nombre des rencontres poſſibles de ces deux lieux. Car ſi l'on conſtruit une équation de trois dimenſions dont les trois racines ſont vrayes & réelles, avec deux lieux dont l'indéterminée de l'un ait deux degrez ou deux dimenſions, & la même indéterminée de l'autre n'en ait qu'un ſeul, le produit de l'une des dimenſions par l'autre ne ſera que deux, & par conſéquent il ne devroit y avoir que deux racines dans l'équation, quoiqu'en effet il puiſſe y en avoir trois vrayes & réelles.

Lorſqu'on veut conſtruire des équations dont l'inconnuë a un nombre impair de dimenſions, on peut avant que d'introduire le premier lieu, la multiplier par une

racine telle qu'on voudra, qui ſera pourtant toûjours exprimée par l'inconnuë de l'équation, comme ſi c'étoit x par $x - \text{ou} + a = o$, afin de réduire le nombre des dimenſions de l'inconnuë à un nombre pair, ce qui donne beaucoup de facilité à l'introduction du premier lieu, comme je l'ai fait dans mon Traité, & la conſtruction donnera entre ſes racines celle qu'on aura introduite : mais auſſi on pourra multiplier la propoſée par l'inconnuë toute ſeule, ce qui eſt la même choſe que ſi on la multiplioit par $x = o$; mais pour ce cas il arrivera toûjours dans la la conſtruction que les deux lieux qu'on tirera de cette équation multipliée, ſe couperont dans leur origine commune qui eſt le point de rencontre où la racine x eſt égale à o.

Venons maintenant aux exemples que je prendrai les plus ſimples & les plus clairs qu'il ſera poſſible, afin que les remarques qu'on doit faire ſur ces conſtructions, ſoient plus ſenſibles & plus évidentes.

I. EXEMPLE.

Soit l'équation propoſée qu'il faut conſtruire;

$$zz - 10az + 9aa = o.$$

Je prens pour premier lieu $ay = zz$ qui eſt à la parabole, & j'introduis dans la propoſée à la place de zz ſa valeur, j'ai un ſecond lieu $ay - 10az + 9aa = o$, ou bien, $y - 10z + 9a = o$ qui eſt un lieu à la ligne droite. Ces deux lieux étant conſtruits & combinez enſemble donneront les racines de l'équation propoſée.

Mais ſi je prens pour premier lieu $y = a$ qui eſt à la ligne droite, ou bien $yy = aa$ qui eſt à l'hyperbole ou aux hyperboles oppoſées dont l'axe eſt à ſon parametre en raiſon infinie, on pourra l'introduire dans la propoſée en trois manieres, ce qui donnera trois differens lieux.

1°. en introduiſant yy à la place de aa, on aura

$zz - 10az + 9yy = o$, qui eſt un lieu à l'Ellipſe.

2°. En introduiſant y à la place de a, on aura

$zz - 10yz + 9aa = o$ qui eſt un lieu à l'hyperbole.

3°. En introduisant yy à la place de aa & y à la place de a, on aura

$zz - 10yz + 9yy = 0$, qui est un lieu à la ligne droite élevée au quarré, mais qui n'a point la forme d'hyperbole.

Pour la construction du premier lieu trouvé $zz - 10az + 9yy = 0$ avec celui qu'on a pris, il faut le réduire en posant $z - 5a = v$, & l'on aura $vv - 25aa + 9yy = 0$, qui est l'Ellipse réduite dont le demi-axe $= 5a$, & le rapport de cet axe | à son parametre || est 9 | 1. Et par conséquent le demi-grand-axe | au demi-petit-axe || 3 | 1.

FIG. XII. Soit donc l'Ellipse *ABED* dont le centre est *C* & les deux axes *AE*, *BD* dans le rapport de 3 à 1. Mais comme le demi-grand-axe *AC* doit être égal à $5a$, il faudra construire l'Ellipse sur cet axe, & les *CO* étant $= v$, les *OQ* & *OP* seront $= y$.

Mais par la réduction nous avons $v + 5a = z$, il faudra donc prendre sur *CA* la grandeur $5a$ qui sera *CA*, & les *AO* seront $= z$, comme aussi les *AK*, & le point *A* sera l'origine du lieu.

Maintenant pour le lieu à l'hyperbole infinie, on prendra sur la ligne *FAG* perpendiculaire à *AC* les grandeurs *AF*, *AG* chacune $= a = y$, & *FG* sera l'axe de l'hyperbole ou des sections opposées, laquelle est réduite aux lignes droites *FP*, *GQ* paralelles à *AC*. On aura donc les rencontres *PQRS* de ces hyperboles & de l'Ellipse qui donneront les racines z de l'équation, dont l'une sera *FP* ou *GQ* son égale, & l'autre *FR* ou *GS* son égale.

On remarquera que dans cette construction le lieu qu'on a introduit étant $yy = aa$ suppose zz indéfinie, lequel est à l'hyperbole, & que celui qu'on a tiré est à l'Ellipse; & comme une Ellipse & les hyperboles opposées peuvent se couper en quatre points, on peut trouver aussi quatre racines dans la construction, comme elles y sont effectivement, & il faut qu'entre ces quatre racines les deux de l'équation proposée y soient comprises, ce qui est évident puisque ces deux racines y sont repetées.

Mais

Mais pour déterminer la valeur de ces deux racines $= z = GQ = GS$, ou FP & FR, la conſtruction nous donne $OQ = a$; & par l'Ellipſe nous avons $1 \mid 9 \parallel aa \mid 25aa - vv$, d'où nous tirons $25aa - vv = 9aa$, ou bien $16aa = vv$; & par conſéquent $v = 4a$: mais $CA = 5a$, donc AO ou $GQ = z = 9a$, & par conſéquent auſſi OE ou AK ou $GS = a$ qui ſeront les deux valeurs de z de cette équation propoſée.

Pour le ſecond lieu que nous avons tiré $zz - 10yz + 9aa = 0$ qui eſt à l'hyperbole, en introduiſant ſeulement dans l'équation propoſée $y = a$ qui eſt un lieu ſimple à la ligne droite où z eſt évanoüie, on le conſtruira comme on a fait le précedent, à l'exception que l'hyperbole ou les ſections oppoſées de ce lieu ne pourront être rencontrées par le lieu à la ligne droite qui n'eſt qu'une ſimple ligne, qu'en deux points ſeulement qui doivent donner les deux racines de l'équatiou, ce qui ſe trouve auſſi, & dont je ne donne point de figure.

Enfin pour le troiſiéme lieu $zz - 10yz + 9yy = 0$ qui a été auſſi trouvé par l'hyperbole infinie, il faudra d'abord le réduire, en poſant $z - 5y = v$, & l'on aura $vv - 25yy + 9yy = 0$, ou bien $vv = 16yy$, & par conſéquent $v = 4y$ qui eſt le lieu à la ligne droite.

Pour la conſtruction ſoit le point O ſur la ligne droite AB, dont on prendra la partie OH de quelle grandeur on voudra; & ayant mené HI perpendiculaire à OA & égale à $4OH$, on tirera la ligne OI prolongée d'un côté & d'autre, laquelle ſera le lieu à la ligne droite qu'on a trouvée; car ſi l'on méne les AP ou BS paralleles à HI leſquelles rencontrent OI en P & en S, les OA ou OB étant y & les AP & BS étant v, on aura $1 \mid 4 \parallel y \mid v = 4y$. FIG. XIII.

Mais par le premier lieu qu'on a pris y eſt $= a$, & par la réduction du lieu précedent $v + 5y = z$, ou bien $5y - v = z$; on menera donc OM perpendiculaire à AB & $= 5a$ ou $5y$, & le point M ſera l'origine du lieu & le centre des hyperboles infinies dont FM ou MG parallele à AB, & chacune $= a$ ſeront le demi-axe; c'eſt pourquoi GB, FP

ſeront ces hyperboles qui rencontreront le lieu à la ligne droite en S & en P, qui donneront les deux racines GS, $FP = z$ de l'équation propoſée. On pourroit encore en trouver deux autres égales à celles-ci, en conſtruiſant auſſi le ſecond lieu réduit tel qu'il eſt $vv = 16yy$, & que j'ai appellé aux *Aſymptotes.*

On voit par-là que ſi l'on ne conſtruiſoit ces deux lieux que par de ſimples lignes droites, on n'auroit qu'une ſeule racine, au lieu des deux qui ſont dans la propoſée.

II. EXEMPLE.

Soit l'équation propoſée qu'il faut conſtruire

$$x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0.$$

En poſant pour premier lieu $az = xx - 3ax + 3aa$, qui eſt à une parabole quarrée, & l'introduiſant dans la propoſée, on aura

$azx - a^3 = 0$, ou bien $zx = aa$ qui eſt un lieu à l'hyperbole équilatere entre ſes aſymptotes, & ces deux lieux étant conſtruits & combinez doivent donner les trois racines x de l'équation propoſée ; car ces deux lieux ont toutes les conditions requiſes pour donner toutes les racines de l'équation.

FIG. XIV. Pour l'hyperbole elle ſera très-facile à conſtruire ; car ſoit ſes aſymptotes CL, CD & ſon centre en C, & le quarré CA dont le côté CB ou CG ſoit $= a$, l'hyperbole EAF qui paſſe par le point A ſera celle du lieu, dont les z ſeront ſur CD & les x ſeront ordonnées à CD, & l'origine en C.

Mais pour la conſtruction de la parabole il en faut réduire le lieu en prenant $x - \frac{3}{2}a = r$, ce qui donnera d'abord $az = rr - \frac{9}{4}aa + 3aa$, ou bien $az = rr + \frac{3}{4}aa$, ou bien $az - \frac{3}{4}aa = rr$. Et prenant encore $z - \frac{3}{4}a = v$, on aura $av = rr$, qui eſt la parabole réduite.

Il faut donc conſtruire cette parabole PHQ ſur l'axe HI dont le ſommet ſoit en H & le parametre $= a$, on aura ſes abſciſſes $HI = v$ & ſes ordonnées $IQ = r$.

Mais par la réduction on a $v + \frac{3}{4}a = z$; il faut donc

prendre sur l'axe HI prolongé vers L la grandeur $HL = \frac{3}{4}a$, ce qui donnera les $LI = z$, & par conséquent le point L de l'axe de la parabole doit être sur l'asymptote CL de l'hyperbole.

Mais aussi par la réduction on a $r + \frac{2}{3}a = x$; c'est pourquoi on prendra sur l'ordonnée IQ ou IP, la grandeur $IK = \frac{2}{3}a$, & l'on aura KP ou $KQ = x$.

D'où l'on connoît que si LC est $= \frac{3}{2}a$, le point L sera l'origine commune des deux lieux qui auront leurs abscisses & leurs ordonnées sur les mêmes lignes, & les rencontres de ces deux lieux doivent donner toutes les racines x de l'équation.

Premierement il est évident que le sommet H de la parabole est au dedans de l'hyperbole, car LH est $= \frac{3}{4}a$; & si de la rencontre N de l'axe de la parabole LHI & de l'hyperbole on mene NM parallele à CB, on aura $CM = z$, & par la construction de la parabole NM ou LC est $= \frac{3}{2}a$; c'est pourquoi si l'on divise aa par $\frac{3}{2}a$, on aura CM ou $LN = \frac{2}{3}a$; mais LH est $= \frac{3}{4}a$: donc enfin le point H est au dedans de l'hyperbole.

Mais je dis que la parabole HQ rencontre l'hyperbole au point A & qu'elle doit la couper dans ce même point. Car si l'on mene AR ordonnée à l'axe HI de la parabole qui passe par le point A de l'hyperbole, on a par la construction AR ou $LB = \frac{1}{2}a$; mais aussi par la même construction HR est $= \frac{1}{4}a$, & à cause du parametre de la parabole $= a$ le quarré de son ordonnée par le point R sera $- \frac{1}{4}aa$ dont la racine égale $\frac{1}{2}a$ est la grandeur de l'ordonnée; donc le point A est commun à l'hyperbole & à la parabole; & par conséquent AG sera une des racines x de l'équation $= a$.

Cependant il n'y a pas pour une seule racine réelle dans l'équation, il y en a trois, & on les doit trouver; car autrement on seroit porté à croire que la méthode seroit défectueuse, puisqu'elle ne donneroit qu'une seule racine dans la seule intersection des deux lieux; mais c'est dans la proprieté particuliere de cette inrersection qu'on

en trouve trois, ce qu'on n'avoit point encore remarqué. Ce sont de ces sortes de cas qui paroissent d'abord être des défauts de la méthode. Voici de quelle maniere je démontre que ce seul point de rencontre donne trois racines.

Si par le point A on méne une touchante AD à l'hyperbole, on sçait que cette touchante AD rencontrera l'asymptote CD au point D, & que $GD = a$. Mais si par le même point A, on méne aussi une touchante à la parabole, il est évident que cette touchante coupera l'axe RL en un point S, en sorte que HS sera égale à HR, & HR étant $= \frac{1}{4}a$, RS sera $= \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}RL$, & par conséquent $RS = RA$: mais $AG = GD$; donc la même ligne SAD touchera la parabole & l'hyperbole au même point A où elles se rencontrent.

Mais quoique ces deux courbes étant convexes d'un même côté touchent une même ligne droite en un même point, ce n'est pas à dire qu'elles ne se coupent pas dans ce point. & effectivement elles s'y coupent. Car si l'on prend une partie indéfiniment petite $RT = i$, & menant Tfe ordonnée, laquelle rencontre l'hyperbole en f & la parabole en e, on aura $Tf = \frac{1}{2}a - \frac{aa}{a+i}$ & $Te = \sqrt{\frac{1}{4}aa + ai}$, d'où l'on connoîtra que Te est plus grande que Tf; au contraire si le point T est pris entre R & H; & par conséquent la partie AQ de la parabole passe entre l'hyperbole & son asymptote qu'elle doit enfin couper, puisque cette asymptote sera un des diametres de la parabole; ce sera le contraire de la partie AH de la parabole qui passe au dedans de l'hyperbole. Ainsi ce point A ne devroit donner qu'une seule racine.

Ce cas particulier de ces deux lignes courbes qui se coupent en un point où elles touchent une même ligne droite d'un même côté, réünit en ce point trois rencontres des deux lignes courbes, comme le point où deux courbes se touchent réünit deux points de leur rencontre, & même plusieurs suivant les differentes inflexions

des courbes. Car si l'on inclinoit un tant soit peu la touchante de la parabole de *AS* vers *L* comme en *As*, cette *As* étant toûjours touchante de la parabole, & le point *A* demeurant à sa place; il est évident que la parabole en s'inclinant couperoit alors la touchante *AS* de l'hyperbole, puisque la ligne *AS* devroit entrer dans la parabole dans cette position; & par conséquent aussi la parabole rencontreroit l'hyperbole en un point au dessus de *A*, & elle la rencontreroit aussi dans leur point commun *A*. Mais de l'autre côté la touchante *sA* s'éleveroit au-dessus de la touchante *AD* comme en *Ad*, & elle couperoit l'hyperbole; & comme la parabole seroit toute au-dessus de *Ad*, elle passera au-dedans de l'hyperbole en allant vers *F*; mais la parabole dans cette position doit encore rencontrer l'asymptote *CD*, elle rencontrera donc encore la partie *AF* de l'hyperbole en quelque point.

Ce sont ces trois points de rencontre qui pourroient donner trois racines differentes, & qui se réünissant dans le seul point *A*, y réünissent aussi les trois racines qui deviennent chacune $= a$; ce qui donne une entiere solution de l'équation qui contient trois racines vrayes & égales chacune à a.

La construction des équations de trois degrez est toûjours fort simple par une parabole & par une hyperbole entre ses asymptotes, comme on vient de voir dans cet exemple. Mais si l'on vouloit trouver d'autres lieux par le moyen de la parabole, il faudroit multiplier l'équation par une racine comme x — ou $+ a = 0$, ce qui l'éleveroit à un degré plus haut, d'où l'on tireroit une infinité d'autres lieux que les précedens & même le cercle, comme on le peut voir dans mon Traité : mais alors la combinaison de ces lieux donnera les trois racines de l'équation proposée si elles sont réelles plus celle qui aura multiplié l'équation; & si l'on multiplie seulement l'équation par x, c'est-à-dire par $x - 0 = 0$, on doit trouver aussi quatre rencontres des deux lieux; mais ces lieux se rencontreront necessairement dans leur origine commune où

x racine $= 0$, ce qu'on peut faire facilement ſans que j'en rapporte d'exemple.

III. EXEMPLE.

Soit l'équation propoſée $zz - 2az - aa = 0$.

Je prens pour premier lieu $aa - xx = zz$ qui eſt au cercle, & j'introduits dans la propoſée la valeur de zz, ce qui donne pour ſecond lieu $aa - xx - 2az - aa = 0$ qui ſe réduit à $-xx - 2az = 0$, qui n'eſt pas un lieu qu'on puiſſe conſtruire; d'où je connois que ce cercle ne peut pas ſervir pour donner les racines de l'équation propoſée.

Mais ſi je prens le lieu au cercle $4aa - xx = zz$, & que j'introduiſe dans la propoſée la valeur de zz, j'aurai pour ſecond lieu $4aa - xx - az - aa = 0$ qui ſe réduit à $3aa - az = xx$ qui eſt à la parabole, & qu'on peut conſtruire avec le cercle; ce qui donnera les racines de l'équation.

Enfin ſi l'on prend d'abord le lieu à la parabole comme $zz = ay$, on trouvera celui à la ligne droite $y = 2z + a$ qui ont tous deux des racines de toutes grandeurs, & ces lieux étant combinés donnent les racines de l'équation.

IV. EXEMPLE.

Si l'on propoſoit une équation dont tous les termes fuſſent affirmatifs comme $xx + 3ax + 2aa = 0$,

Laquelle ne peut pas être une équation, mais qu'on voulût trouver les valeurs de x, ou, ſi l'on veut, les racines qui doivent être toutes négatives comme les ſignes le font connoître, leſquelles par leur multiplication donnaſſent cette équation ou expreſſion propoſée.

Il faut la conſiderer comme une veritable équation, & commencer à la conſtruire à l'ordinaire, en prenant un lieu $ay = xx$ à la parabole, & y introduiſant la valeur de xx, on aura un ſecond lieu qui ſera $ay + 3ax + 2aa = 0$, ou bien $y + 3x + 2a = 0$; & poſant $y + 2a = v$, on aura $v = -3x$: d'où l'on tire cette analogie $3 \mid 1 \mid\mid v \mid -x$ qui eſt à la ligne droite.

Si l'on construit donc la parabole ABD dont le parametre $= a$, les AE seront $= y$, & les $DE = + x$ & les $EB = - x$, elle satisfera au premier lieu. FIG. XV.

Pour le lieu à la ligne droite, on prolongera l'axe EA en O en faisant $AO = 2a$, d'où les $OE = v$; ensuite on tirera AF perpendiculaire sur l'axe AE, & l'ayant faite $= \frac{2}{3}a$, on tirera la ligne OFG qui sera le lieu requis à la ligne droite dont les abscisses $OI = v$ & les ordonnées $IL = - x$, car on leur donne le signe $-$ comme ils l'ont dans la parabole. Mais cette ligne OF doit necessairement rencontrer la parabole en deux points LG & les ordonnées par ces points $LI, GH = - x$ de la proposée, & il est très-facile de connoître par la construction dans cet exemple, que $LI = a$ & $GH = 2a$; & par conséquent $x + a = 0$ & $x + 2a = 0$, qui sont les deux produisans de cette expression ou équation proposée.

On pourroit encore par la méthode de M. Descartes changer les racines fausses de l'équation en vrayes, en changeant les signes devant les termes pairs; & ensuite résoudre l'équation à l'ordinaire, dans laquelle les racines vrayes qu'on trouveroit, en seroient les fausses.

V. EXEMPLE.

Soit l'équation proposée $x^6 - 63a^5x + 62a^6 = 0$.

Si l'on prend pour premier lieu $az = xx$, & l'ayant cubé ce qui sera $a^3z^3 = x^6$, & qu'on l'introduise dans la proposée, on aura $a^3z^3 - 63a^5x + 62a^6 = 0$, ou bien en réduisant, $z^3 = 63aax - 62a^3$ qui est une parabole cubique. Puisque l'on a introduit dans la proposée le lieu cubique $a^3z^3 = x^6$, c'est aussi celui qu'il faut construire; mais par la construction des lieux, ce lieu ne sera que la premiere parabole qu'on construira facilement sur son parametre a.

Pour le second lieu qu'on a tiré de l'équation, il faut le réduire en prenant $x - \frac{62}{63}a = t$, on aura ce lieu réduit à $z^3 = 63aat$, qui est une parabole cubique, dont le parametre est $\sqrt{63aa}$. Et si l'on construit ces deux lieux suivant la regle, ils se couperont seulement en deux points lesquels

donneront deux valeurs de x affirmatives, l'une ſera $x=a$ & l'autre $x=2a$ qui ſeront les deux ſeules racines de cette équation.

Maintenant ſi l'on propoſe de conſtruire cette même équation $x^6-63a^5x+62a^6=0$, en poſant pour premier lieu $x^3-2aay+ayy=0$, ou $x^3=2aay-ayy$, mais qu'il faut quarrer pour l'introduire dans la propoſée, & qui ſera $x^6=4a^4yy-4a^3y^3+aay^4$:

Ayant donc ſubſtitué la valeur de x^6 dans la propoſée, on aura le ſecond lieu.

$4a^4yy-4a^3y^3+aay^4-63a^5x+62a^6=0$, lequel ſe réduit à $4aayy-4ay^3+y^4-63a^3x+62a^4=0$.

Il ne reſte donc plus qu'à conſtruire ces deux lieux pour les combiner, dont le premier qui a été introduit eſt cube-cube, & le ſecond que l'on a tiré eſt quarré-quarré, & ils ont tous deux la forme de parabole: mais je n'en fais point ici la conſtruction; car pour le premier je l'ai donnée dans le 4e. Exemple de la Conſtruction des lieux compoſez; & pour le ſecond, c'eſt le 7e. Exemple.

On verra d'abord que ces deux lieux combinez enſemble ſuivant la regle qui ne conſiſte qu'à les poſer de telle maniere que leur origine ſoit commune, & que leurs indéterminées de même nom ſoient dans chacun ſur la même ligne droite ou paralleles entr'elles, donneront les deux racines de l'équation propoſée, mais qu'ils les donneront repetées.

VI. EXEMPLE.

Soit l'équation qu'il faut conſtruire,

$x^4-a^3x-\frac{1}{2}a^4=0$.

Je prends d'abord $ay=xx$ qui eſt un lieu à la parabole, & quarrant j'aurai $aayy=x^4$, & ſubſtituant dans l'équation propoſée la valeur de x^4, on aura $aayy-a^3x-\frac{1}{2}a^4=0$, ou bien $yy=ax+\frac{1}{2}aa$, qui eſt auſſi un lieu à une parabole.

FIG. XVI. Le premier lieu qu'on a poſé eſt facile à conſtruire, puiſque ce n'eſt que la parabole quarrée qui eſt ſur le même

même axe & repetée au-dessus du sommet, comme on a vû dans les lieux ; car c'est cette parabole quarré-quarrée qu'on a introduite dans l'équation proposée.

Pour la seconde parabole il faut la réduire en posant $x + \frac{1}{2}a = t$, & l'on aura $yy = at$.

Soit donc sur l'axe *KAG* la parabole quarré-quarrée du premier lieu *DABEF*. Et par le sommet *A* ayant mené *AM* perpendiculaire à *GA* & $= \frac{1}{2}a$, & sur *MA* pour axe & pour parametre $= a$ soit décrit la même parabole *BME*. Dans la premiere parabole les *AG* étant les abscisses $= y$ & les *BG* étant les ordonnées $= x$, & le contraire dans la seconde parabole.

Il est évident par cette construction, que ces deux paraboles se couperont dans quatre points *BDFE*, & qu'elles donneront quatre valeurs de x sçavoir *BG*, *DI*, *FL*, *EK* dont deux *BG*, *EK* seront égales entr'elles, & les deux autres aussi égales entr'elles. Cependant cette équation n'a que deux racines réelles dont l'une est vraye & l'autre fausse, & elles se trouvent repetées à cause que les lieux de cette construction sont plus élevez qu'ils ne devroient être pour la construire simplement. Mais cherchons une autre construction.

Si à la seconde équation que nous avons trouvée $yy - ax - \frac{1}{2}aa = 0$ nous ajoûtons la premiere $xx - ay = 0$, nous aurons un troisiéme lieu $yy - ax - \frac{1}{2}aa + xx - ay = 0$, lequel sera au cercle, & qui étant combiné avec le précedent, par sa construction doit encore donner les racines de l'équation, & il les donnera toutes seules & sans repetition. Mais pour construire ce cercle il faut le réduire en posant $y - \frac{1}{2}a = z$; & $x \frac{1}{2}a = v$, & l'on aura l'équation réduite au cercle $zz + vv = aa$.

Ces sortes de lieux tirez de la combinaison d'autres lieux, demandent des remarques particulieres que nous ferons dans un autre Memoire ; & c'est la méthode dont s'est servi M. Sluze pour expliquer les constructions que M. Descartes a donné dans sa Géometrie.

Mais si l'on veut construire ce lieu au cercle avec la FIG. XVII.

parabole quarré-quarrée qu'on a introduite, & dont le parametre eſt $= a$ comme dans l'exemple précedent ; & le ſommet A commun ayant mené AH perpendiculaire à l'axe & égale à $\frac{1}{2} a$, & HC parallele à l'axe & auſſi égale à $\frac{1}{2} a$, le point C ſera le centre du cercle du lieu, & ſon rayon $= a$. Ce cercle coupera la parabole BAD aux deux points BD qui donneront les deux valeurs de x BG, DI ou les deux racines de l'équation, comme on les a trouvées ci-devant.

Mais ce cercle coupe encore l'autre parabole EF qui eſt partie de la parabole quarré-quarrée du lieu, aux deux points EF qui doivent auſſi donner deux valeurs x par les ordonnées EK, FL & qui ne ſont pas les mêmes que les deux autres. D'où viennent donc ces deux racines EK, FL ? Je dis qu'elles n'appartiennent point à l'équation propoſée ; car ſi l'on cherche cette équation par la racine BG, on la trouvera en ſubſtituant dans ſa valeur donnée par la parabole quarré-quarrée, celle qu'on tirera du cercle à l'ordinaire, & de plus en ſubſtituant encore à la place de y ſimple qui reſte dans un des termes, la valeur de cet y trouvée par la parabole ſimple DAB, on aura l'équation propoſée, ce qui fait connoître que BG eſt une des racines de l'équation. Ce ſera la même choſe pour l'autre racine DI.

Mais ſi l'on cherche l'équation propoſée par la racine EK, on trouvera auſſi d'abord la même valeur par la ſubſtitution de cette racine qui vient du cercle ; mais pour y ſimple qui reſte encore dans un de ſes termes, il faudra le faire évanoüir par le moyen de la parabole ſimple EAF, laquelle donne $-ay$, ce qui donneroit l'équation $x^4 + 2aaxx - a^3x - \frac{1}{2}a^4 = 0$, qui eſt differente de la propoſée ; ce qui fait connoître que ces racines EK & FL n'appartiennent point à l'équation propoſée : auſſi l'inconnuë de l'équation qu'on tirera du lieu au cercle & de celui à la parabole quarré-quarrée ſera élevée au 8ᵉ. degré, laquelle pouvant avoir 8 racines les deux FL, EK s'y trouveront.

Enfin on peut trouver une autre ſolution plus ſimple que les précedentes. Car ſi l'on poſe le premier lieu $x^4 = a^3y$ qui eſt à une parabole quarré-quarrée qui a la forme de la parabole ſimple, & qu'on l'introduiſe dans la propoſée, on aura $a^3y = a^3x + \frac{1}{2}a^4$, laquelle ſe réduit à $y = x + \frac{1}{2}a$ qui eſt un lieu à la ligne droite.

Soit la parabole *BAD* dont l'équation a été priſe $x^4 = a^3y$, laquelle ait pour axe *AG* dont les parties *AG* ou abſciſſes ſoient $= y$ & les ordonnées $BG = x$.

FIG. XVIII.

Maintenant pour le lieu à la ligne droite ſoit pris ſur l'axe la partie $AN = \frac{1}{2}a$, dont les *NG* ſeront $y - \frac{1}{2}a$; mais ſoit tiré la perpendiculaire *AH* à l'axe laquelle ſoit faite $= \frac{1}{2}a$, & par les points *H* & *N* ſoit mené la ligne droite *HNB* qui ſera le lieu à la ligne droite de l'équation, combiné avec celui à la parabole: car les $NG = y - \frac{1}{2}a = x$ ſeront auſſi $= GB$. *DI* ſera $= -x = \frac{1}{2}a - y$ On aura donc par cette conſtruction les deux ſeules racines de l'équation propoſée. Et c'eſt cette maniere de conſtruction qu'on doit regarder comme la plus ſimple de toutes celles dont on peut ſe ſervir.

La conſtruction ſeroit encore aſſez ſimple, ſi l'on poſoit pour premier lieu $x^3 = aay$, car le ſecond ſeroit une hyperbole entre ſes aſymptotes : mais cette conſtruction n'eſt pas ſi ſimple que celle de la parabole $yy = ax + \frac{1}{2}aa$ avec le cercle, comme ci-deſſus.

VII. EXEMPLE.

Soit l'équation propoſée $x^4 - 4aaxx - 2a^3x - \frac{1}{4}a^4 = 0$.

Je prens le premier lieu $x^4 = aayy$ qui eſt une parabole quarré-quarrée dont la racine eſt $xx = ay$; & ayant ſubſtitué dans l'équation propoſée la valeur de x^4, on a le ſecond lieu,

$aayy - 4aaxx - 2a^3x - \frac{1}{4}a^4 = 0$, qui ſe réduit à

$yy - \frac{1}{4}aa = 4xx + 2ax$, & diviſant par 4 on aura,

$\frac{1}{4}yy - \frac{1}{16}aa = xx + \frac{1}{2}ax$, & réduiſant en poſant $x + \frac{1}{4}a = z$, on aura l'équation $zz = \frac{1}{4}yy$ qui eſt un lieu à la ligne droite.

FIG. XIX.

Pour construire ce lieu avec la parabole quarré-quarrée qu'on a introduite d'abord, laquelle soit *BADEF* dont le parametre $= a$ & les abscisses $AG = y$, les ordonnées $GC = x$.

Mais par la réduction on a $x + \frac{1}{4}a = z$: on menera *AO* perpendiculaire à l'axe *AG* de la parabole & $= \frac{1}{4}a$, & le point *O* sera l'origine des y sur *OP* parallele à l'axe *AG*, & les z seront perpendiculaires à *OP* qui seront les *PB*.

Pour la construction du lieu à la ligne droite on a $4 \mid 1 \parallel yy \mid zz$, ou bien $2 \mid 1 \parallel y \mid z$: On prendra donc sur l'axe *AG*, la partie $AH = 2\,AO = \frac{1}{2}a$, & l'on menera la ligne *OH* qui sera le lieu à la ligne droite qu'il falloit construire.

Il est évident que cette ligne droite coupera la parabole quarré quarrée en quatre points *B I L E*, lesquels donneront quatre racines de l'équation, dont une seule vraye *BG* est égale aux trois fausses ensemble *IK*, *LM*, *EQ*: ce qui est marqué par les signes de l'équation. Et le produit de la racine vraye par l'une des fausses sera,

$xx - 2ax - \frac{1}{2}aa = 0$, & celui des deux autres fausses sera $xx + 2ax + \frac{1}{2}aa = 0$. Mais en résolvant ces équations on trouvera que la vraye racine sera $x = \sqrt{\frac{3}{2}aa} + a$, la fausse $x = -\sqrt{\frac{1}{2}aa} + a$, le produit de ces deux racines donnent le premier.

L'autre fausse $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa} - a$, & la derniere $x = -\sqrt{\frac{1}{2}aa} - a$; ce qui donne l'autre.

Cet exemple fait voir que si l'on n'avoit construit que la parabole simple *BAD*, on n'auroit eu que deux racines au lieu des quatre qui sont dans l'équation proposée, quoique ces deux lieux ayent toutes les conditions necessaires pour les donner toutes quatre, & même huit.

VIII. EXEMPLE.

Soit l'équation proposée qu'il faut construire,

$x^4 - 5aaxx + 4a^4 = 0$.

Soit pris le premier lieu $ay = xx$, ou son quarré

$aayy = x^4$ qui eſt à la parabole quarré-quarrée.

Et ayant ſubſtitué la valeur de x^4 dans la propoſée; on aura le ſecond lieu $yy - 5ay + 4aa = 0$.

Et réduiſant ce lieu en prenant $y - \frac{5}{2}a = z$, on aura $= zz = \frac{9}{4}aa$ qui eſt un lieu aux hyperboles infinies, c'eſt-à-dire aux hyperboles dont $\frac{3}{2}a$ eſt le demi-axe & ſon parametre infini.

Pour la conſtruction ſoit la parabole *ABDEF* ſur l'axe *AG* & dont le parametre eſt $= a$. FIG. XX.

Pour le lieu aux hyperboles oppoſées infinies, on a par la réduction $y - \frac{5}{2}a = z$. On prendra donc ſur l'axe *AG* la partie $AO = \frac{5}{2}a$, & le point *O* ſera l'origine ou le centre de ces hyperboles lineaires dont le demi-axe $= \frac{3}{2}a$; c'eſt pourquoi on prendra *OG* & *OK* chacune égale à $\frac{3}{2}a$, leſquelles ſeront $= z$, ſçavoir $OG = + z$ & $OK = - z$; & enfin par les points *G* & *K*, on tirera les hyperboles ou lignes droites *IGH* & *DKB*, qui rencontrant la parabole aux points *HIBD* donneront les quatre racines de cette équation, ſçavoir *GH*, *GI* chacune $= x$ une vraye & une fauſſe & égales entr'elles, & les deux autres *KB*, *KD* auſſi chacune $= x$ une vraye & une fauſſe & égales entr'elles, qui ſeront les quatre racines de l'équation propoſée.

Il eſt facile à voir par les grandeurs de *AO*, *OG* & *OK* que $GH = 2a$ & $AB = a$.

On remarquera que ſi l'on s'étoit contenté de décrire ſeulement le lieu à la ligne droite *IGH* tel qu'il paroiſſoit par $z = \frac{3}{2}a$ racine de $zz = \frac{9}{4}aa$, on n'auroit eu que deux des quatre racines de cette équation, d'où l'on auroit pû dire que la regle étoit défectueuſe.



ABREGE'
DE CATOPTRIQUE.

Par M. CARRE'.

1709.

IL y a sept ou huit ans que je composai des Abregez de Catoptrique & de Dioptrique démontrés par l'Algebre, en n'employant qu'une seule Formule generale, de laquelle je tirois par Corollaires le plus grand nombre des propositions démontrées d'une maniere fort longue par les differens Auteurs qui en ont traité. Ce fut le sçavant M. Halley qui m'en donna l'idée par la lecture d'un Mémoire qui se trouve dans le Suplément des Journaux des Sçavans de Leipsic en 1696, & qui renferme toute la doctrine des Foyers dans les verres sphériques. Ainsi ce que j'avois fait n'étoit que pour moi & pour quelques Amis à qui j'en avois donné copie, quoiqu'on me conseillât d'en faire un autre usage. M. Guisnée donna dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1704. une Méthode generale pour déterminer les Foyers de toutes sortes de verres de quelque courbure qu'ils fussent, qui a été fort bien reçuë : ce qui me fit penser à donner aussi ce que j'avois fait sur la Catoptrique. Mais une maladie de près de quatre années, & dont je ne sçai pas si je pourrai me rétablir, m'en a empêché; ensorte que je ne pensois plus à mon Mémoire. Parcourant il y a quelque tems les Journaux de Leipsic de ces dernieres années, j'ai trouvé dans le Volume de 1707. une Méthode pour déterminer les foyers des Miroirs sphériques, composée par un autre Sçavant Anglois nommé M. Ditton, & qui suit précisément les mêmes idées que M. Halley; c'est à-dire, qu'il pose ce principe, que dans les petits angles, les côtés sont en même raison que les angles ausquels ils sont opposés. Comme mon principe est un peu different & beaucoup

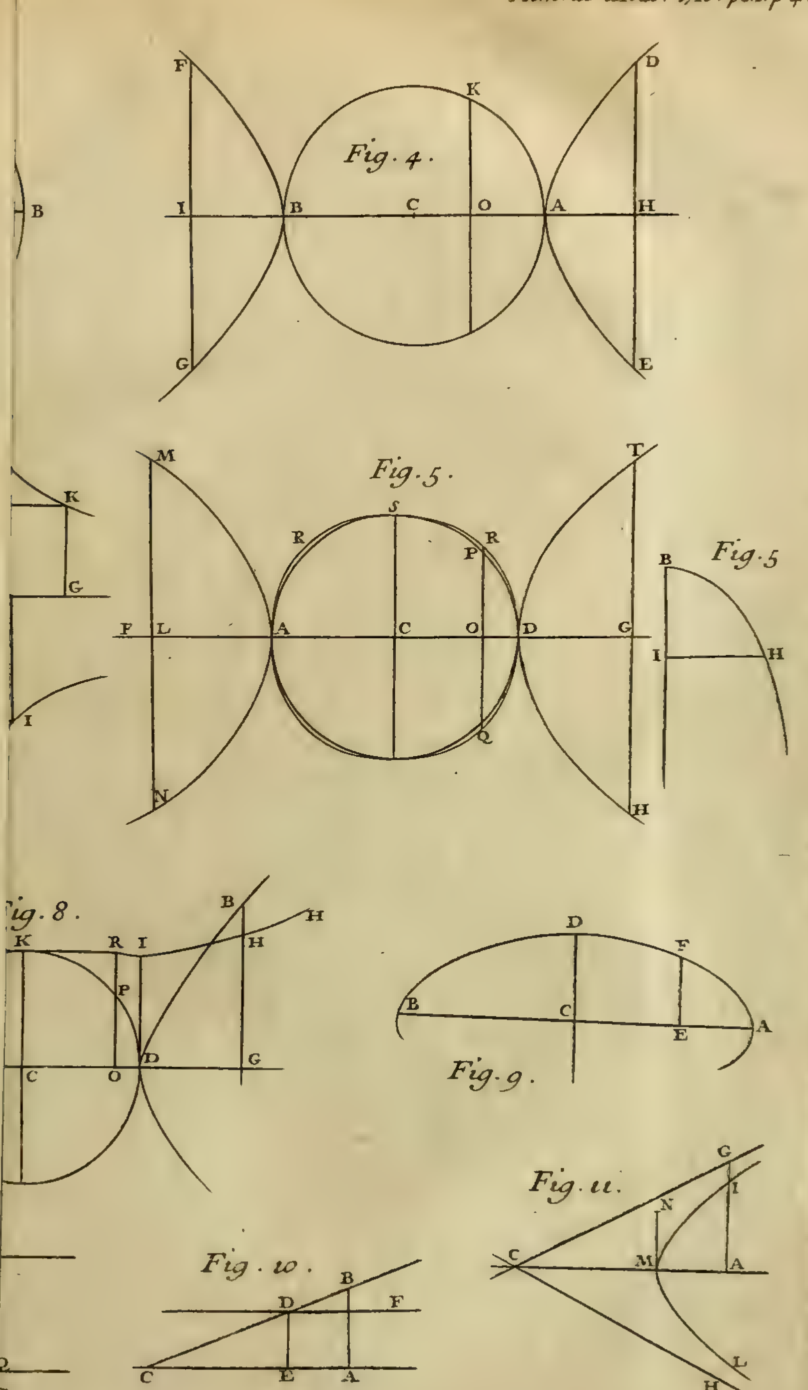
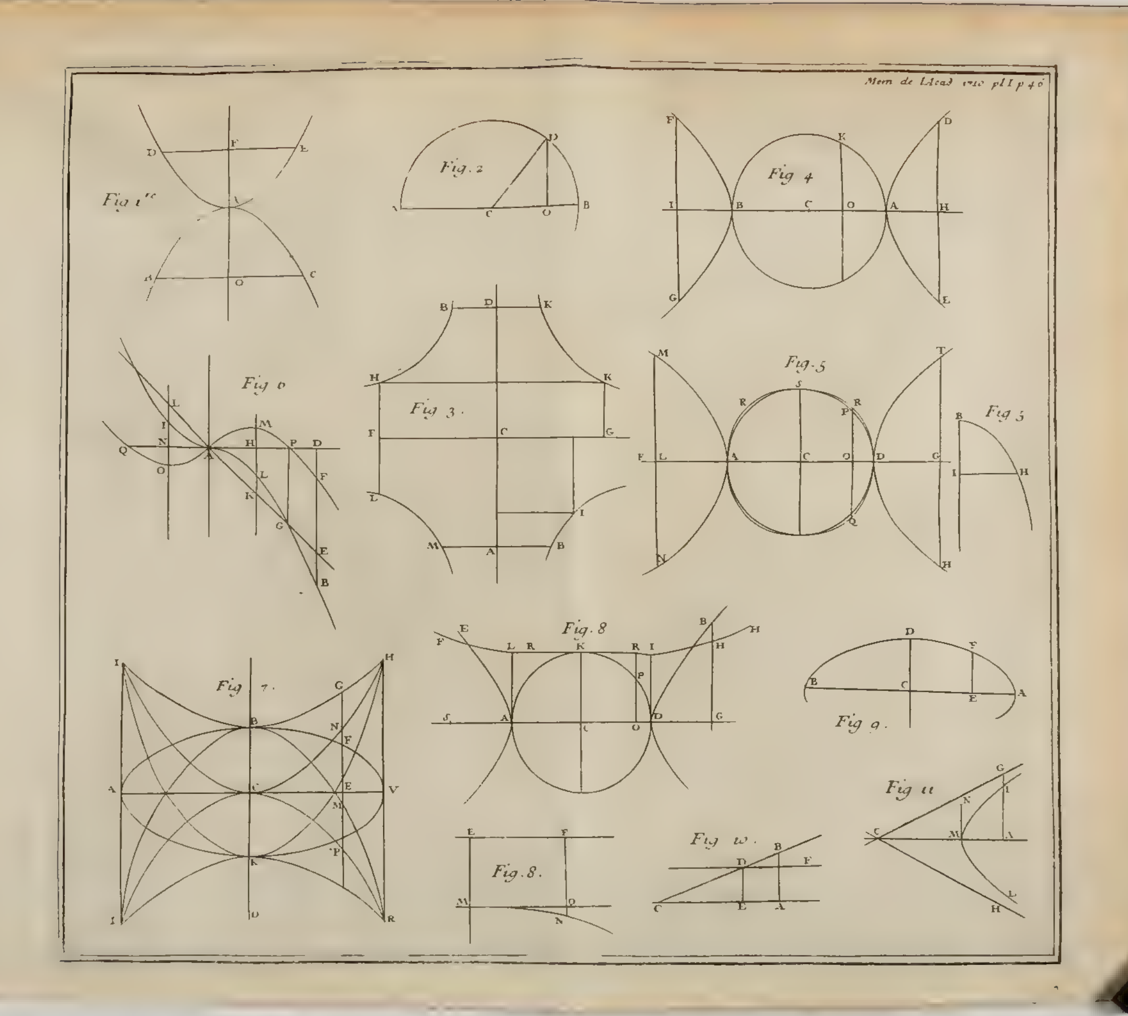


Fig. 4.
F
D
K
I
B
C
O
A
H
G
E
Fig. 5.
M
T
S
R
R
P
F
L
A
C
O
D
G
Q
N
H
Fig. 5
B
I
H
K
G
I
Fig. 8.
B
H
K
R
I
H
P
D
G
C
O
D
F
B
C
A
E
Fig. 9.
G
Fig. 11.
I
N
C
M
A
L
H
Fig. 10.
B
D
F
C
E
A


Mem de l'Acad 1710 pl I p 46
Fig 1re
Fig. 2
Fig 4
Fig 6
Fig 3.
Fig. 5
Fig 5
Fig 7.
Fig. 8
Fig 9.
Fig 11
Fig. 8.
Fig 10.

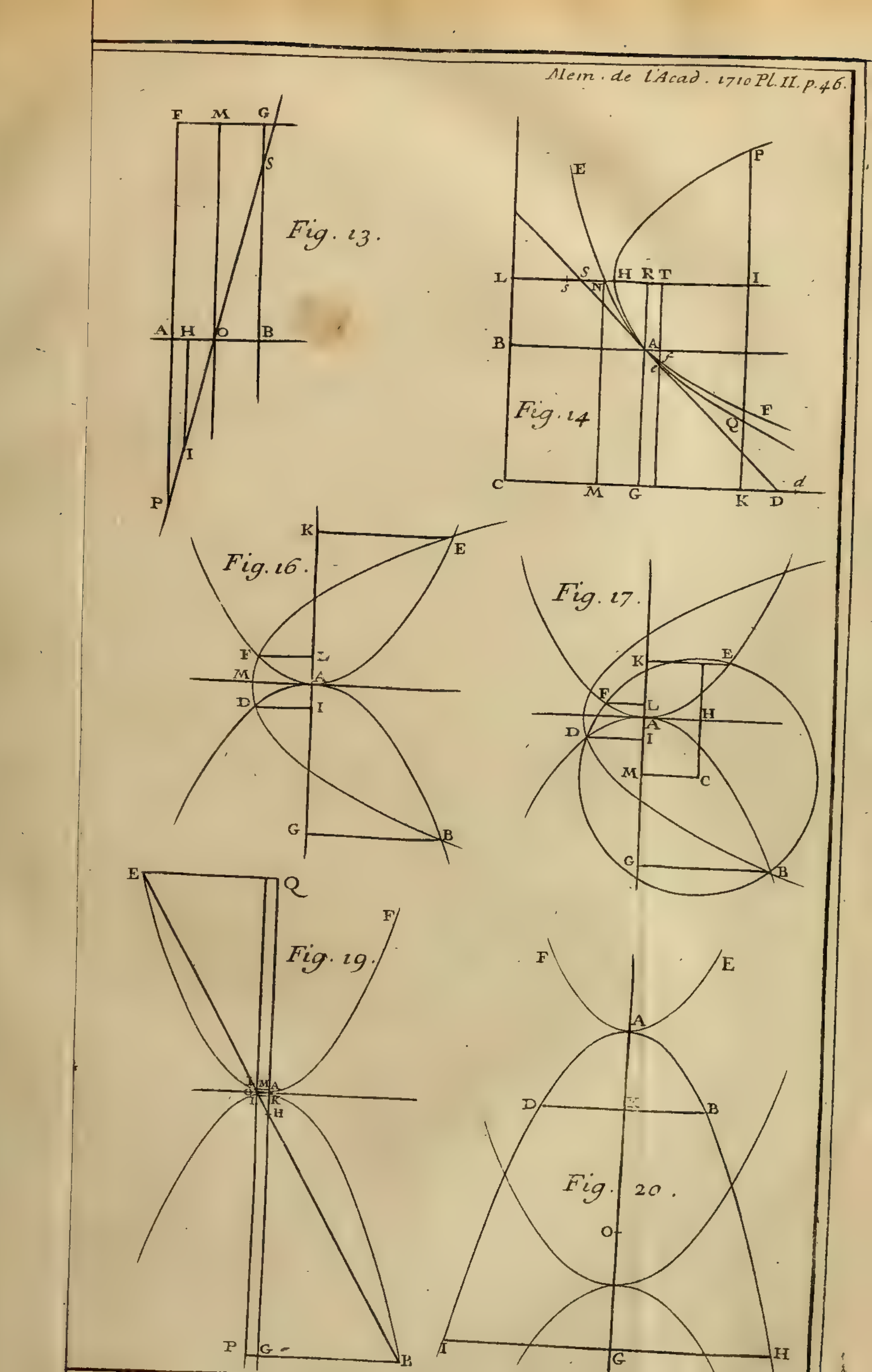
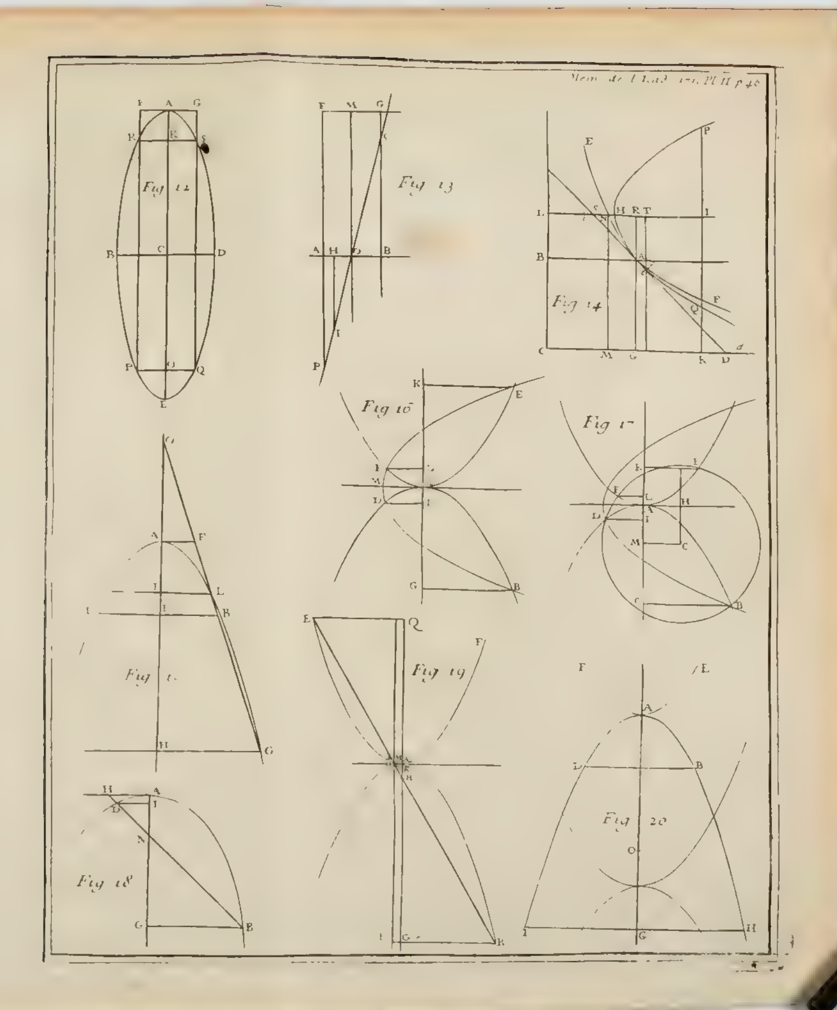


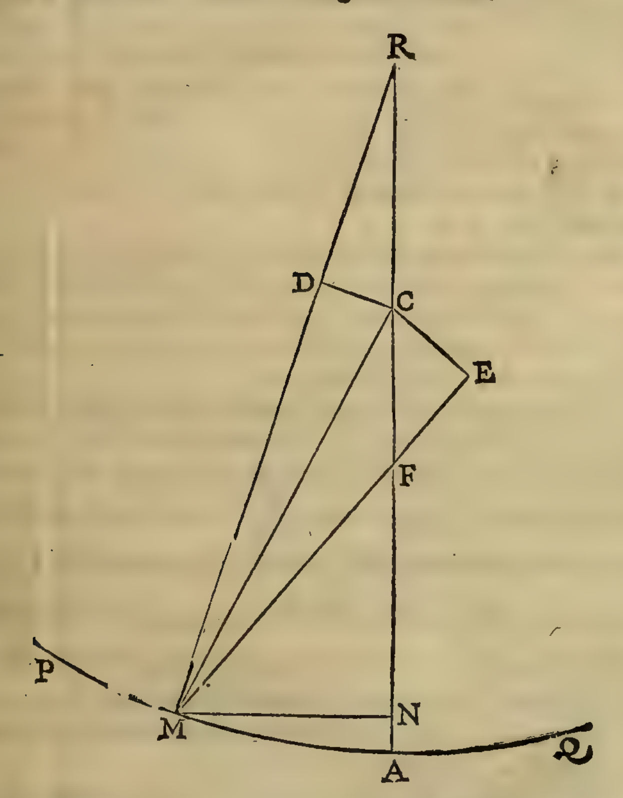
Fig. 13.
F M G S A H O B I P
Fig. 14
E P L S s N H R T I B A f e F Q C M G K D d
Fig. 16.
K E F L M A D I G B
Fig. 17.
K E F L A H D I M C G B
Fig. 19.
E Q F M A K H P G B
Fig. 20.
F E A D B O I G H


Mem. de l'Acad. 17.. Pl. II p. 40
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20

plus ſimple que le ſien, & que je tire d'autres conſéquences, je me ſuis déterminé à donner ce que j'ai fait : l'Académie en fera tel uſage qu'il lui plaira.

PROBLEME GENERAL.

Un Miroir concave d'une courbure quelconque étant donné avec un point ou un objet *rayonnant* dans l'axe de ce miroir, trouver le point où les rayons réflechis ſe réüniſſent, & où ſe doit former l'image de l'objet.



Soit une portion de Miroir concave *PQ* d'une courbure quelconque, que *RA* répreſente l'axe de ce miroir, & que *R* pris dans cet axe ſoit le point ou l'objet rayonnant,

d'où partent une infinité de rayons lumineux qui tombent su la surface PQ; Que RM soit un de ces rayons incidens pris infiniment proche de RA : L'on demande le point F où le rayon réfléchi MF ira couper l'axe RA de ce miroir.

Soit menée du point M la ligne MC, perpendiculaire à la courbe PQ, qui sera le rayon de la developée, & qui coupera l'axe en un point C; il est clair que cette ligne divisera l'angle RMF formé par les rayons incident & réflechi en deux parties égales, à cause de l'égalité des angles d'incidence & de réflexion. Soient encore menées du point C les perpendiculaires CD sur RM, & CE sur MF prolongée, ces lignes seront égales, puisqu'elles peuvent être prises pour les sinus des angles d'incidence & de reflexion, dont RM soit le sinus total. Soit enfin MN perpendiculaire sur l'axe RA.

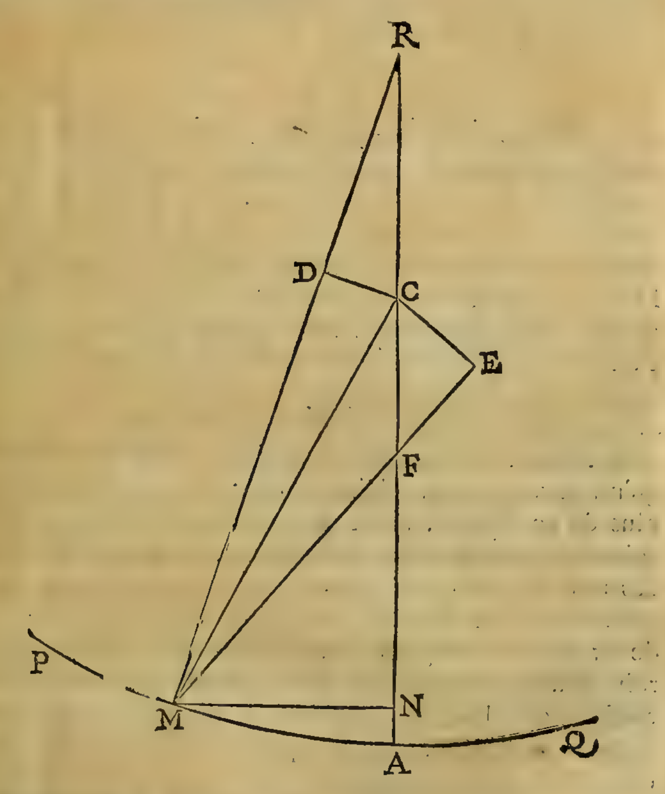
Ces choses étant ainsi posées: Soit RM ou RA ou RN $= y$: (ces lignes peuvent être prises pour égales à cause que l'on suppose que l'arc AM est infiniment petit) CM ou $CA = a$; donc $RC = y - a$; CD ou $CE = s$; FM ou FA ou $FN = x$; donc $CF = a - x$.

Pour trouver maintenant la valeur de la seule inconnuë x, l'on considerera que les triangles RNM & RDC sont semblables : ainsi l'on aura cette analogie $RC\ (y-a)$. $CD\ (s) :: RM\ (y)$. $MN = \frac{sy}{y-a}$. De même à cause des triangles semblables MNF, CEF, l'on aura $MN \left(\frac{sy}{y-a}\right)$. $FM\ (x) :: CE\ (s)$. $CF = \frac{xy-ax}{y} = a = a - x$; d'où l'on tire $x\ (FA) = \frac{ay}{2y-a}$, qui est précisément la même valeur trouvée dans l'*Analyse des infiniment petits, sect. 6. art.* 113; & c'est dans ce point où se doit former l'image de l'objet rayonnant : *Ce qu'il falloit trouver.*

Il est évident que si la courbe PMQ devient circulaire, la ligne CM ou CA en sera le rayon, puisque la developée du cercle se réunit en un point qui est le centre.

L'on

L'on peut trouver cette formule d'une maniere encore plus ſimple, en conſiderant que le triangle *RMF* ayant l'angle *M* diviſé en deux parties égales par la ligne *MC*, on aura cette proportion, *RM* ou *RA* (y). *MF* ou *FA* (x) :: *RC*. ($y-a$). *CF* ($a-x$). D'où l'on tirera cette concluſiou que dans les Miroirs ſphériques les points *R*, *C*, *F*, *A*; c'eſt-à-dire, que le point rayonnant, le centre, le foyer & le ſommet d'un miroir ſont ſituez de maniere, que les parties de ſon axe *RA*, *CA*, *FA* ſont entr'elles en proportion harmonique.



Comme l'on n'employe guéres dans les Miroirs dont on ſe ſert, que la figure plane ou ſphérique, l'on va dé-

duire de la formule $\frac{ay}{2y-a}$ que l'on vient de trouver, & que l'on nommera f dans la ſuite, d'une maniere très-ſimple la plûpart des propoſitions que les Auteurs ont démontrées dans leurs Traitez de Catoptrique. Et l'on en pourra encore tirer beaucoup d'autres dont ils n'ont point parlé : ce qui marque la grande utilité & la fecondité des formules, qui découvrent avec tant de facilité un très grand nombre de veritez d'uſage, que l'on ne pourroit démontrer d'une autre maniere que par de longs raiſonnemens, qui ſont ſouvent propres à rebuter les Lecteurs, au lieu de les fixer & de les éclairer.

DES MIROIRS CONCAVES.

Si $y = \infty$; alors $f = \frac{ay}{2y-a} = \frac{1}{2}a$: c'eſt-à-dire que ſi les rayons lumineux partent d'une diſtance infinie, les rayons réflechis ſe réüniſſent au quart de l'axe du miroir. Donc les rayons qui tombent paralleles ſur la ſurface d'un miroir concave, ſe réuniſſent après la réflexion au quart de l'axe de la ſphere dont le miroir eſt une portion ; & c'eſt ce point qu'on nomme le vrai foyer du miroir, parce que c'eſt en cet endroit où concourt un plus grand nombre de rayons, & que les corps qui y ſont placez, ſont échauffés ou enflammez.

Il ſeroit facile de faire voir ici : 1°. Qu'il eſt inutile qu'un Miroir ardent ſphérique contienne une étenduë de plus de 30 degrez, parce que tous les rayons qui tomberoient au-delà ne ſerviroient à rien. 2°. Que le foyer de ces miroirs, bien loin d'être un point, eſt un petit eſpace circulaire dont le diametre eſt égal à la corde d'un arc de 15 minutes du grand cercle de la ſphére dont le miroir eſt une portion. D'où l'on pourroit tirer cette concluſion, que l'on ne peut faire un miroir qui brûle à une diſtance quelconque comme quelques-uns l'ont crû, fondez ſur ce faux principe, que les rayons du Soleil étant toûjours phyſiquement paralleles, ſe réuniſſent par le moyen des miroirs ſphériques dans un point phyſique :

mais au contraire ce foyer à d'autant plus d'étenduë que le miroir eſt portion d'une plus grande ſphére ; en ſorte qu'il pourroit être portion d'une ſphére telle que ſon foyer ſeroit preſque auſſi grand que le miroir, comme il eſt facile d'en faire le calcul : d'où l'on voit que les rayons réflechis n'étant pas plus réunis que leurs incidens, ne pourroient produire aucun effet ſenſible.

3°. Que ſi l'on circonſcrit au cercle *PMQ* une parabole qui ait pour parametre le diametre de ce cercle, & qu'elle le touche par ſon ſommet, & que l'on conçoive deux miroirs l'un parabolique & l'autre ſphérique formez par le moyen de ces deux courbes ; il eſt évident, dis-je, qu'ils auront un même foyer, & qu'ainſi ils feroient à peu près le même effet : car les rayons qui tomberont paralleles ſur ces deux ſurfaces ſe réuniront les uns au quart du parametre, comme on le démontre dans les Sections Coniques, & les autres au quart du diametre, comme on le vient de voir. Et cette parabole eſt la plus petite de toutes celles qui peuvent être circonſcrites au cercle.

II. Si $y = a$ qui exprime le rayon de la ſphére dont le miroir eſt une portion ; l'on aura auſſi $f = a$: c'eſt-à-dire, que ſi le point rayonnant eſt au centre du miroir, l'image s'y formera auſſi ; ce qui eſt évident, puiſque dans ce cas les rayons incidens ſont perpendiculaires à la ſurface du miroir. D'où l'on peut conclure : 1°. Que dans quelque endroit que l'on ſe place pour ſe regarder dans un miroir concave, on ne peut ſe voir que dans une ligne qui paſſe par le centre de ce miroir, & qui en eſt un des diametres : car on ne ſe peut voir que par des rayons qui ſe réflechiſſent ſur eux-mêmes. Donc ſi un œil eſt placé au centre du miroir, il doit ſe voir dans tout le miroir, mais tout eſt confus à cauſe du concours des rayons. 2°. Que ſi un objet eſt placé au centre du miroir, & que l'œil du ſpectateur ſoit hors du miroir, il ne pourra jamais voir l'objet, parce qu'il ne ſera plus expoſé à l'action des rayons réflechis.

III. Si $y > a$ comme on l'a ſuppoſé d'abord, donc $f < a$, mais $> \frac{1}{2} a$: c'eſt-à-dire que ſi la diſtance du point rayonnant eſt plus grande que le demi axe du miroir, la diſtance de l'image au miroir ſera toûjours plus grande que le quart de cet axe ; ou ce qui eſt la même choſe, ſi le point rayonnant eſt au-delà du centre, les rayons réflechis ſe réuniront entre le centre & le vrai foyer. D'où l'on peut conclure : 1°. Que plus un objet s'éloignera, plus ſon image approchera du foyer ; mais qu'elle n'y arrivera jamais, parce que les rayons qui partent de cet objet ne ſeront jamais paralleles, ce qui eſt neceſſaire afin que leur réunion ſe faſſe au foyer.

2°. Que plus l'objet s'éloignera du miroir, plus au contraire ſon image s'en approchera ; & ſi l'objet s'en approche, l'image s'en éloignera, & allant pour ainſi dire comme au-devant de l'objet, ils ſe réuniront au centre. Et cette image paroîtra comme ſuſpenduë en l'air entre l'objet & le miroir.

3°. Que ſi l'œil du ſpectateur eſt plus éloigné du miroir que l'image, l'objet paroîtra renverſé, c'eſt à-dire que ce qui eſt en haut paroîtra en bas, & ce qui eſt à droite paroîtra à gauche, parce que les rayons réflechis ſe feront croiſez avant que d'entrer dans l'œil.

4°. Que ſi l'œil eſt placé entre le foyer & le miroir, il verra cet objet dans ſa ſituation naturelle.

5°. Comme les rayons qui partent d'un point de l'axe pris au-deſſus du centre ſont toûjours convergens en ſe réflechiſſant ; il eſt clair que l'on peut par le moyen d'un miroir conçave corriger le défaut de ceux qui ne peuvent voir que de loin, & qu'on nomme *Presbytes* : car les rayons réflechis entreront dans l'œil de la même maniere que s'ils partoient d'un objet fort éloigné, ce qui eſt neceſſaire afin que ces ſortes de vuës apperçoivent diſtinctement les objets : à quoi l'on peut ajoûter qu'ils renvoyent une plus grande quantité de rayons dans l'œil. Ainſi l'on peut dire que ces miroirs font le même effet par réflexion que les verres convexes par réfraction. D'où l'on voit

encore que plus le miroir concave eſt portion d'une petite ſphére, plus les rayons réflechis ſeront convergens, & par conſéquent que ces rayons ſe réuniront plûtôt dans l'œil.

IV. Si $y < a$, donc f ſera toûjours $> a$: c'eſt-à-dire que ſi le point rayonnant eſt ſitué entre le centre & le foyer, les rayons réflechis iront toûjours rencontrer l'axe au-delà du centre : & reciproquement les rayons réflechis concourans au-delà du centre, le point rayonnant ſera toûjours entre le centre & le foyer.

D'où l'on peut conclure : 1°. Que ſi l'on place un objet entre le miroir & ſon centre, plus il ſera proche du centre plus il paroîtra grand : car à cauſe de la divergence des rayons, il ſera vû ſous un plus grand angle.

2°. Qu'il ſera vû dans ſa ſituation naturelle : car ce qui eſt à droite paroîtra à gauche dans le miroir, & ce qui eſt à gauche paroîtra à droite.

3°. L'on peut encore conclure de ce que l'on vient de dire, que ſi l'on décrit une Ellipſe qui ait pour foyer les points R & F & pour parametres une ligne égale à l'axe du miroir $= 2\,CA$, & qu'on en forme un miroir concave, il ſera phyſiquement le même effet que le miroir ſphérique formé par le cercle qui la toucheroit à ſon ſommet A : car l'on démontre dans les Sections Coniques que les rayons qui partent d'un des foyers d'une Ellipſe, ſe réuniſſent à l'autre foyer après la réflexion. Et il ſeroit facile de prouver que ce cercle eſt le plus grand de tous ceux qui peuvent être inſcrits dans cette Ellipſe.

V. Il eſt encore évident que la valeur de F ſera poſitive, negative ou infinie ſelon que la quantité $2y$ ſera plus grande, plus petite, ou égale à a. Car 1°. ſi $y > \frac{1}{2}a$, la grandeur $f = \frac{ay}{2y-a}$ ſera poſitive ; d'où l'on doit conclure que le point rayonnant & le foyer ſeront vers un même côté du miroir comme on l'a ſuppoſé en faiſant le calcul.

D'où l'on voit que ſi l'on place un objet entre le centre & le foyer du miroir, & que les yeux du ſpectateur ſoient placez plus proche du miroir que n'eſt le point de concours des rayons réflechis, cet objet doit paroître confus : car dans ce cas les rayons réflechis ſe réuniſſent dans un point de l'axe qui eſt au-delà du centre : or les yeux étant placez avant le concours de ces rayons, les recevront comme s'ils venoient de differens points ; donc ils ne ſe réuniront pas exactement ſur la retine, donc la viſion ſera confuſe.

Mais ſi l'œil du ſpectateur eſt placé au-delà du centre, il eſt clair qu'il verra cet objet renverſé, parce que les rayons réflechis s'étant croiſez avant que d'entrer dans l'œil, ce qui eſt à droite a paſſé à gauche, & ce qui eſt à gauche a paſſé à droite.

Comme l'image d'un objet placé entre le foyer & le centre paroît au-devant du miroir plus éloignée que le centre, il eſt facile de rendre la raiſon de cet effet qui paroît ſurprenant : c'eſt que ſi l'on préſente vers le foyer d'un miroir concave la pointe d'une épée nuë, elle paroît revenir par un mouvement contraire, en ſorte que ceux qui ne connoiſſent pas cet effet, mettent la main au-devant de leur viſage, de crainte qu'elle ne les aille frapper.

2°. Si $y < \frac{1}{2} a$; c'eſt-à-dire que ſi le point rayonnant eſt plus proche du miroir que le quart de l'axe, ou ce qui revient au même, s'il eſt placé entre le miroir & ſon foyer, l'image de ce point ſera ſitué dans l'axe de ce miroir, mais prolongé au-delà du ſommet du miroir, parce qu'alors la valeur de f étant négative, le concours des rayons réflechis ſe fait au-delà du miroir : Donc ces rayons ſeront toûjours divergens ; & ainſi plus un œil ſera proche du miroir, plus ces rayons ſe réuniront loin du cryſtallin. D'où l'on voit que plus un objet ſera proche du foyer du miroir, plus ſon image en doit paroître éloignée. Car les rayons réflechis étant moins divergens, leur réunion ou l'image de l'objet doit ſe faire plus loin d'un miroir.

Il eſt encore évident, que ſi l'image d'un objet paroît

au-delà du miroir, sa distance du miroir est toûjours plus grande que celle de l'objet rayonnant. Mais il est facile de voir que si l'objet s'éloigne du miroir, l'image s'en éloignera aussi ; & qu'au contraire l'objet s'en approchant, l'image s'en approchera : car dans ce cas les rayons réflechis sont plus divergens, donc leur réunion se fera plûtôt au fond des yeux, au lieu que dans le premier cas ils sont moins divergens. Mais l'image de cet objet paroîtra toûjours dans sa situation naturelle.

Il est encore facile de connoître, que si un objet est placé hors la concavité d'un miroir, & qu'il soit plus éloigné de l'axe de ce miroir que l'œil du spectateur, il ne pourra pas voir cet objet.

3°. Enfin si $2y = a$ ou $y = \frac{1}{2}a$; donc $f = \infty$; c'est-à-dire que si un objet est placé au quart de l'axe du miroir, les rayons réflechis seront paralleles à cet axe ; donc l'image de cet objet devroit paroître à une distance infinie. D'où l'on voit que si l'on met la flamme d'une chandelle au foyer d'un miroir sphérique, ou parabolique, le miroir paroîtra comme en feu, & il réflechira assez de lumiere pour lire à une très-grande distance. Le P. Taquet dit qu'il a lû par ce moyen à une distance de quatre cent pieds.

DES MIROIRS PLANS.

VI. Si dans la formule $f = \frac{ay}{2y-a}$, l'on suppose $a = \infty$; il est visible que le miroir deviendra plan au lieu de concave qu'on l'a supposé : l'on aura donc $f = -y$; ce qui fait connoître que les rayons réflechis sont toûjours divergens, & que l'image doit paroître autant au-delà du miroir, que l'objet est éloigné de sa surface : car l'œil du spectateur est affecté de la même maniere que si l'objet étoit placé au-delà du miroir dans le point de réunion des rayons réflechis prolongez ; donc son image y doit paroître.

D'où l'on peut conclure : 1°. Que l'image de chaque point d'un objet doit paroître dans le concours du rayon

réflechi qui paſſe par le centre de l'œil & de la perpendiculaire menée de ce point rayonnant ſur la ſurface du miroir.

2°. Que la diſtance de l'image à l'œil eſt égale au rayon incident plus le rayon réflechi. Donc ſi l'on voyoit un objet par la réflexion de pluſieurs miroirs plans, la diſtance de ſon image à l'œil ſeroit égale à la ſomme des rayons incidens & des rayons réflechis.

3°. Que dans un miroir placé horiſontalement, les objets verticaux y doivent paroître dans une ſituation renverſée. Mais que les objets paralleles à la ſurface du miroir doivent auſſi paroître au-dedans paralleles, & que leurs images ne ſont pas ſemblablement poſées, quoique les objets paroiſſent dans leur ſituation naturelle.

4°. Que ſi les objets ſont inclinez, leurs images doivent auſſi paroître inclinées dans ces miroirs : ce qui peut ſervir à rendre raiſon pourquoi préſentant au plancher d'une chambre un miroir incliné, ce plancher paroît s'incliner de l'autre côté.

5°. Que ſi un miroir plan fait avec l'horiſon un angle de 45 degrez, les objets horiſontaux paroîtront verticaux, & au contraire les verticaux paroîtront horiſontaux.

6°. Que ſi l'on joint deux miroirs plans faiſant un angle quelconque, l'on ne pourra pas voir un même objet par le moyen de ces deux miroirs, ſi l'œil eſt tourné du côté de la convexité de l'angle : Mais s'il eſt tourné du côté de ſa concavité, on le pourra voir pluſieurs fois, ſi ces miroirs font un angle aigu. Que ſi l'on veut multiplier cet objet une infinité de fois, il faut que ces miroirs plans ſoient paralleles entr'eux.

7°. Il ſeroit facile de prouver que ſi l'inclinaiſon d'un miroir varie d'un degré, le rayon réflechi du rayon incident, ſe changera de deux degrez : ce qui pourroit ſervir à rendre raiſon pourquoi les rayons du ſoleil réflechis par l'eau d'une riviere qui coule même fort lentement, ſont fort agitez, enſorte qu'un petit mouvement de l'eau

les

les porte dans une étenduë ſurprenante. D'où l'on peut conclure que ſi l'on tourne un miroir circulairement, on fera auſſi mouvoir l'image de l'objet circulairement, ce qui fera paroître l'objet ſe mouvoir une fois plus vîte.

DES MIROIRS CONVEXES.

VII. Si l'on conçoit que le point rayonnant tombe de l'autre côté du point *R* par rapport au point *A*, ou ce qui revient au même, ſi la Courbe *PMQ* eſt convexe vers le point lumineux, alors y deviendra negative de poſitive qu'elle étoit dans la formule. Ainſi *FA* ou $f = \frac{-ay}{-2y-a} = \frac{ay}{2y+a}$: & comme cette valeur eſt toûjours poſitive, il eſt clair que les rayons réflechis infiniment proches ſeront toûjours divergens; c'eſt-à-dire que le foyer convexe, ou le point de réunion des rayons réflechis, ſera toûjours au-delà de ce miroir. D'où l'on voit que ces miroirs ſont encore moins propres à échauffer ou brûler que les miroirs plans.

L'on trouveroit encore la même valeur de f en changeant dans les miroirs ſphériques le ſigne de la grandeur a; ce qui eſt clair, puiſque le centre de ces miroirs eſt toûjours du côté oppoſé au point rayonnant.

Comme l'on ne peut voir par le moyen de deux miroirs plans faiſant un angle quelconque, le même objet repeté lorſque l'œil eſt tourné du côté de la convexité de l'angle, il eſt évident qu'un miroir convexe que l'on peut regarder comme compoſé d'une infinité de petits miroirs plans; ne ſçauroit non plus multiplier les objets : car du même point d'un miroir convexe, il ne peut venir dans l'œil que les rayons qui partent du point d'un objet qui lui répond: & c'eſt pour cette raiſon que l'on voit toûjours un point plus éclairé que les autres.

Il eſt viſible à cauſe de la divergence des rayons réflechis, que l'on peut ſe ſervir de ces miroirs pour corriger le défaut de ceux qui ont la vûë courte, & qu'on nomme *Myopes*: car ces rayons entrent dans l'œil ſous un plus

grand angle ; & de la même maniere que ſi l'objet étoit plus proche ; ce qui eſt neceſſaire pour ces ſortes de vûës, puiſqu'à cauſe de la trop grande convexité du cryſtallin, les rayons ſe réuniſſent avant que d'arriver à la retine, ce qui rend la viſion confuſe. Ainſi l'on peut dire qu'à l'égard de ceux qui ont la vûë courte, ces miroirs produiſent le même effet que les verres concaves.

D'où l'on peut conclure : 1°. Que plus un miroir convexe ſera proche de l'œil, plus les rayons réflechis qui partent d'un même point d'un objet ſe réüniront au-delà du cryſtallin. 2°. Que plus une vûë ſera courte, plus le miroir doit être convexe, c'eſt-à-dire portion d'une plus petite ſphére : car les rayons réflechis ſont d'autant plus divergens que le miroir eſt convexe.

L'on peut encore conclure de ce que le foyer du point rayonnant *R* ſe trouve du côté oppoſé à cauſe de la divergence des rayons, que ſi l'on décrit deux hyperboles oppoſées, dont l'une ait pour foyer le point *R* & l'autre le point *F* & pour parametre une ligne double de *CA*, ou égale à l'axe de la ſphére dont le miroir eſt une portion, celle qui a pour foyer le point *F* formant un miroir convexe, il fera phyſiquement le même effet que le miroir ſphérique formé par le cercle qui a pour rayon *CA* : car c'eſt la proprieté des foyers de ces hyperboles, comme on le démontre dans les Sections Coniques. Et il ſeroit facile de faire voir que le cercle qui touche cette hyperbole à ſon ſommet *A*, eſt le plus grand de tous ceux qui y peuvent être inſcrits.

VIII. Comme la valeur de f eſt toûjours poſitive, puiſque tous ſes termes ſont affectez des mêmes ſignes ; il eſt évident quelque grande que ſoit la diſtance de l'objet au miroir, l'image n'en paroîtra jamais plus éloignée que le quart de l'axe : Car ſi l'on ſuppoſe que $y = \infty$; l'on aura encore $f = \frac{1}{2}a$; c'eſt-à-dire que dans le cas que l'objet fût à une diſtance infinie du miroir, ſon image paroîtroit préciſément à la diſtance du quart du diametre de la ſphére dont le miroir eſt portion. Ce ſeroit la même choſe ſi les

rayons tomboient paralelles ſur la ſurface du miroir. D'où l'on peut tirer les concluſions ſuivantes.

1°. Que ſi l'objet s'approche du miroir, l'image s'en approchera auſſi; au contraire que l'objet s'en éloignant, ſon image s'en éloignera.

2°. Que la diſtance de l'objet au miroir eſt toûjours plus grande que celle de l'image au même miroir, & qu'ainſi on pourra quelquefois voir l'image d'un objet preſque dans la ſurface du miroir.

3°. Que la diſtance de l'image au centre du miroir eſt toûjours plus petite que le rayon.

4°. Que cette même diſtance de l'image au centre eſt encore plus grande que ſa diſtance au miroir.

5°. Les images paroiſſent toûjours plus petites que leurs objets: car à cauſe de la divergence des rayons, ces miroirs les font paroître ſous un plus petit angle que les miroirs plans, qui font voir les objets dans leur grandeur naturelle: D'où l'on voit que plus un miroir ſera portion d'une petite ſphére, plus un objet paroîtra petit.

6°. Si l'on approche l'objet du miroir, l'œil du ſpectateur demeurant immobile, ſon image paroîtra plus grande, parce que l'angle deviendra plus grand. Il en eſt de même ſi l'œil s'approche du miroir, & que l'objet demeure immobile; car ſon image paroîtra & plus grande & plus proche du miroir.

7°. L'image d'un point pris ſur la perpendiculaire au miroir, & qui en eſt près, paroît plus éloignée du centre, que celle d'un autre point, quoique plus éloigné du miroir. D'où il ſuit que les objets qui ſont perpendiculaires à la ſurface des miroirs convexes, doivent paroître renverſez.

IX. Comme la formule renferme trois grandeurs, la diſtance de l'objet lumineux au miroir, celle du centre & celle du foyer; il eſt évident que deux quelconques de ces grandeurs étant données, on trouvera toûjours la 3e: Ainſi ſuppoſant que la diſtance du centre & celle du foyer ſoient connuës, l'on connoîtra celle du point lumineux.

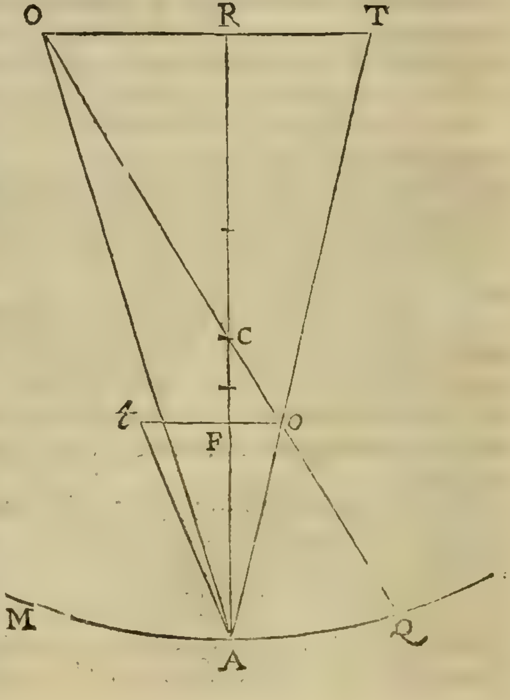
Ou, la diſtance du point lumineux & celle du foyer étant données, l'on trouvera celle du centre ou le rayon de la ſphére, dont le miroir eſt une portion. Ces choſes ſont trop faciles pour qu'on s'y arrête davantage.

REMARQUE.

Il eſt facile maintenant en ſe ſervant des mêmes principes, de reſoudre un Problême de Catoptrique qui ſe trouve dans quelques Auteurs. Mais il eſt bon auparavant de démontrer ce Lemme.

LEMME.

Les lignes menées du ſommet d'un miroir convexe ou concave aux extremitez d'un objet de ſon image, forment des angles égaux.



Soit un objet *OT*, & ſon image *ot*, ſoient menées du ſommet *A* les lignes *AO*, *AT*, *At*, *Ao*; il faut prouver que l'angle *OAT* = *tAo*.

Il eſt évident 1°. Que l'axe *RA* du miroir eſt perpendiculaire ſur l'objet & ſur l'image. 2°. Que ſi par les points *O*, *o*, l'on méne la ligne *Oo* prolongée en *Q*, elle paſſera par le

centre C. Or, par le Problême général, $xy - ax - ay - yx$; donc $y . x :: y - a . a - x$, c'eſt-à-dire, que $RA . FA :: RC . CF$; mais à cauſe des triangles ſemblables CRO, CFo, $RC . CF :: RO . Fo$; donc $RA . FA :: RO . Fo$; Ainſi à cauſe que les angles en R & en F ſont droits, les angles RAO & FAO ſont égaux; donc, &c.

COROLLAIRE.

D'où l'on peut conclure 1°. Que la grandeur de l'objet & de ſon image ſont entr'elles comme leurs diſtances du ſommet du miroir, ſi on les conſidere comme des lignes; & que ſi on les conſidere comme des ſurfaces, leurs grandeurs ſeront comme les quarrez de ces diſtances. 2°. Que l'objet & ſon image ſont coupés avec le même rapport par la ligne menée du ſommet du miroir par le centre.

PROBLEME.

Un objet étant donné avec un miroir, trouver à quelle diſtance de ce miroir on le doit placer, afin que ſa grandeur ſoit à celle de ſon image en telle raiſon que l'on voudra.

Soit nommé l'objet O; ſon image I; la diſtance de l'objet au miroir y; & celle de l'image au miroir f; & que la grandeur de l'objet ſoit à celle de ſon image dans la raiſon de m à n. Or par le Lemme la grandeur de l'objet eſt à celle de ſon image (en les regardant comme des ſurfaces) en raiſon des quarrez de leurs diſtances au ſommet du miroir: l'on aura donc $O . I :: yy . ff$; mais par l'hypothêſe $O . I :: m . n$; donc $yy . ff :: m . n$. Et parce que l'on a trouvé $f = \frac{ay}{2y - a}$; donc $yy . \frac{aayy}{4yy - 4ay + aa} :: m . n$; d'où l'on tire cette égalité du ſecond degré $yy - ay = \frac{maa - naa}{4n}$; donc $y = \frac{1}{2}a + \frac{a}{2}\sqrt{\frac{m}{n}}$. ou $y = \frac{a\sqrt{m} + a\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$: & mettant cette valeur dans celle de ff, l'on aura $\frac{aayy}{4yy - 4ay + aa} = \frac{\overline{m + n + \sqrt{m}} \times aa}{4m}$; mais $yy = \frac{\overline{m + n + 2\sqrt{mn}} \times aa}{4n}$; l'on aura donc

enfin $yy \cdot ff :: \frac{\overline{m+n+2\sqrt{mn}} \times aa}{4n} \cdot \frac{\overline{m+n+2\sqrt{mn}} \times aa}{4m} :: m \cdot n$. C'est à-dire que si l'objet est placé à la distance de $\frac{a\sqrt{m}+a\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$; son image paroîtra à la distance de $\frac{a\sqrt{m}+a\sqrt{n}}{2\sqrt{m}}$, & alors le rapport de leurs grandeurs sera dans la raison de m à n que l'on demande.

Que si l'objet & son image sont regardez comme des lignes ; alors leurs grandeurs seront proportionnelles à leurs distances du sommet du miroir ; ainsi l'on aura $O \cdot I :: y \cdot f :: m \cdot n$; d'où l'on tire $f = \frac{ay}{2y-a} = \frac{\overline{m+n} \times a}{2m}$, & $y = \frac{\overline{m+n} \times a}{2n}$, Si donc l'on place l'objet à la distance de $\frac{\overline{m+n} \times a}{2n}$, son image paroîtra à celle de $\frac{\overline{m+n} \times a}{2m}$; donc leurs grandeurs seront dans la raison donnée de m à n. *Ce qu'il falloit trouver.*

Il est évident que si l'on donnoit la distance de l'objet & de l'image au miroir, l'on auroit aussi le rapport de la grandeur de l'image à celle de l'objet.

Il sera encore facile lorsque l'image d'un objet sera formée par la réflexion de plusieurs miroirs, de trouver le rapport de la grandeur de l'objet à sa derniere image.



DES MOUVEMENS

Primitivement retardés en raison des tems qui resteroient à écouler jusqu'à leur entiere extinction dans le vuide faits dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses effectives du mobile.

PAR M. VARIGNON.

1709. 18. Dec.

ON a vû dans les Mem. des 15. Juin & 17. Août derniers (voyez les Mem. de 1709. c'est d'eux que seront prises les pages qu'on va citer.) ce que des Mouvemens primitivement accelerés, depuis zero ou non, en raison des tems écoulés, ainsi qu'on le suppose d'ordinaire avec Galilée, deviendroient dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses actuelles ou restantes du mobile: voici présentement ce qui devroit aussi arriver dans ces milieux à des mouvemens primitivement retardés en raison des tems à écouler jusqu'à leur entiere extinction s'ils ne trouvoient aucune résistance de la part du milieu, ainsi qu'on le pense encore d'ordinaire avec Galilée touchant les corps jettés de bas en haut dans le vuide.

PROBLÊME.

FIG. I.

La construction générale du Lem. 1. pag. 194. de 1709. étant ici supposée, trouver les courbes ARC *des résistances totales ou des vitesses perduës,* HUC *des vitesses restantes, &c. Dans l'hypothêse 1°. des résistances instantanées en raison des quarrés des vitesses restantes; & 2°. des vitesses primitives retardées en raison des tems qui resteroient à écouler jusqu'à leur entiere extinction, si le milieu ne leur faisoit aucune résistance.*

SOLUTION.

I. Soient encore ici les mêmes noms que dans l'art. 3.

du Lem. 1. pag. 195. de 1709. sçavoir $AF=a$, la vitesse initiale; $TV=v$, ce qu'il en resteroit dans un milieu sans résistance à la fin du tems $AT=t$; $AC=a$, ce qu'elle employeroit de tems en tout jusqu'à son entiere extinction dans ce milieu; $TR=r$, les résistances totales, ou les vitesses perduës pendant le tems AT dans le milieu résistant ici en raison des quarrés des vitesses actuelles ou restantes de celles-là; $RV=TU=u$, ces vitesses restantes à la fin de ces tems; $TE=z$ en raison des résistances instantanées dr.

II. Ces noms ainsi supposés, la premiere des deux conditions de ce Problême-ci donnera $TE\,(z)=\frac{TU\times TU}{a}\left(\frac{uu}{a}\right)$ $=\frac{\overline{TV-TR}^2}{a}\left(\frac{\overline{v-r}^2}{a}\right)$; & la seconde, $TV\,(v)=TC\,(a-t)$: De sorte que les deux ensemble donneront $z=\frac{uu}{a}$, & $z=\frac{\overline{a-t-r}^2}{a}$. Donc en substituant chacune de ces deux valeurs de z dans l'équation $\frac{dt}{a}=\frac{dr}{z}=\frac{-dt-du}{z}$ de l'art. 3. du Lem. 1. pag. 195. de 1709. L'on aura ici $\frac{dt}{a}=\frac{adr}{\overline{a-t-r}^2}$ pour l'équation de la Courbe ARC des résistances totales $TR\,(r)$ ou des vitesses perduës pendans les tems $AT\,(t)$; & $\frac{dt}{a}=$ $=\frac{-adt-adu}{uu}$, ou $uudt=-aadt-aadu$, d'où résulte aussi $aadt+uudt=-aadu$, ou $dt=\frac{-aadu}{aa+uu}$ pour l'équation pareillement requise de la Courbe HUC des vitesses restantes $TU\,(u)$.

III. Pour construire cette Courbe par le moyen de cette équation, il faut considerer que UV en HF, ou T en A, rend $HA=UT$ (*Lem.* 1. *pag.* 194. *de* 1709) $=RV=AF$ $=a$. Cela étant, soit du centre A & du rayon AH, le quart de cercle HSD, lequel rencontre CA prolongée en D, & qui ait $D\Omega$ pour tangente en ce point D, laquelle $D\Omega$ soit rencontrée en L, Ω, par UL, $H\Omega$, paralelles à CD. Soient les Secantes AL, $A\Omega$, lesquelles rencontrent le quart du cercle en Π, S; desquels points soient ΠP, SQ, paralleles

paralleles à HA, & qui rencontrent AD en P, Q. De l'autre extremité π de l'élement $\Pi\pi$ du quart de cercle soient aussi πp, πO, qui achevent le petit parallelograme rectangle $Pp\pi O$.

IV. Cette construction donnera non-seulement $AD = AH = a$, & $DL = TU = u$; mais encore $AL\ (\sqrt{aa+uu})$. $A\Pi\ (a) :: DL\ (u) . \Pi P = \frac{au}{\sqrt{aa+uu}}$. Et $AL\ (\sqrt{aa+uu})$. $A\Pi\ (a) :: AD\ (a) . AP = \frac{aa}{\sqrt{aa+uu}}$. Ce qui donne Pp ou $\pi O = \frac{-aaudu}{aa+uu \times \sqrt{aa+uu}}$; & ensuite $\Pi P \left(\frac{au}{\sqrt{aa+uu}}\right) . A\Pi\ (a) :: \pi O \left(\frac{-aaudu}{aa+uu \times \sqrt{aa+uu}}\right) . \Pi\pi = \frac{-aadu}{aa+uu}$. Donc l'art. 2. venant de donner aussi $dt = \frac{-aadu}{aa+uu}$, l'on aura ici $dt = \Pi\pi$; & par conséquent (en integrant) $t = H\Pi + q$. Mais le cas de $AT\ (t) = 0$ en A, rendant $DL\ (u) = D\Omega\ (a)$, & conséquemment $H\Pi = HS$, réduit cette intégrale à $0 = HS + q$, d'où résulte $q = - HS$. Donc $t\ (AT) = H\Pi - HS = S\Pi$ est cette intégrale juste & précise: de sorte que S sera l'origine des arcs $S\Pi$ qui pris depuis ce point fixe S vers D, exprimeront les tems écoulés $AT\ (t)$, à la fin desquels se trouvent les vitesses actuelles ou restantes $DL\ (u)$; ce qui rend ici l'arc HS entierement inutile.

V. Donc si après avoir pris $AT = S\Pi$, & mené $A\Pi$ jusqu'à la rencontre de $D\Omega$ en L, on fait TU parallele à DH, & LU parallele à DC; le point U où elles se rencontreront, sera un de ceux de la courbe cherchée HUC des vitesses restantes (u); & ainsi de tous ses autres points à l'infini. *Ce qu'il falloit premierement trouver.*

VI. Cette courbe HUC des vitesses restantes (u) étant ainsi décrite, il n'y a plus qu'à prendre par tout $UR = TV$ sur UT prolongée jusqu'à FC parallelement à HF; & la courbe ARC qui passera par tous les points R ainsi trouvés, sera (*Solut. de la Prop. gener. des Mem. de* 1707. *pag.* 387.) la courbe des résistances totales (r), ou des vitesses perduës. *Ce qu'il falloit encore ici trouver.*

COROLLAIRE I.

Puiſque la conſtruction précedente (*Solut. art.* 5.) donne les viteſſes reſtantes $TU = DL$, & les tems écoulés $AT = S\Pi$; que DL diminuë à meſure que $S\Pi$ augmente, en ſorte que $DL = 0$ lorſque $S\Pi = SD$; il eſt manifeſte que l'on aura ici $TU = 0$ lorſque $AT = SD$; & qu'ainſi en prenant $AM = SD$, le point M ſera celui où les viteſſes reſtantes TU (u) ſeront entierement éteintes dans le milieu réſiſtant ſuppoſé, & conſéquemment AM ſera le tems écoulé juſqu'à leur entiere extinction dans ce milieu, comme AC l'auroit été (*hyp.*) dans un milieu ſans réſiſtance.

COROLLAIRE II.

Donc toute la durée du mouvement permis par la réſiſtance ſuppoſée du milieu où il ſe fait, ſera ici à ce qu'il auroit duré dans un milieu ſans réſiſtance :: $AM . AC :: SD . AC$ (la conſtruction donnant $AC = AF = AH = AD$) :: $SD . AD$. C'eſt-à-dire, comme l'arc SD de 45. deg. eſt à ſon rayon, & conſéquemment comme le ſecteur circulaire SAD eſt au triangle rectiligne $DA\Omega$; ou comme le quart de cercle AHD eſt au quarré circonſcrit $AH\Omega D$, ou bien auſſi comme le cercle entier au quarré qui lui ſeroit circonſcrit, ainſi que M. Hughens l'a ſeulement avancé dans les pag. 173. & 174. de ſon *Diſcours de la Cauſe de la Peſanteur.*

COROLLAIRE III.

Donc auſſi MC, ou $AD - SD$, ſera ici la quantité du tems dont le mouvement retardé par la réſiſtance ſuppoſée, dure moins qu'il n'auroit fait dans un milieu ſans réſiſtance.

COROLLAIRE IV.

Puiſque (*hyp.*) AF eſt la viteſſe initiale qui retardée en raiſon des tems à écouler juſqu'à ſon entiere extinction dans un milieu ſans réſiſtance, ne s'y éteindroit tout-à-fait qu'à la fin du tems $AC = AF$; ſi l'on fait $T\beta$ parallele à CF, & qui rencontre AF en β, il eſt manifeſte que l'on

aura auſſi $A\beta = AT$ pour la viteſſe initiale qui ainſi retardée, ne s'y éteindroit qu'à la fin du tems AT dans ce milieu ſans réſiſtance. Par conſéquent cette ſeconde viteſſe initiale $A\beta$ ou AT ſera à la reſtante de la premiere AF à la fin du tems AT dans le milieu réſiſtant en raiſon des quarrés des viteſſes actuelles du mobile :: $AT . TU$ (la conſtruction donnant $AT = S\Pi$, & $TU = DL$) :: $S\Pi . DL$. C'eſt-à-dire, comme l'arc $S\Pi$ à la tangente de ſon complement à 45. deg. ou comme le ſecteur circulaire $SA\Pi$ eſt au triangle rectiligne DAL.

COROLLAIRE V.

De ce que (*Corol.* 1.) TU $(u) = 0$ en M, & qu'ainſi l'équation $dt = \frac{-aadu}{aa+uu}$ de la Courbe HUC s'y doit réduire à $dt = \frac{-aadu}{aa} = -du$; & il eſt manifeſte que cette Courbe doit rencontrer ſon axe AC en M, & ſous un angle de 45 deg. à une diſtance AM du point A, laquelle (*Corol.* 1.) ſoit égale à SD.

COROLLAIRE VI.

Pour en H, ſon équation $dt = \frac{-aadu}{aa+uu}$ aïant TU (u) $= AH$ (a); & par-là s'y réduiſant à $dt = \frac{-aadu}{aa+aa} = -\frac{1}{2}du$; cette Courbe HUC y doit rencontrer ſa premiere ordonnée AH ſous un angle dont le ſinus ſoit la moitié de celui de ſon complement.

COROLLAIRE VII.

De plus l'équation $dt = \frac{-aadu}{aa+uu}$ de cette Courbe HUC donnant par tout l'analogie $dt . -du :: aa . aa+uu$. Dont le dernier terme $aa+uu$ diminuë toûjours (*Corol.* 1.) depuis A juſqu'en M; ſi l'on fait dt conſtante, on verra que les du diminuent auſſi toûjours juſque-là: & qu'ainſi cette même Courbe HUC doit tourner ſa convexité vers ſon axe AC depuis H juſqu'en M.

COROLLAIRE VIII.

La conſtruction précédente (*Solut.*) donnant par tout

$TU = RV$, le cas (*Corol.* 1.) de $TU = 0$ en M, rendra aussi $RV = 0$ au point N où FC est rencontrée par MN parallele à AF; ainsi la Courbe ARC des résistances totales ou des vitesses perduës passera par ce point N.

COROLLAIRE IX.

L'art. 2. de la Solut. qui a donné $\frac{dt}{a} = \frac{adr}{\overline{a-t-r}^2}$ pour l'équation de cette Courbe ARC, ayant pareillement donné $\frac{uu}{a} = z = \frac{\overline{a-t-r}^2}{a}$, donne conséquemment aussi $\frac{dt}{a} = \frac{adr}{uu}$, ou $\frac{dt}{dr} = \frac{aa}{uu} = \frac{AH \times AH}{TU \times TU}$. Ce qui fait voir,

1°. Que les ordonnées TR (r) de cette Courbe ARC seront par tout aux soûtangentes correspondantes :: $TU \times TU . AH \times AH$. C'est-à-dire, comme les quarrés de vitesses restantes correspondantes TU seront au quarré de la premiere ou de la plus grande de toutes. De sorte que

2°. TU en AH lui devenant égale, cette Courbe ARC doit diviser l'angle CAF en deux également.

3°. TU en M devenant (*Corol.* 1.) $= 0$, & y rendant par-là $\frac{dt}{dr} \left(\frac{AH \times AH}{TU \times TU}\right) = \frac{AH \times AH}{0}$, c'est à-dire, dt infinie par raport à dr; la tangente en N de cette Courbe ARC doit être parallele à son axe AC.

COROLLAIRE X.

Pour ce qui est des espaces ici parcourus pendant les tems AT (t) nonobstant les résistances supposées, soit par le point D une Logarithmique FDH d'une soûtangente $= AD = a = 1$, & dont l'asymptote soit FH de laquelle elle s'écarte du côté de H. Soient SQ, ΠP, πp, prolongées jusqu'à cette Logarithmique en X, Λ, λ, desquels points soient XZ, ΛG, $\lambda\omega$, perpendiculaires en Z, G, Υ, ω, sur AF, QX, $P\Lambda$.

Cela fait, la Logarithmique FDH donnera $G\Lambda$ ou AP $\left(\frac{aa}{\sqrt{aa+uu}}\right)$. à sa soûtangente ($a$) :: $\lambda\omega$ ou Pp $\left(\frac{-aaudu}{\overline{aa+uu} \times \sqrt{aa+uu}}\right)$. $\omega\Lambda = \frac{-audu}{aa+uu}$. Donc (en intégrant) $\int \frac{-audu}{aa+uu} = -P\Lambda + q$.

Or la précedente Solution (outre ces valeurs de AP, Pp) donne $dt = \frac{-aadu}{aa+uu}$, & conféquemment auffi $udt = \frac{-aaudu}{aa+uu}$, ou $\int udt$ ($ATUH$) $= a \times \int \frac{-audu}{aa+uu}$. Donc $ATUH = -a \times P\Lambda + q$. Mais le cas de TU en AH, rendant $ATUH = 0$, AL en $A\Omega$, $\Pi\Lambda$ en SX, & conféquemment auffi $P\Lambda$ en QX; cette intégrale s'y réduit à $0 = -a \times QX + q$, d'où réfulte $q = a \times QX$. Donc cette intégrale précife fera $ATUH = a \times QX - a \times P\Lambda = a \times TX = AD \times TX$. Mais fuivant le Lem. 2. pag. 196. de 1709. les efpaces ici parcourus pendant les tems AT (t) doivent être entr'eux comme les aires correfpondantes $ATUH$. Donc ces efpaces font pareillement ici entr'eux comme les produits $AD \times TX$ correfpondans, c'eft-à-dire (à caufe de AD conftante) comme les fimples XT correfpondantes defquelles X eft l'origine fixe; & au parcouru pendant tout le tems AM, c'eft-à-dire (*Corol.* 1.) jufqu'à l'entiere extinction des viteffes dans le milieu réfiftant fuppofé, comme les produits correfpondans $AD \times XT$ au produit $AD \times XQ$ valeur de l'aire totale $AMUH$, ou fimplement comme les XT, correfpondantes font XQ, ou bien auffi comme les ZG correfpondantes font à la conftante ZA.

COROLLAIRE XI.

Ce raport des efpaces ici parcourus nonobftant les réfiftances fuppofées, trouvé (*Corol.* 10) par le moïen de l'arc DXF de la Logarithmique HDF, peut encore fe trouver par le moïen de fon autre arc $D\psi H$, & d'une hyperbole équilatere $D\varphi H$ dont le centre foit A, & le demi-axe tranfverfe AD (a).

Pour le voir foient prolongées $H\Omega$, UL, jufqu'à cette hyperbole en φ, μ, d'où foient menées $\varphi\theta$, $\mu\gamma$, paralleles à HA, & qui rencontrent fon axe $AD\theta$ en θ, γ, & la Logarithmique en ψ, v, defquels points foient auffi ψB, $v\delta$, paralleles à cet axe, & qui rencontrent AH en B, δ. Soit enfin ε le point où $U\mu$ rencontre AH, à laquelle foit auffi gm parallele menée de l'extrémité m de l'élement vm

de la Logarithmique, & qui rencontre $v\delta$ en g.

Cela fait, l'hyperbole $D\varphi H$ donnant $\sqrt{aa+uu}=\varepsilon\mu=\delta v$, & conséquemment $vg=\frac{udu}{\sqrt{aa+uu}}$, la Logarithmique FDH donnera $\delta v\,(\sqrt{aa+uu})$. à sa soûtangente $(a)::vg\left(\frac{udu}{\sqrt{aa+uu}}\right).\,mg=\frac{audu}{aa+uu}$. Or l'art. 2. de la préced. Solut. donnant $dt=\frac{-aadu}{aa+uu}$, donne aussi $udt=\frac{-aaudu}{aa+uu}=-a\times\frac{audu}{aa+uu}$. Donc $udt=-a\times mg$. Par conséquent en prenant encore $AD\,(a)$ pour l'unité, l'intégrale en sera $\int udt\,(ATUH)=-a\times A\delta+q$. Mais le cas de TU en AH, qui rend encore $ATUH=0$, & AL en $A\Omega$, rendant de plus $\varepsilon\mu$ en $H\varphi$, δv en $B\psi$, & conséquemment $A\delta=AB$; réduit cette intégrale à $0=-a\times AB+q$, d'où résulte $q=a\times AB$. Donc cette intégrale complette sera $ATUH=a\times AB-a\times A\delta=a\times B\delta=AD\times B\delta$. Donc (*Lem.* 2. *pag.* 196. de 1709.) les espaces parcourus pendant les tems $AT\,(t)$ seront ici entr'eux comme les produits $AD\times B\delta$ correspondans, ou comme les simples $B\delta$ correspondantes, desquelles B est l'origine fixe; & au parcouru pendant tout le tems AM, c'est-à-dire (*Corol.* 1.) jusqu'à l'entiere extinction des vitesses dans le milieu résistant supposé, comme ces produits $AD\times B\delta$ au produit $AD\times BA$ valeur de l'aire totale $AMUH$, ou comme les simples $B\delta$ correspondantes sont à la constante BA.

COROLLAIRE XII.

Il suit de ces deux Corol. 10. & 11. que l'on aura ici $ZG=B\delta$, & $ZA=BA$: puisque $AD\times XY$ (*Corol.* 10.) $=ATUH$ (*Corol.* 11.) $=AD\times B\delta$, & $AD\times XQ$ (*Corol.* 10.) $=AMUH$ (*Corol.* 11.) $=AD\times BA$, donnent $B\delta=XY=ZG$, & $BA=XQ=ZA$. Donc la Logarithmique HDF doit donner ici $B\psi.\,AD::AD.\,ZX$. Et $B\psi.\,\delta v::GA.\,ZX$.

COROLLAIRE XIII.

Pour comparer présentement l'espace parcouru pen-

dant chaque tems AT en vertu des viteſſes TU reſtantes des primitives TV malgré les réſiſtances ſuppoſées, avec ce que le mobile en auroit parcouru pendant le même tems dans un milieu ſans réſiſtance ni action en vertu des viteſſes entieres primitives TV décroiſſantes (*hyp.*) en raiſon des tems qui reſteroient à écouler juſqu'à leur entiere extinction dans ce milieu; le Lem. 2. pag. 196. de 1709. fait voir

1°. Que le premier de ces eſpaces parcouru pendant le tems AT malgré les réſiſtances ſuppoſées, ſeroit ici au ſecond parcouru pendant le même tems dans un milieu ſans réſiſtance :: $ATUH$. $ATVF$ (*Corol.* 10.) :: $AD \times TX$. $\frac{AF + TV}{2} \times AT$.

2°. Qu'en ſuppoſant T en M, ou $AT = AM$ de part & d'autre, l'eſpace parcouru dans le milieu réſiſtant pendant tout le tems AM, c'eſt-à-dire (*Corol.* 1.) juſqu'à l'entiere conſtruction des viteſſes TU par les réſiſtances ſuppoſées de ce milieu, ſera à ce que le mobile en auroit parcouru pendant ce même tems dans un milieu ſans réſiſtance :: $AMUH$. $AMNF$ (*Corol.* 10.) :: $AD \times XQ$. $\frac{AF + MN}{2} \times AM$.

3°. Et que le premier de ces eſpaces parcouru pendant tout le tems AM juſqu'à l'entiere extinction des viteſſes TU dans le milieu réſiſtant, doit pareillement être à ce que le mobile en auroit parcouru pendant tout le tems AC à la fin duquel les viteſſes TV ſeroient auſſi (*hyp.*) entierement éteintes dans le milieu ſans réſiſtance :: $AMUH$. ACF (*Corol.* 10.) :: $AD \times XQ$. $\frac{1}{2} AF \times AC$ (à cauſe de $AD = AC$) :: $2XQ$. AF :: $2AZ$. AF (*Corol.* 12.) :: BZ . AF.

COROLLAIRE XIV.

Le rapport des eſpaces ici parcourus pendant les tems $AT(t)$ trouvé dans les précedens Corol. 10. & 11. peut encore ſe trouver en continuant la diviſion du ſecond membre $\frac{-aaudu}{aa+uu}$ de l'équation $udt = \frac{-aaudu}{aa+uu}$ réſultante de

$dt = \frac{-aadu}{aa+uu}$ trouvée pour celle de la Courbe *HUC* dans l'art. 2. de la Solution précedente.

Car cette division continuée donnant $udt = -udu + \frac{u^3du}{aa} - \frac{u^5du}{a^4} + \frac{u^7du}{a^6} -$ &c. donnera aussi, en intégrant, $\int udt$ (*ATUH*) $= -\frac{uu}{2} + \frac{u^4}{4aa} - \frac{u^6}{6a^4} + \frac{u^8}{8a^6} -$ &c. $+ q$. Mais le cas de *ATUH* $= 0$, rendant *TU* (u) $=$ *AH* (a), réduit cette intégrale à $0 = -\frac{aa}{2} + \frac{aa}{4} - \frac{aa}{6} + \frac{aa}{8} -$ &c. $+ q$, d'où résulte $q = \frac{aa}{2} - \frac{aa}{4} + \frac{aa}{6} - \frac{aa}{8} +$ &c. Donc cette intégrale complette sera *ATUH* $= \frac{aa}{2} - \frac{aa}{4} + \frac{aa}{6} - \frac{aa}{8} +$ &c. $- \frac{uu}{2} + \frac{u^4}{4aa} - \frac{u^6}{6a^4} + \frac{u^8}{8a^6} -$ &c. $= \frac{aa}{2\times1} - \frac{aa}{2\times2} + \frac{aa}{2\times3} - \frac{aa}{2\times4} +$ &c. $- \frac{uu}{2\times1} + \frac{u^4}{2\times2aa} - \frac{u^6}{2\times3a^4} + \frac{u^8}{2\times4a^6} -$ &c. Donc (*Lem.* 2. *pag.* 196 de 1709.) les espaces parcourus pendant les tems *AT* (t) seront ici entr'eux comme ces valeurs des aires *ATVH* correspondantes, desquelles valeurs il est visible que les deux suites ou *series*, tant la constante que la variable, sont aisées à continuer à l'infini.

Il résulte aussi de ces valeurs que $2\times$*ATUH* $= \frac{aa}{1} - \frac{aa}{2} + \frac{aa}{3} - \frac{aa}{4} +$ &c. $- \frac{uu}{1} + \frac{u^4}{2aa} - \frac{u^6}{3a^4} + \frac{u^8}{4a^6} -$ &c.

COROLLAIRE XV.

FIG. II. Tout ce qu'on voit de la fig. 1. dans la fig. 2. y demeurant le même que là, soit *FI* parallele à *AD*, & rencontrée en φ par ΩD prolongée de ce côté-là. Entre les asymptotes orthogonales $\varphi\Omega$, φI, soit une hyperbole équilatere quelconque $I\Delta\Omega$ rencontrée en Δ, Ω, par *AD*, $H\Omega$, prolongées jusqu'à elle. Ensuite après avoir pris *DB* troisiéme proportionnelle à φD (a), *DL* (u), menez les ordonnées infiniment proches *BG*, *bg*, paralleles à $D\Delta$, & qui rencontrent l'hyperbole $I\Delta\Omega$ en *G*, *g*.

Cela fait, on aura $DB = \frac{uu}{a}$, d'où résultera $Bb =$

$=$

$=\frac{2udu}{a}$, & $\phi B = a + \frac{uu}{a} = \frac{aa+uu}{a}$: De ſorte qu'appellant $D\Delta$, c; l'on aura $\phi B\left(\frac{aa+uu}{a}\right)$. $\phi D\,(a) :: D\Delta\,(c), BG =$ $= \frac{aac}{aa+uu}$. Par conſéquent $BG \times Bb$ $(GBbg) = \frac{2acudu}{aa+uu} =$ $\frac{2c}{a} \times \frac{aaudu}{aa+uu}$ (l'art. 2. de la Solut. donnant $udt = \frac{-aaudu}{aa+uu}$) $= -$ $\frac{2c}{a} \times udt$, ou $udt = -\frac{a}{2c} \times GBbg$. Donc (en intégrant) $\int udt$ $(ATUH) = -\frac{a}{2c} \times \Delta DBG + q$. Mais le cas de $ATUH = 0$, rendant $TU = AH$, ou $DL = D\Omega$, c'eſt-à-dire $u = a$, & conſéquemment $DB\left(\frac{uu}{a}\right) = \frac{aa}{a} = a = D\Omega$, rend auſſi $\Delta DBG = \Delta D\Omega\Omega$; ce qui réduit cette intégrale à $c = -\frac{a}{2c}$ $\times \Delta D\Omega\Omega + q$, d'où réſulte $q = \frac{a}{2c} \times \Delta D\Omega\Omega$. Donc cette intégrale complette eſt $ATUH = \frac{a}{2c} \times \Delta D\Omega\Omega - \frac{a}{2c}$ $\times \Delta DBG = \frac{a}{2c} \times \Omega\Omega BG$; d'où réſulte auſſi $AMUH = \frac{a}{2c}$ $\times \Omega\Omega D\Delta$. Par conſéquent les eſpaces ici parcourus pendant les tems écoulés AT ou (*Solut. art.* 4.) $S\Pi$ malgré les réſiſtances ſuppoſées, doivent être entr'eux comme les produits $\frac{a}{2c} \times \Omega\Omega BG$ correſpondans ou ſimplement (à cauſe de la fraction $\frac{a}{2c}$ conſtante) comme les aires hyperboliques aſymptotiques $\Omega\Omega BG$ correſpondantes; & à l'eſpace entier parcouru malgré ces réſiſtances pendant tout le tems AM, ou (*Corol.* 1.) juſqu'à l'entiere extinction des viteſſes TU ou DL par ces mêmes réſiſtances $:: \frac{a}{2c} \times \Omega\Omega BG.$ $\frac{a}{2c} \times \Omega\Omega D\Delta :: \Omega\Omega BG . \Omega\Omega D\Delta$.

COROLLAIRE XVI.

Donc auſſi les eſpaces ici à parcourir pendant les tems TM ou (*Solut. art.* 4.) ΠD qui reſtent à écouler juſqu'à cette entiere extinction de viteſſes dans le milieu réſiſtant ſuppoſé, ſeront pareillement entr'eux comme les aires hyperboliques ΔDBG correſpondantes, ainſi que M. Newton

l'a marqué dans la pag. 255. de ses Princ. Math. où il ne fait mention que de ces dernieres aires hyperboliques & de ces derniers espaces, dont l'origine est à l'extinction & non au commencement des vitesses, sans en avertir; ce qui soit dit pour l'intelligence de cet Auteur.

COROLLAIRE XVII.

Puisque (*Corol.* 15.) $udt = -\frac{a}{2c} \times GBbg$, & conséquemment $u = -\frac{a}{2c} \times \frac{GBbg}{dt}$ (l'art. 4. de la Solut. donnant $dt = \Pi\pi$) $= -\frac{a}{2c} \times \frac{GBbg}{\Pi\pi}$; les vitesses restantes TU (u) à la fin des tems écoulés AT ou (*Solut. art.* 4.) $S\Pi$ malgré les résistances supposées, doivent être par tout ici entr'elles comme les fractions $\frac{a}{2c} \times \frac{GBbg}{\Pi\pi}$, ou $\frac{GBbg}{\Pi\pi}$ correspondantes.

COROLLAIRE XVIII.

Puisque (*Corol.* 15.) $Bb = \frac{2udu}{a}$, $GBbg = -\frac{2c}{a} \times udt$; & que l'hyperbole $I\Delta\Omega$ donnant $\varphi B \times BG = \varphi D \times D\Delta = ac$, donne aussi $BG = \frac{ac}{\varphi B}$; l'on aura ici $-\frac{2cudt}{a} = GBbg =$ $= BG \times Bb = \frac{ac}{\varphi B} \times \frac{2udu}{a} = \frac{2cudu}{\varphi B}$, & conséquemment $-\frac{dt}{a} =$ $= \frac{du}{\varphi B} = \frac{Ll}{\varphi B}$ en menant le rayon $A\pi$ jusqu'à la rencontre de $D\Omega$ en l; d'où résulte $dt = a \times \frac{Ll}{\varphi B}$, c'est-à-dire, les instans dt, ou (*Solut. art.* 4.) $\Pi\pi$ en raison des fractions $a \times \frac{Ll}{\varphi B}$ ou simplement $\frac{Ll}{\varphi B}$ correspondantes, ainsi que M. Newton l'a aussi marqué dans la pag. 256. de ses Princ. Math.

COROLLAIRE XIX.

Si présentement on suppose que l'axe transverse jusqu'ici arbitraire de l'hyperbole $I\Delta\Omega$, soit $= \varphi D \times \sqrt{2}$, ensorte qu'elle ait ici $D\Delta = \frac{1}{4}\varphi D$, ou $c = \frac{1}{4}a$; il suit du Corol. 15. qu'un corps de pesanteur constante étant jetté directement de bas en haut d'une vitesse AF ou AH dans un milieu résistant en raison des quarrés des vitesses

actuelles ou reftantes de ce corps, l'efpace qu'il y parcouroit pendant le tems AT ou (*Solut. art.* 4.) $S\Pi$, feroit à ce que cette viteffe AF ou AH lui en feroit parcourir pendant un pareil tems fi elle demeuroit uniforme : : $\Omega\Omega BG$. $SA\Pi$.

Car (*Lem.* 2. *pag.* 196. de 1709.) le premier de ces deux efpaces feroit au fecond : : $ATVH$. $AT \times AF$. Mais le Corol. 15. donne $ATVH = \frac{a}{2c} \times \Omega\Omega BG$ (à caufe de $c = \frac{1}{4} a$) $= 2 \times \Omega\Omega BG$. Donc le premier de ces deux efpaces feroit au fecond : : $2 \times \Omega\Omega BG$. $AT \times AF$ (la Solution donnant $AT = S\Pi$, & $AF = AH = AS$) : : $2 \times \Omega\Omega BG$. $S\Pi \times AS$: : $\Omega\Omega BG$. $\frac{1}{2} S\Pi \times AS$: : $\Omega\Omega BG$. $SA\Pi$. C'eft-à-dire comme l'efpace hyperbolique afymptotique $\Omega\Omega BG$ eft au fecteur circulaire $SA\Pi$, ainfi que M. Newton l'a trouvé dans la pag. 259. de fes Princ. Math.

COROLLAIRE XX.

On voit de-là que l'efpace parcouru pendant tout le tems AM, c'eft-à-dire (*Corol.* 1.) jufqu'à l'entiere extinction des viteffes du corps jetté de la premiere AF ou AH directement de bas en haut dans le milieu fuppofé réfiftant en raifon des quarrés des viteffes actuelles de ce corps, feroit à ce que ce même corps en parcouroit pendant le même tems AM, fi le mouvement de cette premiere viteffe AF ou AH en demeuroit uniforme : : $\Omega\Omega D\Delta$. SAD. Et conféquemment auffi que l'efpace parcouru de bas en haut avec les viteffes retardées pendant le tems TM ou (*Solut. art.* 4.) ΠD à écouler jufqu'à leur entiere extinction, feroit à ce que l'uniforme en feroit parcourir au mobile pendant ce même tems TM ou ΠD : : $GBD\Delta$. ΠAD.

COROLLAIRE XXI.

En fuppofant encore $D\Delta = \frac{1}{4} \varphi D$, fi par le point Δ, on fait $X\omega$ parallele à $\Omega\varphi$, & qui rencontre $\Omega\Omega$, φI, en X, ω; on trouvera que des deux efpaces parcourus l'un & l'autre jufqu'à extinction de viteffes par un même corps de pefanteur conftante fucceffivement jetté d'une même viteffe AH

ou AF de bas en haut ſuivant des verticales ou des plans également inclinés à l'horizon dans deux milieux dont un lui réſiſte en raiſon des quarrés de ſes viteſſes actuelles, & l'autre point du tout ; le parcouru dans le milieu réſiſtant ſeroit au parcouru dans le milieu ſans réſiſtance :: $\Omega\Omega D\Delta . \omega\varphi D\Delta$.

Car puiſque (*hyp.*) le ſecond de ces deux eſpaces doit être parcouru en vertu des viteſſes primitives TV juſqu'à leur entiere extinction en C dans le milieu ſans réſiſtance, & le premier en vertu des viteſſes TV reſtantes de celles-là dans le milieu réſiſtant juſqu'à leur entiere extinction (*Corol.* 1.) en M ; celui-ci ſera à l'autre (*Lem.* 2. *pag.* 196. *de* 1709.) :: $AMVH . ACF :: AMVH . \frac{AC \times AF}{2}$ (*Corol.* 15.) :: $\frac{a}{2} \times \Omega\Omega D\Delta . \frac{AC \times AF}{2}$ (*Solut. art.* 1. & *Corol.* 15.) :: $\frac{AC}{2D\Delta} \times \Omega\Omega D\Delta . \frac{AC \times AF}{2} :: \Omega\Omega D\Delta . AF \times D\Delta ::$ $\Omega\Omega D\Delta . D\varphi \times D\Delta :: \Omega\Omega D\Delta . \omega\varphi D\Delta$. C'eſt-à-dire que la hauteur du premier des deux jets ſuppoſés, fait de bas en haut dans le milieu réſiſtant juſqu'à extinction de viteſſes, ſera ici à la hauteur du ſecond fait auſſi de bas en haut juſqu'à extinction de viteſſes dans le milieu ſans réſiſtance, comme l'aire hyperbolique aſymptotique $\Omega\Omega D\Delta$ eſt au rectangle correſpondant $\omega\varphi D\Delta$. De ſorte que $D\Omega = D\varphi$ rendant $X\Omega D\Delta = \omega\varphi D\Delta$, chacune de ces deux hauteurs ſera à leur difference ou à l'excès dont la ſeconde ſurpaſſera la premiere, comme chacune des aires $\Omega\Omega D\Delta$, $\omega\varphi D\Delta$ eſt à l'hyperbolique ΩDX.

COROLLAIRE XXII.

Mais on ſçait que ſi les ordonnées hyperboliques aſymptotiques $D\Delta$, bg, BG, &c. ou leurs abſciſſes φD, φb, φB, &c. ſont en progreſſion géometrique quelconque, les aires hyperboliques $Dbg\Delta$, $bBGg$, &c. compriſes alors entre des ordonnées proportionelles, ſont égales entr'elles ; & conſéquemment que toutes les aires compriſes entre l'hyperbole $I\Delta\Omega$, ſon aſymptote $\varphi\Omega$, & deux de ſes ordonnées quelconques paralleles à ſon autre aſymptote φI, leſquelles ſoient entr'elles :: $D\Delta . \Omega\Omega :: \varphi\Omega . \varphi D :: 2 . 1$,

sont chacune égale à $\Omega\Omega D\Delta$. Donc (*Corol.* 21.) la hauteur du premier des deux jets précedens, fait de la vitesse AH ou AF directement de bas en haut dans le milieu résistant en raison des quarrés des vitesses actuelles du corps jetté, sera à la hauteur du second fait aussi de la même vitesse AH ou AF directement de bas en haut suivant la même ligne que l'autre; comme chacune de ces aires hyperboliques asymptotiques comprises entre l'hyperbole $I\Delta\Omega$, son asymptote $\varphi\Omega$, & deux de ses ordonnées paralleles à φI, lesquelles soient entr'elles :: 2. 1. sera au rectangle $\omega\varphi D\Delta$ de la même hyperbole, ainsi que M. Hughens l'a dit dans la page 174. de son *Discours de la Cause de la pesanteur.*

C'est-là une des Propositiens que M. Hughens s'est contenté d'avancer sans démonstration dans les pag. 170. 171. 172. 173. 174. 175. *&* 176. *de son* Discours de la Cause de la Pesanteur, *touchant les mouvemens faits dans des milieux résistans, & la derniere qui nous restât à démontrer, toutes les autres l'étant dans les Mem. de* 1707. *pag.* 393. *&* 399. *dans ceux de* 1708. *pag.* 123. 143. 212. 306. *&c. & ci-dessus dans le Corol.* 2.

COROLLAIRE XXIII.

Le raport des espaces trouvés ci-dessus depuis le Corol. 10. jusqu'ici, peut encore se trouver par le moyen d'une hyperbole équilatere ΩYO décrite du centre A par l'angle Ω du quarré DH entre les asymptotes AD, AH, prolongées vers Δ, O: si l'on prolonge les ordonnées QS, $P\Pi$, $p\pi$, jusqu'à la rencontre de cette hyperbole en Y, Z, z; les espaces parcourus pendant les tems AT ou (*Solut. art.* 4.) $S\Pi$, en vertu des vitesses TU restantes des primitives TV, se trouveront être ici entr'eux en raison des aires hyperboliques asymptotiques $YQPZ$ correspondantes, dont QY sera l'origine, & $D\Omega$ le terme.

Car cette hyperbole ΩYO donnera $PZ = \frac{AD \times D\Omega}{AP} = \frac{aa}{AP}$ (l'art. 4. de la Solut. donnant $AP = \frac{aa}{\sqrt{aa+uu}}$) $= \sqrt{aa+uu} = AL$. De plus cet art. 4. de la Solut. donne aussi $Pp =$

$= \frac{-aadu}{aa+uu \times \sqrt{aa+uu}}$. Donc $PZ \times Pp$ ($ZPpz$) $= \frac{-aadu}{aa+uu}$ (*Corol.* 10.) $= udt$. Par conséquent $\int udt$ ($ATUH$) $= \int PZ \times Pp = OAPZO + q$. Mais le cas de $ATUH = 0$, qui rend TU en AH, AL en $A\Omega$, & PZ en QY, rendant aussi $OAPZO = OAQYO$; réduit cette intégrale à $0 = OAQYO + q$, d'où résulte $q = -OAQYO$. Donc cette intégrale précise est $ATUH = OAPZO - OAQYO = YQPZ$. Donc aussi (*Lem.* 2. *pag.* 196. *de* 1709.) les espaces parcourus pendant les tems AT ou (*Solut. art.* 4.) $S\Pi$, seront ici entr'eux comme les aires hyperboliques asymptotiques $YQPZ$ correspondantes desquelles QY est l'origine; & à l'espace entier parcouru pendant tous les tems AM, c'est-à-dire (*Corol.* 1.) jusqu'à l'entiere extinction des vitesses TU par les résistances supposées, comme ces aires hyperboliques $YQPZ$ sont à l'aire entiere $YQD\Omega$ comprise entre les ordonnées fixes & constantes QY, $D\Omega$: De sorte que le reste de l'aire infinie comprise entre l'hyperbole ΩYO & ses asymptotes $A\Delta$, AO, est ici inutile.

COROLLAIRE XXIV.

Puisque (*Solut. art.* 1. 2.) les résistances instantanées (dr) du milieu à la fin des tems AT, sont ici exprimées par $z = \frac{uu}{a}$, de même que les vitesses restantes alors TU ou DL par u & que (*Corol.* 15.) $DB = \frac{uu}{a} = z$; il est manifeste que ces résistances instantanées doivent être ici exprimées par DB, comme les vitesses restantes malgré ces résistances & malgré la pesanteur du mobile, y sont exprimées par TV ou DL. Ainsi non-seulement les DL seront ici entr'elles comme ces vitesses restantes (u) à la fin du tems AT ou (*Solut. art.* 4.) $S\Pi$; mais encore les DB y seront pareillement entr'elles comme les résistances instantanées (dr) que le milieu supposé fait à ces vitesses; & de maniere que les DL ou TV ($TV - RV$) étant prises ici (*hyp.*) pour ces vitesses restantes des primitives TV, les DB correspondantes doivent aussi être prises pour les résistances instantanées du milieu supposé.

COROLLAIRE XXV.

Les trois équations $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a}$, $z = \frac{uu}{a}$, & $v = a - t$, ou $dv = -dt$, de l'art. 2. de la Solut. donnant $\frac{adr}{uu} = \frac{dt}{a} = \frac{-dv}{a}$, l'on aura ici $dr. -dv :: \frac{uu}{a} . a$ (*Corol.* 15.) :: $DB . D\varphi$. C'eſt-à-dire ſuivant la remarq. 1. de la pag. 126. des Mem. de 1708. que les réſiſtances inſtantanées faites à la fin des tems AT par le milieu ſuppoſé, ſeront par tout ici chacune à la peſanteur conſtante du mobile, ou à ce que cette peſanteur fait auſſi de réſiſtance au mouvement de ce corps jetté (*hyp.*) directement de bas en haut :: $DB . D\varphi$. Donc en prenant (*Corol.* 24.) DB pour chacune des réſiſtances inſtantanées du milieu ſuppoſé, l'on aura auſſi $D\varphi$ pour celle de la peſanteur du mobile à chaque inſtant. Par conſéquent φB ſera tout ce que cette peſanteur & le milieu font enſemble de réſiſtance à chaque inſtant au mouvement ſuppoſé de bas en haut. Or en imaginant l'aire hyperbolique $\Omega\Omega BG$ diviſées en parties égales quelconques par des lignes GB paralleles à ΔD, c'eſt-à-dire (*Corol.* 15.) les eſpaces ici parcourus de bas en haut pendant les tems AT, diviſés en parties égales quelconques; on ſçait que les φB correſpondantes ſeront en progreſſion geometrique. Donc les réſiſtances entieres inſtantanées réſultantes tout à la fois du milieu ſuppoſé & de la peſanteur du corps mû de bas en haut, au commencement ou à la fin de ces parties égales d'eſpace parcouru, c'eſt à dire, les réſiſtances entieres faites de chaque inſtantanée correſpondante du milieu réſiſtant, ajoûtée à la peſanteur conſtante de ce corps, ſeroient auſſi entr'elles en progreſſion géometrique.

COROLLAIRE XXVI.

De ce que (*Corol.* 24. & 25.) $D\varphi$ ou $D\Omega$, DL, DB, expriment ici la peſanteur du mobile, ſes viteſſes reſtantes à la fin des tems AT, & les réſiſtances inſtantanées que lui fait le milieu à la fin de ces tems; ces trois choſes ſeront ici

entr'elles comme ces trois grandeurs correſpondantes $D\Omega$, DL, DB, dont la ſeconde (*Corol.* 15.) eſt moyenne proportionnelle entre les deux autres.

COROLLAIRE XXVII.

Pour comparer préſentement les eſpaces parcourus pendant des tems quelconques AT dans le milieu réſiſtant juſqu'ici ſuppoſé, en vertu des viteſſes TV reſtantes (*Solut.*) des primitives TV qui dans un milieu ſans réſiſtance ſeroient ſeulement retardées (*hyp.*) en raiſon des tems TC à écouler juſqu'à leur entiere extinction dans ce milieu; pour comparer, dis-je, ces eſpaces avec les parcourus pendant le même tems AT dans le milieu réſiſtant en vertu des viteſſes pareillement reſtantes de primitivement accelerées en raiſon des tems écoulés AT: par exemple, pour comparer les hauteurs d'aſcenſions verticales avec les hauteurs des chutes verticales d'un corps de peſanteur conſtante dans un milieu réſiſtant en raiſon des quarrés des viteſſes actuelles de ce corps; tout ce qu'on voit de la fig. 1. dans la fig. 3. y demeurant le même que là, ſoit par D l'arc Logarithmique ςDH le même que $\mathcal{I}DF$ dans une poſition renverſée de la ſienne, ayant auſſi-bien que lui HF pour aſymptote de laquelle il s'approche du côté de H comme il fait dans l'autre poſition du côté de F, & ſa ſoutangente $= AD$ $(a) = 1$. Soit de plus par l'extremité H de la droite AH ſur l'aſymptote DC une autre Logarithmique HBC d'une ſoutangente $= \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}AD\left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{2}$, laquelle s'écarte de ſon aſymptote AC du côté de C, & ſoit rencontrée en B par TV prolongée, laquelle rencontre auſſi en β la droite ΩH prolongée vers C. Enſuite après avoir pris $TW = \frac{AH \times B\beta}{AH + BT}$ ſur toutes les TV prolongées juſqu'à cette Logarithmique HBC, ſoit imaginée une Courbe AWC qui paſſe par tous les points W ainſi trouvés, & qui ſoit rencontrée en O par MO parallele à AH. De ſes points W, O, ſoient menées $W\delta$, $O\omega$, paralleles à CD,

FIG. III.

&

& qui rencontrent le quart de cercle *HSD* en δ, ω, desquels points soient $\delta\mu$, $\omega\nu$, paralleles à *HF*, & qui rencontrent l'arc Logarithmique φDH, en μ, ν, desquels points soient aussi menées les droites $\mu\pi$, $\nu\theta$, paralleles à *DA*, & qui rencontrent *HF* en π, θ. Soit enfin le quarré *ACCF* avec sa diagonale *AC* qui rencontre *TV* en *u*.

Cela fait, concevons (dis-je) présentement un corps de pesanteur constante, duquel par conséquent dans un milieu sans résistance ni action, tel qu'on suppose d'ordinaire le vuide, les vitesses primitives *Tu* en descendant augmentent en raison des tems écoulés *AT*; & les vitesses primitives *TV* en remontant en vertu d'une vitesse initiale $AF = AH$, diminuent au contraire en raison des tems *TC* à écouler jusqu'à leur entiere extinction en *C* dans ce vuide ou espace sans résistance ni action : le tout ainsi qu'on le pense d'ordinaire avec Galilée. Concevons de plus que ces mouvemens, qui primitivement & sans résistance ni action de la part du milieu, seroient tels (*hyp.*) qu'on les vient de dire, se fassent l'un & l'autre dans un milieu qui leur résiste effectivement, & en raison des quarrés de leurs vitesses actuelles ou restantes des primitives supposées.

Cela supposé, l'on aura ici non-seulement (*Corol.* 10.) $ATUH = a \times TX = a \times ZG$; mais encore (*pag.* 201. *de* 1709. *Corol.* 6. *art.* 5.) $ATW = a \times A\pi$. Mais *TU* exprimant ici (*Solut.*) les vitesses d'ascension à la fin des tems *AT* dans le milieu résistant supposé, & *TW* (*pag.* 198. *de* 1709. *Sol. art.* 4.) celles des chutes dans ce milieu à la fin des mêmes tems; le Lem. 2. pag. 196. de 1709. fait voir que l'espace parcouru pendant le tems *AT* en montant dans ce milieu en vertu de la projection verticale faite de bas en haut de la vitesse initiale *AH*, doit être ici au parcouru pendanr le même tems & dans le même milieu en y retombant suivant la même ligne :: $ATUH \,.\, ATW :: a \times ZG \,.\, a \times A\pi :: ZG \,.\, A\pi$.

Par conséquent en prenant $AT = AM$, c'est-à-dire *AM* pour la durée commune de ces deux mouvemens;

l'eſpace parcouru en vertu du mouvement acceleré de haut en bas pendant ce tems *AM* malgré les réſiſtances du milieu ſuppoſé, ſera au parcouru en même tems en vertu du mouvement retardé de bas en haut par ces réſiſtances & par la peſanteur du mobile, c'eſt-à-dire (*Corol.* 1.) juſqu'à l'entiere extinction de ce dernier mouvement :: *Aθ*. *AZ*. Puiſque le changement de *AT* en *AM*, change auſſi *Aπ* en *Aθ*, & *ZG* en *ZA*.

COROLLAIRE XXVIII.

FIG. IV. Le raport des mêmes eſpaces d'aſcenſion & de chute verticales du même corps, faites dans le milieu ſuppoſé réſiſtant en raiſon des quarrés des viteſſes actuelles de ce corps: la premiere en vertu d'une viteſſe *AH* de projection verticale de bas en haut, & la ſeconde en vertu de la peſanteur conſtante du mobile; ſe trouvera encore par le moïen de la Fig. 4 en ſuppoſant tout ce qu'on y voit de la Fig. 3. y être le même que dans cette Fig. 3. excepté que *DXF*, qui étoit là une Logarithmique, doit être ici une hyperbole équilatere entre les aſymptotes *HF*, *HΩ*; lequel arc hyperbolique ſoit auſſi en *ΩΥO* entre les aſymptotes *AO*, *AD*. Soient encore par les points *ω*, *δ*, *S*, Π, du quart de cercle *HSD* les droites *φX*, ΔΛ, *QΥ*, *PZ*, paralleles à *OF*. dont les deux premieres *φX*, ΔΛ, rencontrent l'arc hyperbolique *DXF* en *X*, Λ, & la droite *HΩ* en *φ*, Δ; les deux dernieres *QΥ*, *PZ*, rencontrant l'arc hyperbolique *ΩΥO* en *Υ*, *Z*, & la droite *AD* en *Q*, *P*.

Cela fait, le Corol. 23. donnera *ATUH* = *ΥQPZ*; le Corol. 7. pag. 203. de 1709. *ATW* = *DΩ*ΔΛ; & ſuivant le Lem. 2. pag. 196. de 17 9. la hauteur d'aſcenſion parcouruë pendant le tems *AT* malgré la réſiſtance du milieu & la peſanteur du mobile en vertu des viteſſes retardées ou reſtantes *TU* de la premiere *AH* de projection de bas en haut, ſera à la hauteur de chute parcouruë pendant le même tems *AT* en vertu des viteſſes *TW* accelerées depuis zero par la peſanteur de ce mobile malgré la réſiſtance du même milieu :: *ATUH*. *ATW* :: *ΥQPZ*. *DΩ*ΔΛ.

Par conféquent la hauteur totale du jet vertical de bas en haut, fait (*hyp.*) de la viteffe *AH* jufqu'à fon entiere extinction (*Corol.* 1.) en *M* à la fin du tems *AM* qu'a duré ce jet, doit être ici à la hauteur de la chute verticale du même corps parcouruë pendant le même tems *AM* en vertu de fa pefanteur dans le même milieu fuppofé réfiftant en raifon des quarrés des viteffes actuelles de ce corps : : $YQD\Omega$. $D\Omega\varphi X$. Puifque *AT* en fe changeant ici en *AM*, change auffi *PZ* en $D\Omega$, & $\Delta\Lambda$ en φX.

COROLLAIRE XXIX.

FIG. V.

Voici encore une troifiéme maniere de trouver le raport de ces efpaces d'afcenfion & de chute, faites de la maniere fuppofée dans un milieu réfiftant en raifon des quarrés des viteffes actuelles du mobile. Pour cela, ce qu'on voit dès les Fig. 3. 4. dans la Fig. 5. y demeurant le même que dans celles-là, excepté que la Courbe *AWC* des viteffes *TW* des chutes accelerées par la pefanteur du mobile malgré la réfiftance du milieu fuppofé, eft ici renverfée de gauche à droite de fon axe *AC* pour moins d'embarras de lignes dans cette Fig. 5. ayant *FC* parallele à *AC* pour fon afymptote au lieu de *HC* qu'elle avoit (*Corol.* 1. *pag.* 198. *de* 1709.) dans les Fig. 3. 4. Soit *CF* prolongée vers *I*, & ΩD prolongée jufqu'à fa rencontre en φ. Entre les afymptotes orthogonales $\varphi\Omega$, φI, foit (comme dans la Fig. 2. du Corol. 15.) une hyperbole équilatere quelconque $I\Delta\Omega$ rencontrée en Δ, Ω, par *AD*, $H\Omega$, prolongées jufqu'à elle. Enfuite après avoir mené des points correfpondans *U*, *W*, des Courbes *HUM*, *AWC*, parallelement à $C\varphi$, les droites *UL*, *WQ*, jufqu'à leur rencontre avec $\varphi\Omega$ en *L*, *Q*, foient prifes premierement *DB* troifiéme proportionnelle à φD, *DL*, comme dans le Corol. 15. & fecondement *DZ* troifiéme proportionnelle à φD, *DQ*, comme dans les Corol. 9. & 18. des pag. 205. & 217. de 1709. Soient enfin des points *B*, *Z*, les ordonnées *BG*, *ZY*, paralleles à φI, & qui rencontrent l'hyperbole $I\Delta\Omega$ en *G*, *Y*.

Cela fait, le Corol. 15. donnera $ATUH = \frac{a}{2c} \times \Omega\Omega BG$; les Corol. 9. 18. des pag. 205. 218. de 1709. donneront aussi $ATW = \frac{a}{2c} \times \Delta DZY$; & suivant le Lem. 2. pag. 196. de 1709. la hauteur d'ascension verticale parcouruë pendant le tems AT malgré la pesanteur du mobile & les résistances du milieu supposé, en vertu des vitesses retardées TU restantes de la premiere AH de projection verticale de bas en haut, sera à la hauteur de chute verticale parcouruë pendant le même tems AT en vertu des vitesses TW de chute accelerée depuis zero par la pesanteur constante du mobile malgré la résistance de ce même milieu : : $ATUH. ATW : \Omega\Omega BG. \Delta DZY.$

Par conséquent la hauteur totale du jet vertical de bas en haut, fait (*hyp.*) de la vitesse AH jusqu'à son entiére extinction (*Corol.* 1.) en M à la fin du tems AM que ce jet a duré, doit être ici à la hauteur de la chute verticale du même corps, faite pendant le même tems AM en vertu de la pesanteur constante de ce corps dans ce même milieu supposé résistant en raison des quarrés des vitesses de ce même corps : : $\Omega\Omega D\Delta . \Delta DX\psi$. en supposant DX troisiéme proportionnelle à φD, DE côté du rectangle $DMOE$, & $X\psi$ parallele à φI, puisque le changement qui se fait ici de AT en AM, ou de UW en MO, rendant (*Corol.* 1.) TU ou $DL = 0$, $DQ = DE$, rend pareillement $DB = 0$, $DZ = DX$; & conséquemment aussi $\Omega\Omega BG = \Omega\Omega D\Delta$, & $\Delta DZY = \Delta DX\psi$.

COROLLAIRE XXX.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans le précédent Corol. 29. si l'on ajoûte à la Fig. 5. une hyperbole équilatere DPI décrite du centre A, d'un axe transverse $= 2AD$, & que de ce centre A par les points E, Q, L, on méne les droites AE, AQ, AL, dont les deux premieres AE, AQ, prolongées rencontrent cette hyperbole en R, P, & la troisiéme AL le quart de cercle HSD en Π; cette Fig. 5. fournira tout à la fois les ex-

pressions des vitesses, tant retardées d'ascension restantes de l'initiale *AH* égale à la terminale (*Corol.* 23. *pag.* 198. 199. *de* 1709.) *AF* du mobile, qu'accelerées par la pesanteur de ce mobile, de part & d'autre malgré les résistances supposées ; les expressions des tems à la fin desquels ces vitesses se trouvent ; & des espaces parcourus en vertu d'elles pendant ces tems : les ordonnées *TU*, *TW*, exprimeront (*Solut. préced.* & *Solut. art.* 4. *pag.* 198. *de* 1709.) ces vitesses retardées d'ascension, & accelerées de chute dans le milieu résistant supposé ; les sectateurs circulaires *SAΠ*, & les hyperboliques *DAP* (*Sol. préced. art.* 4. & *Sol.* 2. *art.* 2. *pag.* 213. *de* 1709.) les tems *AT* à la fin desquels elles se trouvent ; les aires hyperboliques ΩΩ*BG*, Δ*DZY*, les espaces ou hauteurs verticales parcouruës (*Corol.* 15. *préced.* & *Corol*, 9. 18. *pag.* 205. 218. *de* 1709.) en vertu de ces vitesses pendant ces tems. Par conséquent l'ordonnée *MO* de la Courbe *AWC* exprimera la derniere des vitesses accelerées de chute faite pendant le tems *AM*, à la fin duquel les vitesses retardées *AH*, *TU*, se trouvent (*Corol.* 1.) entiérement éteintes ; les secteurs *SAD*, *DAR*, exprimeront chacun ce tems *AM* ; & les aires hyperboliques asymptotiques ΩΩ*D*Δ, Δ*DX*ψ, les hauteurs parcouruës en montant pendant ce tems, & en retombant pendant un pareil tems $= AM$: c'est-à dire que la hauteur du jet vertical jusqu'à l'entiere extinction de la vitesse *AH* de projection de bas en haut, fera à la hauteur de chute verticale accelerée faite pendant le même tems *AM* (le tout malgré les résistances supposées) :: ΩΩ*D*Δ. Δ*DX*ψ.

La précédente Solution & la 2[e] de la pag. 212 de 1709. font voir non-seulement que les secteurs circulaires *SAΠ* & hyperboliques *DAP* expriment les tems *AT* à la fin desquels se trouvent les vitesses *TU*, *TW*, d'ascension & de chutte, restantes malgré les résistances supposées ; mais encore que les correspondans à la même *AT* sont égaux entr'eux, puisque suivant ces deux Solutions $SA\Pi = \frac{1}{2} 1 \times AT = DAP$. D'où il suit aussi que $SAD = DAR$: c'est-à-dire que les deux secteurs *SAD*, *DAR*, corres-

pondans à la même AM, sont pareillement égaux entr'eux.

Ce dernier Corol. 30. avec les Corol. 18. 19. & le Probl. 2. pag. 397. &c. des Mem. 1707. renferment tout ce que M. Newton a donné dans ses Princ. Math. Liv. 2. Sect. 2. sur les mouvemens faits dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses du mobile, qui est l'hypothese dont il s'agit ici.

AUTRE SOLUTION.

I. Soit $\frac{a^4}{xx} = aa + uu$, ou $u = \sqrt{\frac{a^4}{xx} - aa} = \frac{a}{x}\sqrt{aa - xx}$. l'on aura $du = \frac{-adx\sqrt{aa-xx} - \frac{axxdx}{\sqrt{aa-xx}}}{xx} = \frac{-a^3dx + axxdx - axxdx}{xx\sqrt{aa-xx}}$ $= \frac{-a^3dx}{xx\sqrt{aa-xx}}$, ou $-du = \frac{a^3dx}{xx\sqrt{aa-xx}}$. Donc $\frac{adx}{\sqrt{aa-xx}} = \frac{-aadu}{aa+uu}$ (*Solut.* 1. *art.* 2.) $= dt$; & cette equation differentielle s'intégrera par le moyen du quart de cercle HSD de la Fig. 1. en y appellant encore $A\Pi$, a; & de plus AP, x; & conséquemment aussi ΠP, $\sqrt{aa-xx}$: car ayant ici $P\Pi$ $(\sqrt{aa-xx})$. $A\Pi$ (a) :: πO (dx). $\Pi\pi = \frac{adx}{\sqrt{aa-xx}} = dt$, l'on aura (en intégrant) t $(AT) = H\Pi + q$.

FIG. I.

II. Mais en supposant l'angle $DA\Omega$ de 45. deg. qui donnera AS $(a) = \sqrt{\overline{AQ}^2 + \overline{SQ}^2} = \sqrt{2 \times \overline{AQ}^2} = AQ \times \sqrt{2}$, & conséquemment $AQ = \frac{a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{\frac{1}{2}}$; le cas de AP (x) $= AQ$ $(a\sqrt{\frac{1}{2}})$ rendant non-seulement $H\Pi = HS$, mais encore $xx = \frac{aa}{2}$, & conséquemment $2aa = \frac{a^4}{xx}$ (*art.* 1.) $= aa + uu$, c'est-à-dire $aa = uu$, ou u $(TU) = a$ (AH), & par-là AT $(t) = 0$; réduit cette intégrale de l'art. 1. à $0 = HS + q$, d'où résulte $q = -HS$.

III. Donc (*art.* 1. 2.) $AT = H\Pi - HS = S\Pi$ est cette intégrale juste & précise, qui donne encore ici par tout $AT = S\Pi$, ainsi que dans l'art. 4. de la Solut. 1. De sorte que S sera ici comme là, l'origine des $S\Pi$ qui pris depuis

ce point fixe *S* vers *D* exprimeront encore les tems écoulés *AT* (t) à la fin desquels se trouvent encore les vitesses retardées *TU* (u) restantes des primitives *TV* malgré les résistances ici supposées.

IV. Donc aussi l'art. 1. donnant u (TU) $= \frac{a}{x}\sqrt{aa-xx}$ $\left(\frac{A\Pi \times \Pi P}{AP}\right)$, si l'on prend par-tout ici les abscisses $AT = S\Pi$ sur l'axe *AC*, & les ordonnées perpendiculaires $TU = \frac{A\Pi \times \Pi P}{AP}$, la ligne *HUM* qui passera par tous les points *U* ainsi trouvés, sera ici la Courbe cherchée des vitesses retardées restantes des primitives *TV* malgré les résistances du milieu supposé résistant en raison des quarrés de ces vitesses actuelles ou restantes. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

V. Cette construction de la Courbe *HUM* servira comme dans l'art. 6. de la Solut. 1. à construire celle *ARN* des résistances totales *TR* du milieu supposé. *Ce qu'il falloit encore aussi trouver.*

COROLLAIRE XXXI.

Puisque le cas de $AP = AQ$ en rendant (*Solut.* 2. *art.* 2. & 3.) $AT = 0 = S\Pi$, & conséquemment $TU = AH$, rend aussi u (TU) $= a$ (AF); l'on aura ici $AH = AF$ conformément au Lem. 1. art. 3. pag. 195. de 1709.

COROLLAIRE XXXII.

De ce que (*Solut.* 2. *art.* 1.) $u = \frac{a}{x}\sqrt{aa-xx}$, le cas de $x = a$, ou de $AP = AD$, rend $u = \frac{a}{a}\sqrt{aa-aa} = 0$; l'on aura ici TU (u) $= 0$ à la fin du tems $AM = SD$. Ainsi la Courbe *AUM* rencontrera son axe à la fin du tems *AM*, & les vitesses *TU* restantes des primitives *TV*, s'y éteindront tout à fait par l'opposition des résistances du milieu supposé, ainsi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 1.

COROLLAIRE XXXIII.

Pour trouver encore ici les espaces parcourus pendant

les tems AT (t), il eſt à remarquer que l'art. 1. de la Solut. 2. lequel vient de donner $u = \frac{a}{x}\sqrt{aa - xx}$, & $dt = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$, doit donner auſſi $udt = \frac{aadx}{x}$, & $\int udt$ $(ATUH)$ $= aa \times lx + q = aa \times lAP + q$. Mais le cas de $ATUH = 0$, rendant auſſi AT ou (*Solut.* 2. *art.* 3.) $S\Pi = 0$, & par conſéquent $AP = AQ$, réduit cette intégrale à $0 = aa \times lAQ + q$, d'où réſulte $q = - aa \times lAQ$. Donc cette intégrale complette eſt $ATUH = aa \times lAP - aa \times lAQ = aa \times l\frac{AP}{AQ}$; & conſéquemment $AMUH = aa \times l\frac{AD}{AQ}$. Donc auſſi (*Lem.* 2. *pag.* 196. *de* 1709.) les eſpaces ici parcourus pendant les tems AT ou (*Sol.* 2. *art.* 3.) $S\Pi$, ſont entr'eux comme les grandeurs $aa \times l\frac{AP}{AQ}$ correſpondantes, ou (à cauſe de a conſtante) comme les Logarithmes des fractions $\frac{AP}{AQ}$ correſpondantes, ou comme les Logarithmes des raiſons des correſpondantes variables AP à la conſtante AQ; & à l'eſpace entier parcouru pendant tout le tems AM ou SD, c'eſt-à-dire (*Corol.* 1. & 32.) juſqu'à l'entiére extinction des viteſſes TV par les réſiſtances ſuppoſées, comme ces Logarithmes au Logarithme de la fraction conſtante $\frac{AD}{AQ}$, ou de la raiſon de la conſtante AD à la conſtante AQ.

COROLLAIRE XXXIV.

Mais la Logarithmique FDH & tout ce qui y a rapport dans la Fig. 1. demeurant ici le même que dans le Corol. 10. L'on aura $lAP = lG\Lambda = - AG$, & $lAQ = lZX = - AZ$, négatifs à cauſe que AP, AQ, ſont moindres chacune que AD (a) priſe ici pour l'unité; par conſéquent $lAP - lAQ = - AG + AZ = ZG$, ou $l\frac{AP}{AQ} = ZG$. Donc (*Corol.* 33.) les eſpaces ici parcourus pendant les tems AT ou $S\Pi$, doivent être ici entr'eux comme les abſciſſes ZG correſpondantes dont Z eſt l'origine; & à l'eſpace entier parcouru pendant tout le tems

AM

AM ou SD, c'eſt-àdire (*Corol.* 1. & 32.) juſqu'à l'entiere extinction des viteſſes par les réſiſtances ſuppoſées, comme ces ZG ſont à ZA: ainſi qu'on l'a déja trouvé dans le Corol. 10.

Cette ſeconde Solution pourroit encore fournir tous les autres Corollaires de la premiere; mais en voilà aſſez.

REMARQUE.

Il eſt à remarquer, que par les Méthodes de M. Leibnitz & de M. (Jean) Bernoulli, pour intégrer les fractions rationnelles, la differentielle $-aa \times \frac{udu}{aa+uu}$ dont l'intégrale dans les Corol. 10. 11. 12. 14. vient de donner en differentes manieres le rapport des eſpaces ici parcourus malgré les réſiſtances ſuppoſées, ſe réduit à deux differentielles Logarithmiques imaginaires, cependant intégrables enſemble par le moïen d'une Logarithmique réelle, ou d'une hyperbole.

Car ſuivant ces deux Méthodes inſerées dans les Mem. de l'Académie de 1702. & dans les Actes de Leipſik de la même année, l'on aura ici $\frac{udu}{aa+uu} = \frac{1}{2} \times \frac{du}{u+a\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} \times \frac{du}{u-a\sqrt{-1}}$ differentielles logarithmiques imaginaires. Or ſi l'on prend encore $\frac{a^4}{xx} = aa + uu$, & conſéquemment $uu = \frac{a^4}{xx} - aa$, l'on aura $udu = \frac{a^4xdx}{x^4} = \frac{a^4dx}{x^3}$ par la differentiation en ſignes contraires qu'éxigent les accroiſſemens alternatifs de x, u, dans $\frac{a^4}{xx} = aa + uu$. Donc $\frac{dx}{x} = \frac{udu}{aa+uu} = \frac{1}{2} \times \frac{du}{u+a\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} \times \frac{du}{u-a\sqrt{-1}}$. Par conſéquent ces deux differentielles Logarithmiques imaginaires ſont intégrables enſemble par le moyen d'une Logarithmique réelle ou d'une hyperbole, ainſi qu'on le vient de dire. Cette Logarithmique eſt celle qui vient de donner dans les Corol. 33. 34 les eſpaces ici parcourus: l'hyperbole en eſt aiſée à déduire; ainſi nous ne nous y arrêterons pas davantage.

Si l'on eût pris $2as = aa + uu$, l'on auroit ou $ads = udu$; & delà tout d'un coup $\frac{1}{2}\frac{ds}{s} = \frac{udu}{aa+uu} = \frac{1}{2} \times \frac{du}{a+a\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} \times \frac{du}{a-a\sqrt{-1}}$, ou $\frac{ds}{s} = \frac{du}{a+a\sqrt{-1}} + \frac{du}{a-a\sqrt{-1}}$, c'est-à-dire, une Logarithmique réelle pour intégrale des deux differentielles logarithmiques imaginaires précédentes.

SCHOLIE.

FIG. I. II.

I. Puisque la premiere condition de ce Problême-ci donne (*Solut.* 1. *art.* 2.) $z = \frac{uu}{a}$, ou $uu = az$, cette égalité n'étant que de raport; l'on aura ici $du = \frac{adz}{2\sqrt{az}}$. Ainsi l'équation $dt = \frac{-aadu}{aa+uu}$ trouvée dans la Solut. 1. art. 2. pour celle de la Courbe *HUM* des vitesses restantes *TU* (u), se changera ici en $dt = \frac{-aadz}{2a\sqrt{az} + 2z\sqrt{az}}$ pour la Courbe *KEC* des résistances instantanées z (dr) du milieu supposé résistant en raison des quarrés uu ou $\frac{uu}{a}$ des vitesses actuelles ou restantes (u) malgré les résistances de ce milieu. Et le cas de *AT* (t) $= 0$, qui rend *TU* (u) $=$ *AH* (a), réduisant à z (*AK*) $= a$ (*AH*) l'équation z (*TE*) $= \frac{uu}{a}$; il est manifeste que cette Courbe doit passer par *H*; & son équation $dt = \frac{-aadz}{2a\sqrt{az} + 2z\sqrt{az}}$ s'y réduisant à $dt = \frac{-aadz}{2aa+2aa} = \frac{-dz}{4}$, qu'elle y doit rencontrer *AH* sous une angle dont le sinus soit à celui de son complément : : 1. 4. c'est-à-dire, le quart de celui de son complément.

II. De plus l'équation $z = \frac{uu}{a}$ ayant (*Corol.* 1. & 32.) $u = 0$ en *M*, elle y doit aussi avoir z (*TE*) $= 0$, & par-là y réduire l'équation $dt = \frac{-aadz}{2a\sqrt{az} + 2z\sqrt{az}}$ à $dt = \frac{-dz}{0}$. D'où l'on voit que cette Courbe *KEC* ou *HEC* des résistances instantanées *TE* ou z (dr) du milieu supposé, doit non-seulement passer par *M* aussi-bien que (*Corol.* 1. & 32.)

celle *HUM* des vitesses restantes *TU* (u) malgré ces résistances ; mais encore y avoir son axe *AC* pour tangente ; & tourner sa convexité vers lui de même (*Corol.* 7.) que *HUM*.

III. Pour construire cette Courbe *KEM* ou *HEM* des résistances instantanées, il n'y a qu'à prolonger par tout *GB* dans la Fig. 2. jusqu'à la rencontre de *TU* en *E* ; & alors on aura $TE = DB$ (*Corol.* 15.) $= \frac{uu}{a}$ (*Solut.* 1. *art.* 2.) $= z$. *Ce qu'il falloit trouver.*

FIG. II.

IV. On peut pareillement construire cette Courbe *KEC* par le moyen de la Courbe *HUM* déja construite dans les Solut. 1. 2. Car l'équation $z = \frac{uu}{a}$, ou (*Solut.* 1.) $TE = \frac{TU \times TU}{AH}$ fait voir que si l'on fait le demi-cercle $A\Delta H$ sur le diametre *AH*, lequel demi-cercle soit rencontré en Δ par l'arc circulaire $\varepsilon\Delta$ décrit du centre *A*, & du rayon $A\varepsilon$ ou *TU* ; que de ce point Δ on fasse ΔE parallele à *AC*, & qui rencontre *TU* en *E* : ce point *E* sera un de ceux de la Courbe cherchée *KEM* ou *HEM*. Car si l'on prolonge ΔE jusqu'en Σ sur le diametre *AH*, & qu'on tire la corde $A\Delta$; l'on aura ici $TE = A\Sigma = \frac{A\Delta \times A\Delta}{AH} = \frac{A\varepsilon \times A\varepsilon}{AH} = \frac{TU \times TU}{AH} = \frac{uu}{a}$ (*hyp.*) $= z$: c'est-à-dire $TE = z$; & ainsi de toutes les autres ordonnées de la Courbe *KEC*.

FIG. I.

V. Tout ce qu'on vient de remarquer de cette Courbe dans l'art. 2. suit encore de cette construction : sçavoir,

1°. Que le cas $AT = 0$, qui rend *TU* ou $A\varepsilon$ ou $A\Delta = AH$, rendant aussi $A\Sigma$ ou *TE* ou $AK = AH$; cette Courbe *KEC* doit passer par *H*, & y avoir son point *K*.

2°. Que le cas de $AT = AM$, qui (*Corol.* 1. & 32.) rend *TU* ou $A\varepsilon$ ou $A\Delta = 0$, rendant aussi $A\Sigma$ ou $TE = 0$; cette même Courbe *KEC* ou *HEC* doit rencontrer son axe *AC* en *M*, & l'avoir pour tangente en ce point, ayant là dz nulle par raport à dt, comme $A\Sigma$ l'est par raport à $A\Delta$ en *A* ; au lieu que la Courbe *HUM* rencontre son axe *AC* en *M* (*Corol.* 5.) sous un angle de 45. degrés.

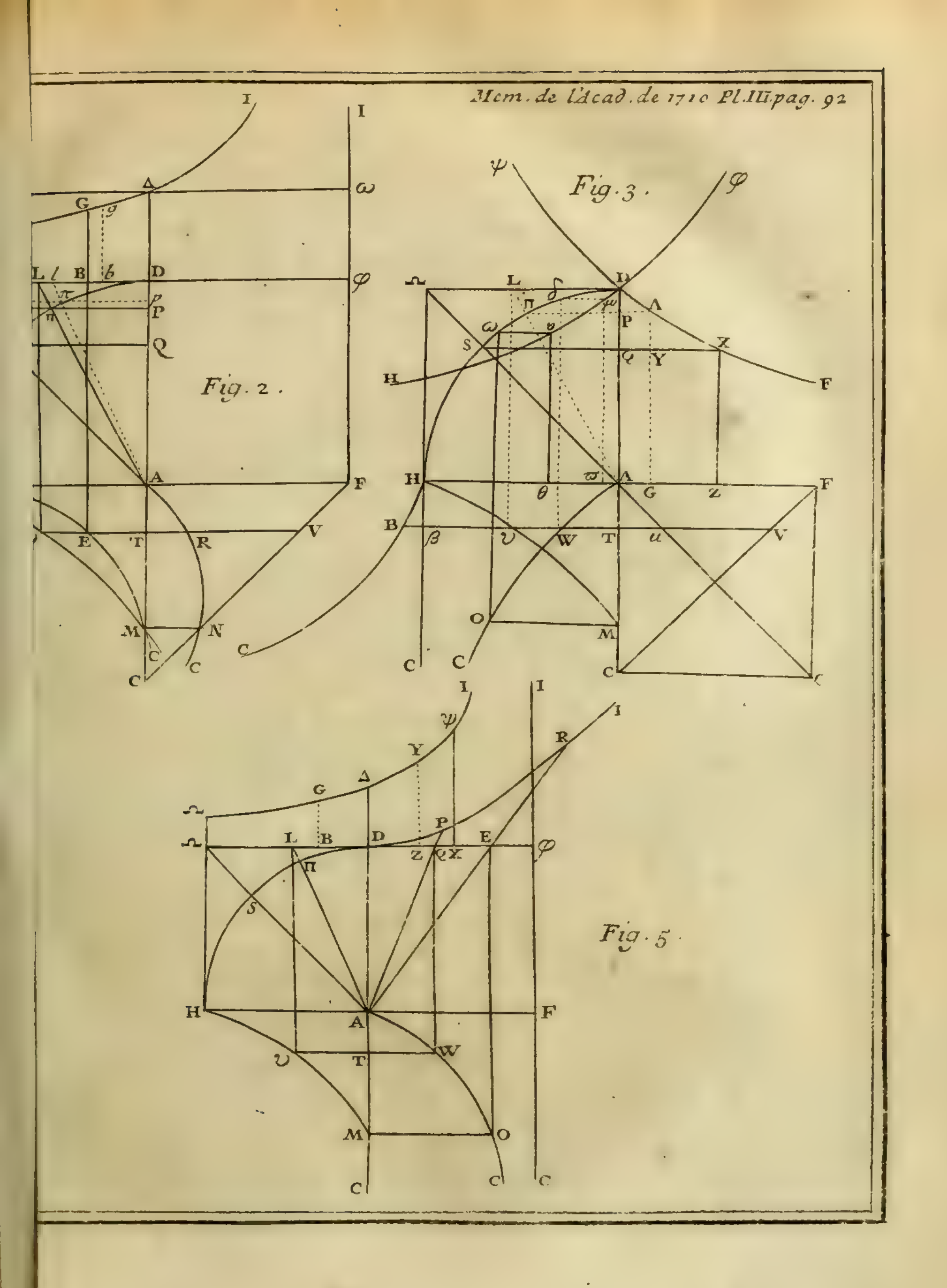
Quant aux raports de la pesanteur du mobile aux résistances instantanées du milieu supposé, &c. la maniere dont on les a trouvés dans la Remarq. 2. pag. 209. &c. de 1709. pour les mouvemens accelerés malgré ces résistances, fait voir assés comment on les pourroit trouver aussi pour les mouvemens retardés dont il s'agit ici, pour n'avoir pas besoin de s'y arrèter. Nous n'en dirons donc pas davantage sur les mouvemens faits dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses des corps mûs: Hypothese ordinaire, qui quoique plus vraisemblable que celle des résistances en raison de ces vitesses, dont nous avons aussi parlé dans les Mem. de 1708. pag. 113. 212. 250. 302. 419. &c, l'est cependant encore moins que celle des résistances en raison des sommes faites de ces vitesses & de leurs quarrés. On verra dans d'autres Memoires ce qu'il arriveroit dans celle-ci à des mouvemens exposés à de telles résistances.

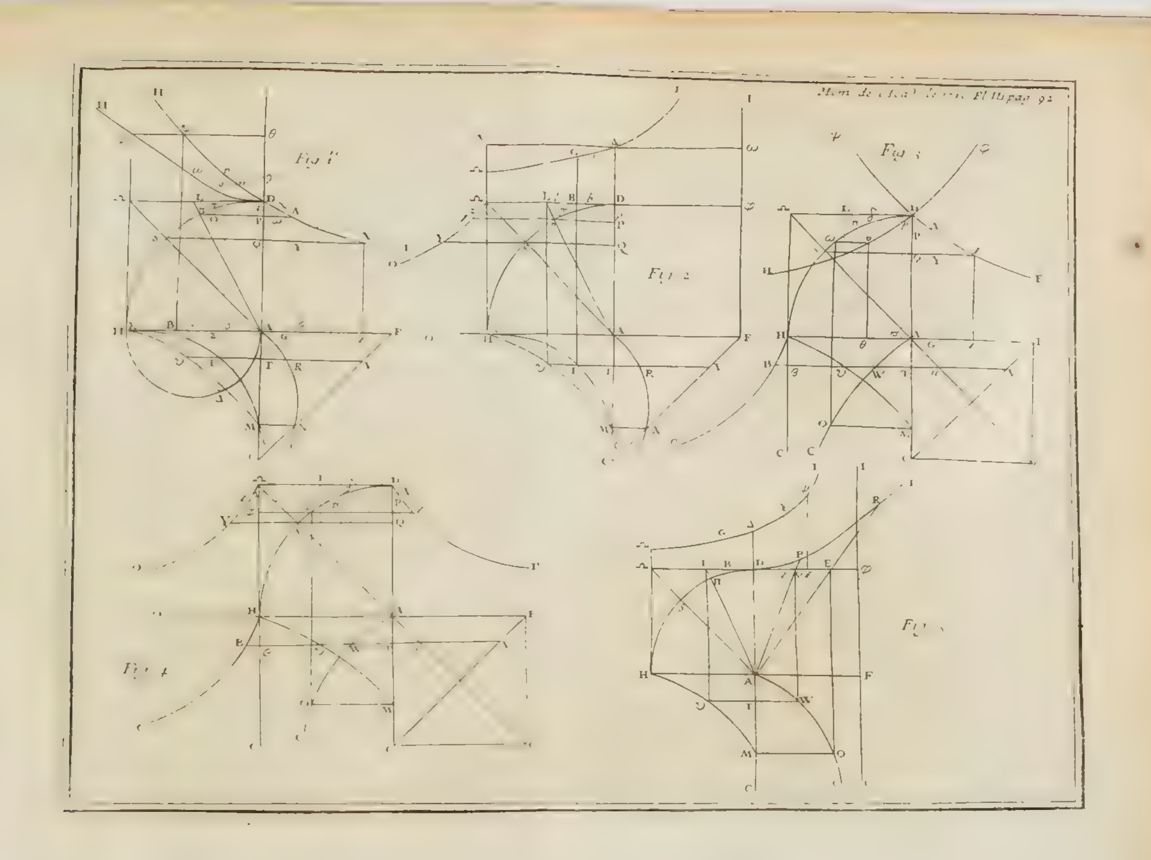
CONSTRUCTION GENERALE DES QUARRÉS MAGIQUES.

PAR M. SAUVEUR.

20. Decem. 1709. & 3. Decem 1710.

APRÈS que plusieurs personnes d'un merite connu se sont appliqués à la construction des Quarrés magiques, j'ai cru pouvoir donner des reflexions particulieres que j'ai été engagé de faire par des personnes pour qui j'ai du respect; & je donne des principes si simples & si generaux, que je ne crois pas qu'on en ait besoin d'autres pour épuiser cette matiere, qui n'est que de pure curiosité. Pour montrer la fécondité des principes que j'établis, j'ajoûte les Quarrés composez, les Enceintes, les Croix, les Chassis & les Cubes magiques.


Mem. de l'Acad. de 1710 Pl. III. pag. 92
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.



I. *Définitions générales.*

1. Nous appellons ici *Quarré* un quarré divisé en Cellules quarrées pour renfermer dans chacune un nombre.

Dans un Quarré il faut considerer les Bandes, les Cellules & les Quartiers.

2. *Les Bandes horizontales* sont formées par les Cellules 1. 2. 3. 4. 5. ou 6. 7. 8. 9. 10. &c.

Voyez le 1. Quarré de l'article 4.

Les Bandes verticales par 1. 6. 11. 16. 21. ou 2. 7. 12. 17. 22. &c.

La premiere Diagonale est 1. 7. 13. 19. 25. & la seconde Diagonale est 5. 9. 13. 17. 21.

Les Bandes paralleles à la 1re Diagonale sont 2. 8. 14. 20. 21. & 3. 9. 15. 16. 22. & 4. 10. 11. 17. 23. & 5. 6. 12. 18. 24.

Les Bandes paralleles à la 2de Diagonale sont 4. 8. 12. 16. 25. & 3. 7. 11. 20. 24. &c.

Les Bandes correspondantes sont les bandes également distantes des extremités, comme 1. 5. & 21. 25. de même 2. 22. & 4. 24.

Les Bandes non correspondantes sont deux bandes qui ne sont pas également distantes des extremités, comme 1. 21. & 4. 24.

Dans les Quarrés impairs il y a deux *Bandes moyennes*; sçavoir, l'horizontale 11. 15. & la verticale 3. 23. & *le Centre* 13. est commun aux deux bandes moyennes, & aux deux diagonales.

Dans chaque Bande il y a des *Cellules correspondantes*, & des *Cellules non correspondantes*, & dans les Bandes des impairs il y a une *Cellule moyenne.*

Chaque Quarré est partagé en 4. *Quartiers*; sçavoir, dans les pairs par 2 lignes qui passent par le centre, & dans les impairs par les deux bandes moyennes.

3. *La Racine d'un quarré* est le nombre des Cellules de chaque bande, & l'on désignera les quarrés par leurs racines; ainsi le quarré de 9. est celui qui a 9. cellules dans

une bande, & 81. dans sa superficie : c'est pourquoi si l'on appelle *r* la racine d'un quarré, *r r* marquera le nombre des Cellules de ce quarré.

Une racine est *paire* comme 4. 6. 8. 10. 12. &c. ou impaire comme 3. 5. 7. 9. 11. 13. &c.

Une Racine paire est *pairement paire* comme 4. 8. 12. 16. 20. 24. &c. lorsque sa moitié est paire, & elle est *impairement paire* comme 6. 10. 14. 18. 22. 26. &c. lorsque sa moitié est impaire.

Une Racine impaire est *pairement impaire* comme 5. 9. 13. 17. 21. 25. &c. lorsque ôtant 1. la moitié du reste est paire, & elle est *impairement impaire* lorsque cette moitié est impaire comme 3. 7. 11. 15. 19. 23. 27. &c.

4. Un *Quarré naturel* est celui qui renferme des nombres qui augmentent par ordre dans chaque bande.

Ces nombres sont ordinairement en *progression simple* arithmetique, ou bien en *proportion interrompuë*.

	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	10
10	11	12	13	14	15
15	16	17	18	19	20
20	21	22	23	24	25

	1	3	4	7	8
0	1	3	4	7	8
8	9	11	12	15	16
17	18	20	21	24	25
29	30	32	33	36	37
38	39	41	42	45	46

5. Ces nombres seront considerés comme supposés de deux nombres ; sçavoir, de petits nombres que j'appelle 2^ds^ *Nombres*, qui sont les mêmes dans chaque verticale, & de grands nombres que j'appelle 1ers *Nombres*, qui sont les mêmes dans chaque horizontale ; de sorte qu'il suffit de marquer les nombres d'un Quarré naturel une fois par les 1ers & 2^ds^ nombres.

	1	3	4	7	8
0	0. 1	0. 3	0. 4	0. 7	0. 8
8	8. 1	8. 3	8. 4	8. 7	8. 8
17	17. 1	17. 3	17. 4	17. 7	17. 8
29	29. 1	29. 3	29. 4	29. 7	29. 8
38	38. 1	38. 3	38. 4	38. 7	38. 8

6. Pour rendre la construction des Quarrés plus générale, nous marquerons les 2^ds^ nombres par les lettres *p. q. r. s. t. u.* &c. que nous appellerons 2des *lettres*, & les 1ers

nombres par les lettres *A.B.C. D.E.*&c. que nous appellerons 1[res] *lettres.*

7. Nous exprimerons aussi les 2[ds] nombres par la *moyenne n*, avec les differences qui seront negatives & positives; & pour avoir la valeur de n dans les Quarrés impairs, prenez la somme des 2[ds] nombres 1.2.3.4.5. qui est 15. & la divisés par $r = 5$. vous aurez $3 = n$. & ces nombres seront $n-2$. $n-1$. $n\pm 0$. $n+1$. $n+2$. que nous exprimerons seulement par les seules differences -2. -1. 0. 1. 2. car la quantité de la moyenne n est indifferente, pourvû qu'elle surpasse celle de la plus grande negative au moins de 1.

	p	*q*	*r*	*s*	*t*
A	*Ap*	*Aq*	*Ar*	*As*	*At*
B	*Bp*	*Bq*	*Br*	*Bs*	*Bt*
C	*Cp*	*Cq*	*Cr*	*Cs*	*Cr*
D	*Dp*	*Dq*	*Dr*	*Ds*	*Dt*
E	*Ep*	*Eq*	*Er*	*Es*	*Et*

	-1	-1	-0	1	2
-2λ	-2λ -2	-2λ -1	-2λ 0	-2λ 1	-2λ 2
-1λ	-1λ -2	-1λ -1	-1λ 0	-1λ 1	-1λ 2
0	0 -2	0 -1	0 0	0 1	0 2
1λ	1λ -2	1λ -1	1λ 0	1λ 1	1λ 2
2λ	2λ -2	2λ -1	2λ 0	2λ 1	2λ 2

Si le Quarré est pair comme de 6. au lieu des 2[ds] nombres 1. 2. 3. 4. 5. 6. il faut prendre leur double 2. 4. 6. 8. 10. 12. Alors $n = 7$. & les differences sont les impairs -5. -3. -1. 1. 3. 5. la quantité de n doit être impaire & plus grande que le plus grand negatif -5. afin qu'on puisse diviser les nombres qui en viendront, que j'appellerai *faux Nombres* par 2, & réduire ainsi les nombres du Quarré aux plus simples que je regarderai comme les vrais nombres.

8. Les 1[ers] nombres s'exprimeront par la moyenne m, avec de semblables differences multipliées par λ. ainsi dans le quarré de 5. les differences seront -2λ. -1λ. 0. 1λ. 2λ. & dans le quarré de 6. elles seront -5λ -3λ. -1λ. 1λ. 3λ. 5λ.

La quantité de λ doit être au moins égale au plus grand des 2[ds] nombres, & dans les quarrés pairs il en doit être au moins la moitié. Il peut être plus petit,

pourvû qu'aucune des differences réciproques des 1ers nombres ne ſoit pas égale à aucune de celle des 2^ds^ nombres.

La quantité de la moyenne *m* doit être poſitive & au moins égale au plus grand nombre négatif.

Aux premieres differences des 1^rs^ nombres l'on peut ajoûter *des ſecondes differences*, avec ces conditions, 1°. Qu'elles peuvent être égales ou inégales. 2°. Que leur ſomme doit être égale à zero. 3°. Qu'il faut les ajoûter par ordre aux 1res differences, c'eſt-à-dire les plus grandes 2des differences aux plus grandes premieres, les plus petites aux plus petites; ainſi au quarré de 6. les 1res & 2des differences peuvent être —5λ—4. — 3λ—1. —1λ—1. 0—1. 1λ +0. 3λ+3. 5λ+4.

9. *Un Quarré magique* eſt une diſpoſition des nombres d'un quarré naturel, telle que la ſomme des nombres qui ſont dans chaque bande horiſontale, dans chaque verticale & dans chaque diagonale ſoit toûjours la même, comme dans ce quarré-ci où ces ſommes ſont 65.

11	2	9	20	23
22	14	5	8	16
19	25	13	1	7
10	18	21	12	4
3	6	17	24	15

10. Les nombres du Quarré magique ſont formés par les ſommes des 1ers & des 2^ds^ nombres de l'article 5. Il peut neanmoins y avoir une ſuite de nombres qui ne peuvent point être compris dans ceux de cet article, & qui forment un Quarré magique; mais ils peuvent s'y rapporter en ajoûtant ou ôtant un même nombre de quelqu'un de ceux qui ſont dans chaque bande, comme ici ajoûtant 1. aux nombres qui ont un point. *V. art.* 83.

2.	45	42	12
24	30	32.	15
36	18	21	16.
39	8.	6	48

11. *Un Quarré naturel Géometrique* eſt une ſuite de nombre en progreſſion Géometrique ſimple, ou en proportion Géometrique interrompuë, qui augmente d'ordre dans chaque rang.

1	2	4
8	16	32
64	128	256

L'on

L'on doit considerer les nombres de ce Quarré comme les produits des 1ers nombres 1. 8. 64. par les 2ds nombres 1. 2. 4. ou generalement comme les produits des 1res lettres *A B C* par les 2des lettres *p q r*, à la difference des quarrés ordinaires qui sont quarrés arithmetiques, dans lesquels il faut prendre la somme des 1res & des 2des lettres.

	1	2	4
1	1. 1	1. 2	1. 4
8	8. 1	8. 2	8. 4
64	64. 1	64. 2	64. 4

	p	*q*	*r*
A	*Ap*	*Aq*	*Ar*
B	*Bp*	*Bq*	*Br*
C	*Cp*	*Cq*	*Cr*

Un Quarré magique Geometrique est un quarré rempli de nombres tels que le produit de ceux qui sont dans chaque bande horizontale, verticale & diagonale, est toûjours le même comme ici, où le produit est 4096 $= B^3 q^3$.

8	4	128
256	16	1
2	64	32

	p 1	*q* 2	*r* 4
A 1	*Bp*	*Ar*	*Cq*
B 8	*Cr*	*Bq*	*Ap*
C 64	*Aq*	*Cp*	*Br*

Ce Quarré magique Geometrique peut être construit précisément comme le Quarré ordinaire, avec ces differences, 1°. Qu'au lieu de prendre des nombres en progression ou proportion arithmetique, il les faut prendre en progression ou proportion Geometrique. 2°. Qu'au lieu d'additionner ou de soustraire, il faut multiplier ou diviser; c'est pourquoi nous ne parlerons plus des Quarrés magiques Geometriques.

Nous expliquerons dans la suite les Quarrés composés, les Enceintes, les Croix, les Chassis & les Cubes magiques.

II. *Construction des Quarrés magiques impairs par lettres générales.*

12. J'appelle *lettres générales* les 1res lettres *A. B. C. D. E.* &c. & les secondes *p. q. r. s. t.* &c. à la difference des

lettres analogues dont nous parlerons dans la Section IV.

Les Quarrés impairs se construisent avec les lettres générales. 1. par diagonales. 2. par indices. 3. par la méthode mixte. 4. par la méthode desordonnée.

Ces constructions donneront des Quarrés magiques, parceque les lettres seront toutes dans chaque bande horizontale, verticale & diagonale; & si quelques-unes sont repetées dans les diagonales, il faut que les repetées soient égales à celles dont elles occupent la place.

13. Pour construire un Quarré magique impair *par diagonales*, 1°. Dans la 1re bande horizontale mettez par ordre les 1res lettres & les 2des lettres. 2°. Mettez *A* dans les cellules de la 1re diagonale, & les autres 1res lettres dans les cellules des bandes paralleles à la 1re diagonale. 3°. Mettez la derniere 2de lettre *t* dans la 2de diagonale, & les autres 2des lettres dans les cellules des bandes paralleles à la 2de diagonale, & l'on aura le Quarré qui sera magique, pourvû que les lettres repetées dans les diagonales soient moyennes entre les autres de leur espece.

A p	B q	C r	D s	E t
E q	A *r*	*B s*	C t	*D p*
D r	*E s*	A t	*B p*	*C q*
Cs	*D* t	*E p*	A *q*	*B r*
B t	*C p*	*D q*	*E r*	A *s*

14. Pour construire un Quarré magique impair *par indices*, 1°. Dans la 1re horizontale mettez par ordre les 1res & 2des lettres. 2°. Au-dessus de la 1re bande horizontale écrivés 0. 1. 2. 3. &c. que j'appelle *les indices* des 1res & 2des lettres qui sont dans la 1re bande horizontale; de sorte que 3. est indice de *D* & de *s*. 3°. Mettez devant la 2de cellule de la 1re verticale deux indices 2. 3. qui ne soient pas 0. 1. $r - 1 = 4$, ni aliquotes ou aliquantes de la racine 5. du Quarré proposé *. 4°. Prenez les multiples de 2. qui sont 2. 4. 6. 8. ou 2. 4. 1. 3. en ôtant la racine 5. &

	0	1	2	3	4
0. 0	A p	B q	C r	D s	E t
2. 3	C s	*D t*	*E p*	*A q*	*B r*
4. 1	E q	*A r*	*B s*	*C t*	*D p*
1. 4	B t	*C p*	*D q*	*E r*	*A s*
3. 2	D r	*E s*	*A t*	*B p*	*C q*

* V. art. 15.

les écrivez dans la 1re colomne. 5°. Prenez les multiples de 3. qui sont 3. 6. 9. 12. ou 3. 1. 4. 2. en ôtant aussi 5. vous aurez la 2de colomne. 6°. Dans la 1re verticale écrivez les 1res lettres dont les indices sont dans la 1re colomne, & les 2des lettres dont les indices sont dans la 2de colomne. Au lieu de remplir d'abord la 1re horizontale, l'on pouvoit remplir une autre horizontale, & mettre les indices 0. 0. devant cette bande, & continuer comme ci-dessus. 7°. Dans les cellules de chaque horizontale écrivez d'ordre les 1res & les 2des lettres, vous aurez un Quarré magique impair par indices, pourvû que s'il y a quelques lettres repetées dans les diagonales, les repetées soient égales à celles dont elles occupent la place.

1.4	B t	*C p*	*D q*	*E r*	*A s*
3.2	D r	*E s*	*A t*	*B p*	*C q*
0.0	A p	B q	C r	D s	E t
2.3	C s	*D t*	*E p*	*A q*	*B r*
4.1	E q	*A r*	*B s*	*C t*	*D p*

15. en appellant *n*. l'indice de la 1re ou de la 2de lettre qui est devant la 2de cellule de la 1re verticale, après 0. 0, il arrivera plusieurs proprietez.

1°. *n* marquera la difference des indices & des lettres de chaque verticale, $n+1$ la difference des indices des lettres de la 1re diagonale, $n-1$ celle de la 2de diagonale.

2°. On ne peut point faire de Quarré magique si *n* est aliquote ou aliquante de *r*, ou si $n-1$ l'est de $n+1$, ou si la différence des deux indices qui sont après 0. 0, l'est de *r*. c'est pourquoi on ne peut point faire de Quarré magique pair par indices.

3°. Si $n+1=0$, c'est-à-dire, si $n=r-1$, *A* ou *p* se trouvera seule dans la 1re diagonale; & si $n-1=0$ ou $n=1$, la derniere lettre se trouvera seule dans la 2de diagonale, & le quarré se trouvera construit par diagonales ou par la méthode mixte art. 13. ou 16.

Voyez le 1. Quarré de l'art. 14.

4°. Si $n+1$ est aliquote ou aliquante de *r*, il y aura plusieurs lettres repetées dans la 1re diagonale, comme ici *A D G K N*; & *p u b*; & si $n-1$ est aliquote ou aliquante de *r*, il y aura plusieurs lettres repetées dans la 2de diagonale, comme *f r u z c*.

Voyez le Quarré suivant.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0. 0	*Ap*	*Bq*	*Cr*	*Ds*	*Et*	*Fu*	*Gx*	*Hy*	*Iz*	*Ka*	*Lb*	*Mc*	*Nd*	*Oe*	*Pf*
2. 4	*Ct*	*Du*	*Ex*	*Fy*	*Gz*	*Ha*	*Ib*	*Kc*	*Ld*	*Me*	*Nf*	*Op*	*Pq*	*Ar*	*Bs*
4. 8	*Ez*	*Fa*	*Gb*	*Hc*	*Id*	*Ke*	*Lf*	*Mp*	*Nq*	*Or*	*Ps*	*At*	*Bu*	*Cx*	*Dy*
6. 12	*Gd*	*He*	*If*	*Kp*	*Lq*	*Mr*	*Ns*	*Ot*	*Pu*	*Ax*	*By*	*Cz*	*Da*	*Eb*	*Fc*
8. 1	*Iq*	*Kr*	*Ls*	*Mt*	*Nu*	*Ox*	*Py*	*Az*	*Ba*	*Cb*	*Dc*	*Ed*	*Fe*	*Gf*	*Hp*
10. 5	*Lu*	*Mx*	*Ny*	*Oz*	*Pa*	*Ab*	*Bc*	*Cd*	*De*	*Ef*	*Fp*	*Gq*	*Hr*	*Is*	*Kt*
12. 9	*Na*	*Ob*	*Pc*	*Ad*	*Be*	*Cf*	*Dp*	*Eq*	*Fr*	*Ft*	*Ht*	*Iu*	*Kx*	*Ly*	*Mz*
14. 13	*Pe*	*Af*	*Bp*	*Cq*	*Dr*	*Es*	*Ft*	*Gu*	*Hx*	*Iy*	*Kz*	*La*	*Mb*	*Nc*	*Od*
1. 2	*Br*	*Cs*	*Dt*	*Eu*	*Fx*	*Gy*	*Hz*	*Ia*	*Kb*	*Lc*	*Md*	*Ne*	*Of*	*Pp*	*Aq*
3. 6	*Dx*	*Ey*	*Fz*	*Ga*	[illegible]*b*	*Ic*	*Kd*	*Le*	*Mf*	*Np*	*Oq*	*Pr*	*As*	*Bt*	*Cu*
5. 10	*Fb*	*Gc*	*Hd*	*Ie*	*Kf*	*Lp*	*Mq*	*Nr*	*Os*	*Pt*	*Au*	*Bx*	*Cy*	*Dz*	*Ea*
7. 14	*Hf*	*Ip*	*Kq*	*Lr*	*Ms*	*Nt*	*Ou*	*Px*	*Ay*	*Bx*	*Ca*	*Db*	*Ec*	*Fd*	*Ge*
9. 3	*Ks*	*Lt*	*Mu*	*Nx*	*Oy*	*Pz*	*Aa*	*Bb*	*Cc*	*Dd*	*Ee*	*Ff*	*Gp*	*Hq*	*Ir*
11. 7	*My*	*Nz*	*Oa*	*Pb*	*Ac*	*Bd*	*Ce*	*Df*	*Ep*	*Fq*	*Gr*	*Hs*	*It*	*Ku*	*Lx*
13. 11	*Oc*	*Pd*	*Ae*	*Bf*	*Cp*	*Dq*	*Er*	*Fs*	*Gt*	*Hu*	*Ix*	*Ky*	*Lz*	*Ma*	*Nb*

16. Pour conſtruire un Quarré magique impair par *la méthode mixte*. 1. Dans la 1re [illegible] horizontale mettez par ordre les 1res & les 2des lettres. 2. Mettez les 1res lettres par diagonale (*art.* 13.) 3. Mettez les 2des lettres par indices (*art.* 14.) Vous aurez un Quarré magique impair par la méthode mixte.

	0	1	2	3	4
0	Ap	Bq	Cr	Ds	Et
3	*Es*	*At*	*Bp.*	*Cq*	*Dr*
1	*Dq*	*Er*	As	*Bt.*	*Cp*
4	*Ct*	*Dp*	*Eq*	*Ar*	*Bs*
2	*Br*	*Cs.*	*Dt*	*Ep*	*Aq*

Ou bien mettez les 1res lettres par indices, & les 2des lettres par diagonales.

(*A*)	*B*	*C*	(*D*)	*E*	*F*	(*G*)	*H*	*I*	(*K*)	*L*	*M*	(*N*)	*O*	*P*
-7λ	-6λ	-5λ	-4λ	-3λ	-2λ	-1λ	0	1λ	7λ	3λ	4λ	5λ	6λ	2λ
-105	-90	-75	-60	-45	-30	-15	0.	15	105.	45.	60.	75.	90.	30.
0.	15.	30.	45.	60.	75.	90.	105.	120.	210.	150.	165.	180.	195.	135.
7	17	33	49	65	81	91	113	129	225	161	177	193	209	145
35	51	61	83	99	120	131	222	163	179	190	202	137	3	21
69	90	101	117	133	224	160	172	182	198	139	5	23	31	53
103	119	130	217	152	168	184	200	141	1	25	39	60	71	87
122	213	154	170	186	196	143	9	32	41	57	73	89	100	112
156	166	188	204	150	11	29	43	59	70	82	92	108	124	215
195	206	147	13	3	40	52	62	78	94	110	126	211	158	171
149	10	24	32	48	64	80	96	106	128	219	165	176	192	208
20	34	50	66	76	98	114	135	221	162	178	194	205	142	2
46	68	84	105	116	132	223	164	175	187	197	138	4	22	36
86	102	118	134	220	157	167	183	199	140	6	18	38	54	75
115	127	212	153	169	185	201	136	8	26	45	56	72	88	104
214	155	171	181	203	144	15	28	42	58	74	85	97	107	123
133	189	210	146	12	30	44	55	67	77	93	109	125	216	151
207	148	14	25	37	47	63	79	95	111	121	218	159	180	191
(*p*)	*q*	[*r*]	*s*	*t*	[(*u*)]	*x*	*y*	[*z*]	*a*	(*b*)	[*c*]	*d*	*e*	[*f*]
-1	-6	-5	-4	-3	-2	-7	0	1	7	3	4	5	6	2
7	2	3	4	5	6	1	8	9	15	11	12	13	14	10

17. Pour conſtruire un Quarré magique par *la méthod deſordonnée*, mettez (*comme dans l'art.* 14.) les indices ſur la 1re horizontale, & mettez-les devant la 1re verticale dans tel ordre qu'il vous plaira, enſorte que deux mêmes indices ne ſe rencontrent pas enſemble, achevez comme dans l'art. 14.

	0	1	2	3	4
0. 0	Ap	Bq	Cr	Ds	Et
1. 3	Bs	*Ct*	*Dp*	*Eq*	*Ar*
4. 2	Er	*As*	*Bt*	*Cp*	*Dq*
2. 4	Ct	*Dp*	*Eq*	*Ar*	*Bs*
3. 1	Dq	*Er*	*As*	*Bt*	*Cp*

III. *Construction en nombres des Quarrés magiques impairs faits avec les lettres générales.*

18. S'il n'y a aucune lettre repetée dans la diagonale comme au Quarré 5. de l'art. 14. 1°. Prenez pour valeur des 2[des] lettres *p. q. r. s. t.* des nombres tels que 1. 2. 3. 4. 5. rangez en tel ordre qu'il vous plaira sous ces lettres. 2°. Prenez de même à volonté les nombres 0. 5. 10. 15. 20. pour les 1[res] lettres *A B C D E*, ensorte neanmoins que leur plus petite difference soit au moins égale au plus grand 2[d] nombre 5. * 3°. Dans la premiere cellule mettez 4 = 0 + 4 = *A* + *p*, qui sont dans la 1[re] cellule du Quarré de l'art. 14. 4°. Dans la 2[de] cellule mettez 16 = 15 + 1 = *B* + *q*. & ainsi de suite, vous aurez un Quarré magique en nombre formé sur le 1[er] Quarré magique en lettres de l'art. 14.

* *V. art.* 8.

A	*B*	*C*	*D*	*E*
0.	15.	10.	20.	5
4	16	13	25	7
12	22	9	1	8
6	3	20	12	24
17	14	21	8	5
23	10	2	19	11
p	*q*	*r*	*s*	*t*
4	1	3	5	2

19. Si une 2[de] lettre est repetée seule dans la diagonale comme [*t*] dans le Quarré de l'art. 13. 1°. Prenez à volonté les differences —3. —2. 0. 1. 4. dans lesquelles soit 0, & dont la somme soit égale à zero. 2°. Ajoûtez à ces differences un nombre positif plus grand que la plus grande difference negative —3. par exemple 4. vous aurez 1. 2. 4. 5. 8. pour valeur des 2[des] lettres *p. q. r. s.* [*t*] en faisant *t* = 4.

Si aucune des 1[res] lettres est repetée dans la diagonale, vous trouverez la valeur de *A B C D E* comme dans l'art. 18.

Mais si une 1[re] lettre est seule repetée dans la diagonale comme (*A*) dans le Quarré de l'art. 13. ou de l'art. 16. 1°. Prenez à volonté les differences —3λ. —2λ. —1λ. 0λ. 6λ. Ajoûtez si vous voulez les secondes differences —2. —1. 0. 0. 3. vous aurez —3λ —2. —2λ —1. — 1λ

(*A*)	*B*	*C*	*D*	*E*
26.	77.	9.	0.	18.
28	82	10	8	22
23	27	85	13	2
1	26	30	7[illegible]	14
17	4	20	3	78
21	11	5	19	34
p	*q*	*r*	*s*	*t*
2	5	1	8	4

+0. 0λ+0. 6λ+3. dans lesquelles il faut qu'il y ait une difference égale à zero. 2°. Faites λ au moins égal au plus grand 2d nombre 8. vous aurez les differences en nombres —26. —17. —8. 0. 51. 3°. Enfin à ces differences ajoûtez 26. qui est au moins égal à la plus grande difference negative, vous aurez 0. 9. 18. 26. 77. pour valeur de (*A*) *B C D E* en faisant *A* égal à 26.

20. Si plusieurs 2des lettres sont repetées plusieurs fois dans la 1re diagonale que nous distinguerons par ( ), & dans la 2de diagonale que nous distinguerons par [ ], comme dans le quarré de 15. de l'art. 15. dont les 2des lettres sont (*p*) *q*. [*r*] *s*. *t*. [(*u*)] *x*. *y*. [*z*] *a*. (*b*) [*c*] *d*. *e*. [*f*] entre lesquelles *u* est commune aux deux diagonales. 1°. Donnez une difference —2 à volonté à la lettre [(*u*)]. 2°. Donnez aux lettres (*p*) [(*u*)] (*b*) les differences à volontez —1. —2. 3. dont la somme soit égale à zero: donnez de même aux lettres [*r*] [(*u*)] [*z*] [*c*] [*f*] les differences —5. —2. 1. 4. 2. 3°. Donnez aussi aux autres lettres les differences —6. —4. —3. —7. 0. 7. 5. 6. ensorte que la somme de toutes les lettres soit aussi égale à zero. 4°. Ajoûtez à ces nombres le positif 8. qui soit plus grand que le negatif —7. vous aurez 7. 2. 3. 4. 5. &c. pour 2ds nombres.

Voyez les Quarrés, pp. 100. 101.

Si les 1res lettres ne sont point repetées, faites comme dans l'art. 18. & si plusieurs sont repetées comme (*A*) (*D*) (*G*) (*K*) (*N*) dans le quarré de 15. 1°. Donnez à ces lettres les differences à volonté —7λ. —4λ. —1λ. 7λ. 5λ. dont la somme soit égale à zero. 2°. Donnez aussi aux autres lettres des differences dont la somme soit aussi égale à zero. 3°. Faites λ égal au plus grand 2d nombre 15. vous aurez —105. —90. 75. —60. &c. Enfin en ajoûtant le positif 105. égal au plus grand negatif —105. vous aurez les 1ers nombres 0. 15. 30. 45. 60. &c. & faites ensuite le quarré en nombres comme dans l'art. 18.

21. Si le Quarré magique est construit par la méthode desordonnée (*art.* 17.) vous trouverez à peu près de même les differences des 2des lettres *p*, 0 : *q*, 1 : *r*, 2 : *s*, —2 : *t*, —1. & des 1res lettres *A*, —1λ. *B*, 0λ. *C*, 1λ : *D*, —2λ : *E*, 2λ.

V. le second Quarré art. 14.

22. Remarquez que si selon l'art. 14. l'on commence par remplir l'horizontale moyenne, & que l'on donne les mêmes differences aux lettres également distantes du centre, le Quarré magique en nombres aura pour proprieté que la somme des nombres qui sont dans deux cellules également distantes du centre, & qui sont rangez dans une ligne qui passe par le centre, est toûjours double du nombre qui est au centre.

23. De plus dans tout Quarré magique l'on pourra toûjours échanger une bande contre une autre parallele, si la somme des nombres qui sont dans les 2. cellules de la 1re diagonale est égale à la somme des deux nombres qui doivent s'y placer, & si la même chose arrive dans la 2de diagonale; d'où il arrive que dans certains cas plusieurs bandes peuvent être échangées, ce que l'on appercevra plus aisément, si au lieu des nombres le Quarré magique est formé avec les differences.

IV. *Définitions des Quarrés magiques par lettres analogues.*

La seconde maniere générale de construire des Quarrés magiques, est par les lettres analogues qui conviennent également à la construction des Quarrés pairs & des Quarrés impairs.

24. Deux lettres sont *analogues* lorsqu'étant semblables l'une est minuscule & l'autre majuscule, comme a A & p P, ensorte que leurs valeurs en nombres ayent la même difference l'une negative & l'autre positive: par exemple $a = m - 2\lambda$, $A = m + 2\lambda$, de même $p = n - 1$, $P = n + 1$. de sorte que la somme de deux 1res lettres analogues est toûjours égale à $2m$, & la somme de deux 2des lettres analogues est toûjours égale à $2n$, & par conséquent la somme de deux 1res lettres analogues est toûjours égale à la somme de deux autres 1res lettres analogues; ainsi $a + A = b + B = 2m$, de même deux 2des lettres analogues sont

ſont égales à deux autres 2des lettres analogues, ainſi $p+P=r+R=2n$.

25. Les *Quarrés impairs* outre les analogues, ont les moyennes M, n, dont les differences ſont o.

Les differences des lettres ſont ou des nombres ordonnez en progreſſion continuë comme 1. 2. 3. 4. 5. &c. ou ils ſont des nombres deſordonnez 1. 2. 5. 7. 11. &c.

Les *Quarrés pairement impairs* ont les minuſcules & par conſéquent les majuſcules en nombre pair, comme dans le quarré de 9. *Voyez l'art.* 3. 7. & 8.

1res lettres	a	b	c	d	M	D	C	B	A
moyennes	m	m	m	m	m	m	m	m	m
& differences	-4λ	-3λ	-2λ	-1λ	0	1λ	2λ	3λ	4λ
diff. en nombres	-36	-27	-18	-9	0	9	18	27	36
1ers nombres	0	9	18	27	36	45	54	63	72

2des lettres	p	q	r	$ſ$	n	S	R	Q	P
moyennes	n	n	n	n	n	n	n	n	n
& differences	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2ds nombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Pour avoir les 2ds nombres, faites $n-4=1$; donc $n=5$, $P=9$, &c.

Pour avoir les 1res nombres, faites $\lambda=P$: vous aurez les differences en nombres $-36. -27$ &c. enſuite faites $m-36=0$, donc M ou $m=36$ & $a=0$ &c.

Les *Quarrés impairement impairs* ont les minuſcules en nombre impair comme dans le quarré de 7.

1res lettres	a	b	c	M	C	B	A
moyennes	m	m	m	m	m	m	m
differences	-5λ	-2λ	-1λ	0	1λ	2λ	5λ
& 2des differences	-2	-1	-1	0	1	1	2
differences totales	-47	-19	-10	0	10	19	47
1ers nombres	0	28	37	47	57	66	94

2des *lettres*	*p*	*q*	*r*	*n*	*R*	*Q*	*P*
{ *moyennes*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*
{ *& differences*	-4	-3	-1	0	1	3	4
2^{ds} *nombres*	1	2	4	5	6	8	9

26. Les *Quarrés pairs* n'ont point les lettres moyennes *M* & *n*, & les differences ſont des nombres impairs ou ordonnez, comme 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. ou deſordonnez comme 1. 5. 11. 13. 21. 45. &c.

Les *Quarrés pairement pairs* ont les minuſcules en nombre pair. *Voyez l'art. 3.*

1res *lettres*	*a*	*b*	*c*	*d*	*D*	*C*	*B*	*A*
{ *moyennes*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*
{ *& differences*	-7λ	-5λ	-3λ	-1λ	1λ	3λ	5λ	7λ
diff. en nombres	-28	-20	-12	-4	4	12	20	28
1ers *nombres*	0	8	16	24	32	40	48	56

2des *lettres*	*p*	*q*	*r*	*ſ*	*S*	*R*	*Q*	*P*
{ *moyennes*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*
{ *& differences*	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7
faux nombres	2	4	6	8	10	12	14	16
2^{ds} *nombres*	1	2	3	4	5	6	7	8

* *V. art. 7.*

Pour avoir les faux nombres *, faites $n - 7 = 2$: donc $n = 9$. Enſuite vous aurez les faux nombres dont les moitiez forment les 2^{ds} nombres 1. 2. 3. &c.

Pour avoir les 1^{rs} nombres, faites $\lambda = \frac{1}{2}P = 4$, vous aurez les differences en nombres : enfin faites $m - 7\lambda$ ou $m - 28 = 0$. Vous aurez $m = 28$, d'où vous tirerez la valeur des 1^{rs} nombres, 0. 8. 16. 24. &c.

Les *Quarrez impairement pairs* ont les lettres minuſcules en nombre impair comme dans le quarré de 6. *a b c C B A* : *p q r R Q P*.

27. Un Quarré magique eſt *par analogie* lorſque dans chaque bande horizontale, verticale & diagonale chaque lettre a ſon analogue, ou chaque difference poſitive

a son égale négative : dans les Quarrés impairs chaque bande horizontale & verticale doit avoir une fois les moyennes *M* & *n*, & chaque diagonale les doit avoir une fois ou en nombre impair.

28. Un quarré magique par analogie est par bandes continuës ou *conjuguées* lorsque la même lettre minuscule & majuscule, ou la même difference négative & positive remplit seule deux bandes que j'appelle conjuguées.

Dans les quarrés impairs les cellules des bandes moyennes servent de cellules conjuguées aux lettres qui ont leur place occupée par une lettre moyenne, & elles servent de cellules directes pour les lettres qui remplissent la bande où elles se trouvent.

Voyez les Quarrez suivans.

On trouve horizontalement les bandes moyennes conjuguées des 1res lettres, & verticalement celles des 2des lettres.

Un Quarré est *par bandes interrompuës* lorsque la même lettre ou la même difference est en plus de deux bandes.

29. Un Quarré magique par bandes conjuguées est *par bandes correspondantes* *, lorsque les bandes conjuguées sont également distantes du milieu ou des extremitez. Ce Quarré est *par bandes non correspondantes*, lorsque les bandes conjuguées n'en sont pas également distantes ; enfin ce Quarré est *par bandes mixtes*, lorsque les unes sont correspondantes & les autres ne le sont pas.

* art. 1.

Dans chaque bande il y aura aussi des *cellules correspondantes* & *non-correspondantes*.

30. Dans les cellules de deux bandes conjuguées d'une lettre, j'appelle *lettres conjuguées* les deux lettres qui sont l'une dans la cellule d'une bande, & l'autre dans la cellule de l'autre bande conjuguée qui est vis-à-vis la premiere & qui ont même 1re & 2de lettre. Ainsi deux 1res lettres conjuguées sont posées verticalement, & deux 2des lettres conjuguées sont horizontales.

J'appelle *lettres directes*, les deux lettres qui sont dans deux cellules de l'une des bandes conjuguées d'une lettre & qui sont accompagnées d'une même lettre. Ainsi deux

1[res] lettres directes sont horizontales, & deux 2[des] lettres directes sont verticales.

J'appelle enfin lettres opposées, celles qui n'étant point directes ni conjuguées sont accompagnées d'une même lettre : elles sont ordinairement aux angles opposés d'un quadrangle.

31. Un Quarré est *par reciprocation*, lorsque dans une bande horizontale, verticale ou diagonale il y a des lettres sans analogues, en la place desquelles il y en a d'autres que j'appelle *reciproques*, dont la somme est égale à la somme des analogues dont elles occupent la place, ou plus simplement lorsque la somme des differences des lettres qui sont sans analogues sont égales à zero.

32. Un Quarré est par *excedans & défaillans*, lorsque dans une bande la somme des 1[res] lettres étant plus grande que *rm* *, en même tems la somme des 2[des] lettres est plus petite que *rn* de la même quantité ; en sorte que la somme de tous les nombres de cette bande, soit toûjours égale à *rm*+*rn*, ou bien reciproquement lorsque la somme des 1[res] lettres est plus petite, & celle des 2[des] lettres est plus grande de la même quantité.

* *V. les art.* 3. 7. 8.

33. Un Quarré magique est avec *des lettres étrangeres*; lorsqu'ayant d'abord pris autant de 1[res] & de 2[des] lettres qu'il en faut pour construire ce Quarré & que j'appelle *naturelles*, l'on en ajoûte d'autres qu'on met dans la place de quelques-unes des lettres naturelles, comme si pour faire un Quarré de 8 au lieu des seules lettres *a b c d D C B A* on y ajoûte *e E*, ces deux lettres seront regardées comme étrangeres.

34. *Un Quadrangle* sont quatre cellules qui n'ont qu'une même 1[re] lettre & une même 2[de] lettre avec leurs analogues combinez de toutes les manieres differentes comme *ap*, *aP*, *Ap*, *AP*.

Dans un Quadrangle formé par quatre bandes conjuguées, il y a des lettres conjuguées, des lettres directes, & des lettres opposées par les angles. *Voyez l'art.* 30.

35. Dans les Quarrés par bandes conjuguées nous nous

servirons d'indices qui seront les nombres ordonnez 1. 2. 3. 4. 5. &c. negatifs & positifs : & dans les impairs on ajoûtera o. *Voyez les quarrés de l'art.* 47.

V. *Maximes pour la construction des Quarrés magiques par bandes conjuguées.*

36. Pour prouver qu'un Quarré par bandes conjuguées est magique, il faut démontrer que dans chaque bande horizontale, verticale & diagonale, chaque lettre a son analogue, & que dans les impairs les moyennes *M* & *n* sont une fois dans les bandes horizontales & verticales, & en nombre impair dans les diagonales ; de plus qu'aucune quantité n'est point repetée deux fois, c'est-à-dire que dans deux cellules deux homologues ne sont point accompagnez de deux autres homologues.

37. Pour changer un Quarré magique par bandes conjuguées en nombres, il faut attribuer aux lettres des valeurs en nombres selon les art. 25. & 26. rangeant ces valeurs en nombres sous les lettres dans tel ordre qu'on voudra, pourvû que la somme des deux analogues soit toûjours égale à $2m$ ou à $2n$; ensuite l'on changera les lettres du Quarré magique en nombres comme dans l'article 18.

Mais pour construire un Quarré magique en lettres par bandes conjuguées, il faut avoir present les maximes suivantes, qu'il faut observer aussi-tôt que les occasions se presentent.

38. Aussi-tôt qu'on met une lettre dans une cellule, il faut mettre son analogue conjuguée dans la cellule conjuguée.

V. art. 28. & 30.

Dans les impairs si la place d'une lettre conjuguée est occupée par une lettre moyenne, il faut mettre cette lettre conjuguée dans la cellule moyenne conjuguée.

39. Dans une diagonale aussi-tôt qu'on a mis une lettre, il faut mettre dans la même diagonale son analogue qui doit être dans l'autre bande conjuguée de cette lettre ;

ce qui produit deux homologues dans chaque bande conjuguée par l'art. 38.

Dans les impairs ſi la place de cette analogue eſt occupée par une moyenne, il la faut placer au centre.

40 Dans les impairs auſſi-tôt qu'on a mis une lettre dans une bande moyenne, il faut mettre ſon analogue dans la même bande vis-à-vis la moyenne de la bande conjuguée de cette lettre, & enſuite il faut mettre la conjuguée analogue de cette derniere lettre par l'article 38.

41. Auſſi-tôt qu'une bande a la moitié de ſes cellules remplies d'une minuſcule, il faut remplir les autres cellules de ſa majuſcule, & réciproquement.

42. Dans un quadrangle qui a deux lettres oppoſées homologues, auſſi-tôt qu'on a accompagné l'une de ces homologues d'une lettre, il faut mettre ſon analogue avec l'autre (autrement l'on auroit le même nombre) & enſuite il faut mettre leurs conjuguées analogues ſelon l'article 38.

43. Dans un quadrangle qui a deux directes analogues, auſſi-tôt qu'on accompagne l'une d'une lettre, il faut accompagner ſa conjuguée de l'homologue de cette lettre, autrement les oppoſez ſeroient égaux, & enſuite il faut mettre par analogie les conjuguées de ces nouvelles lettres par l'art. 38.

44. Dans les Quarrés impairs on peut placer differemment les moyennes *M* & *n*; mais de quelques manieres qu'on les place, il doit y avoir une fois *M n* dans une cellule; de plus il ne doit y avoir qu'un *M* & un *n* dans chaque horizontale & dans chaque verticale, & en nombre impair dans chaque diagonale.

1°. Dans un Quarré par bandes correſpondantes mettez *Mn* au centre, & *M*, *M*, *n*, *n*, dans les 4. cellules d'un quadrangle de chaque lettre.

2°. Si l'on ne met point de moyenne au centre, il la faut mettre dans chaque diagonale en la place d'une même lettre dont les bandes conjuguées ne ſont pas correſpondantes.

3°. Hors les diagonales l'on peut mettre les moyennes dans les angles opposez d'un quadrangle.

4°. Dans les grands Quarrés on peut les mettre dans tel ordre qu'on voudra selon l'art. 44.

45. Aussi-tôt qu'on accompagne une moyenne d'une lettre, il faut accompagner l'autre moyenne conjuguée de son analogue, & mettre dans la cellule moyenne sa directe homologue : (si les moyennes *M*, *M*, *n*, *n*, sont dans des cellules opposées d'un quadrangle, cette directe moyenne peut être analogue) ; il faut enfin mettre les conjuguées analogues de toutes ces lettres accompagnantes, ce qui produit dans chaque bande conjuguée 2, 3 ou 4 homologues.

46. Après avoir satisfait aux conditions précédentes, si l'on pose une nouvelle lettre qui doit procurer des homologues dans sa bande, il faut ordinairement la mettre analogue de celle qui est la plus repetée dans cette bande.

VI. *Construction générale des Quarrés magiques par bandes conjuguées.*

47. Un Quarré étant fait avec ses cellules vuides, *mettez les indices au-dessus & à côté du Quarré*, selon l'art. 35. *Aux indices joignez les lettres*, ayant chacune leur analogue, mettant les 2des lettres au-dessus du Quarré, & les 1res lettres à côté dans tel ordre qu'on voudra, chaque lettre & son analogue marqueront leurs bandes conjuguées.

Si chaque lettre & son analogue ont un même indice, le Quarré sera par bandes correspondantes, autrement il sera par bandes non correspondantes ou mixtes, qui ont des varietez differentes pour la pratique, selon que deux lettres analogues ont mêmes ou differens indices, soit que les 1res lettres ayent les mêmes indices que les 2des lettres, ou dans le même ordre, ou dans different ordre, soit qu'ils ayent des indices differens.

Les Quarrés les plus faciles à construire sont les Quarrés

	p -5	q -4	r -3	R -2	ſ -1	0	S 1	t 2	Q 3	T 4	P 5
a -5	M p	Ä Q	ï R	ä r	A ſ	a P	A t	á t	A q	A' T	a. n
b -4	B̈ p	b q	M Ṙ	Ḃ n	b' R	Ḃ ṙ	B' ſ	b' T.	b̈ Q	b t.	B̈ P
c -3	c' p	C̈ Q	c r	C. R	M Ṡ	ċ ſ	ċ t	c' t	C̈ q.	C T	C' P
d -2	d̈ p	D̈ q	ï r	d̈ R	D. ſ	D. t.	d S	D. T.	M Q	D n	d̈ P
e -1	é P	M q	E. r	E' R	e ſ	e Q	E. S	e T	e n	E' t	E' p
0	a. p	e q	B Ṙ	ḃ ṙ	ċ S	M n	C ſ	E T.	D Q	d. t.	A. P
D 1	D̈ P	d̈ q	D̈ R	D̈ r	d. ſ	d. T.	D S	d. n	d̈ Q	M t	D̈ p
C 2	C' P	ë Q	C r.	c. R.	C̈ n	Ċ S	M ſ	C t	c̈. q	c' T	c' p
E 3	E' P	E n	c̈. r.	ë R.	E ſ.	E q	é. S.	M T	E Q	é t	é p
B 4	b̈ P	B Q.	ḃ n	M ṙ	B̈' S	ḃ R	b̈' ſ	B̈ t	B̈ q.	B T	ḃ p
A 5	A. n	ä Q	Ä R	Ä r	ä S	A p	ä ſ	A' t	ä q	à T	M P

	p -5	q -4	r -3	R -2	ſ -1	S 1	t 2	Q 3	T 4	P 5
a -5	a p	á q	Ä R	Ä r	Ä S	A ſ	ä T	A' Q	ä t	a P
b -4	B̈ p	b q	b' R	B' r	B̈ S	B̈ ſ	b̈ T	b̈ Q	b̈ t.	B̈ P
c -3	c̈ p	C̈ Q.	c' r	C' R	C̈ S	C̈ ſ	c̈ T	C. q.	c̈ t	c̈ P
d -2	d̈ p	D̈ Q	D' r	d R	D. ſ	d S	D. T.	D̈ q	d' t.	d̈ P
e -1	é P	E' q	E. r	é R	e ſ	E. S	E' t	é Q	ė T	E' p
D 1	D̈ P	d̈ Q	d' R	D r	d'. ſ	D S	d'. T	d̈ q	D' t	D̈ p
C 2	C̈ P	c̈ Q	C r.	c'. R̈.	c̈ ſ	c̈ S	C t	c. q	C̈ T	C̈ p
E 3	E' P	é q	ė. r.	E' R.	E ſ	é. S	é t	E Q	E' T	é p
B 4	b̈ P	B Q	B' R	b' r	b̈ S	b̈ ſ	B̈ t	B̈ q.	B T	b̈ p
A 5	A p	A' q	ä R	ä r	ä S	ä ſ	Ä t	á Q	Ä T	A P

par bandes correſpondantes, & les plus difficiles ſont les Quarrés dont les 1res & 2des lettres ont les mêmes indices dans differens ordres.

48. Aux Quarrés impairs placez les moyennes *M*, *n*. 1°. Si les bandes ſont correſpondantes, mettez *M n* au centre

centre, & *M*, *M*, *n*, *n* aux 4 cellules d'un quadrangle de chaque lettre. 2°. En general obſervez l'art. 44.

49. *Garniſſez la 1re diagonale & ſa ſuite.* Pour garnir la 1re diagonale, il faut mettre dans chaque cellule les deux lettres des indices qui lui répondent, ſa ſuite eſt l'art. 38.

Si le Quarré eſt impair, il faut garnir les places qui ne ſont pas occupées par les moyennes; & ſi une moyenne occupe la place d'une conjuguée analogue, il faut mettre cette analogue dans ſa cellule moyenne conjuguée.*

* *art. 28.*

Nous marquons dans les Quarrés précédens & dans le ſuivant les lettres de la 1re conjuguée diagonale & leur ſuite par des lettres Romaines.

50. *Garniſſez la 2de diagonale de 1res lettres & leur ſuite.*

Si deux 1res lettres analogues ont mêmes indices, leurs conjuguées auront garni deux cellules de la 2de diagonale, & dans les impairs il pourra y avoir des *M* dans d'autres cellules; mais dans les cellules vuides mettez les 1res lettres par analogie à celles de la 1re diagonale ou à celles des indices: on peut les mettre par homologie dans les grands Quarrés, la ſuite eſt auſſi l'art. 38. & dans le Quarré de 4. & de 5. l'art. 41.

51. *Garniſſez la 2de diagonale des 2des lettres & leur ſuite.*

Si les 2des lettres analogues ont mêmes indices, il y aura des cellules garnies de 2des lettres dans la 2de diagonale, & dans les Quarrés impairs il pourra y avoir des *n* dans d'autres cellules.

Si deux 1res & deux 2des lettres ont les mêmes indices dans un ordre different, c'eſt-à-dire, les unes le même poſitif & negatif, & les autres tous deux negatifs ou tous deux poſitifs, il faut prendre garde à l'art. 42. Dans les autres cellules faites comme dans l'art. 50. la ſuite ſont les art. 38. 42. & 43.

Nous marquons les lettres de la 2de diagonale & leur ſuite par des lettres Italiques avec un point au côté droit.

52. *Accompagnez les moyennes M, n & leur ſuite*, ſelon l'art. 45. 46. 42 & 43. Le quarré ſera plus aiſé, ſi l'on met *M*, *M*, *n*, *n*, dans les quatre cellules des quadrangles; &

encore plus ſi on les met tous dans les deux diagonales. Ces lettres ſeront marquées par un point mis deſſus.

53. Dans les quarrés impairement pairs, & impairement impairs, *garniſſez au moins une fois par homologie chaque couple de verticales conjuguées des deux 1res lettres directes*, c'eſt afin d'être aſſûré de pouvoir mettre deux 2des lettres directes par analogie : on s'en peut diſpenſer dans les verticales où *M M n n* occupent les cellules oppoſées d'un quadrangle, & lorſque les directes moyennes ſont analogues avec celles qui accompagnent les moyennes *M* ou *n* ſelon l'art. 45.

Nous marquerons les 1res lettres directes homologues chacune de deux points mis deſſus.

54. *Garniſſez les 1res bandes horizontales des 1res lettres & leur ſuite* ; & pour cela achevez de mettre dans chaque bande la même lettre majuſcule & minuſcule, en ſorte qu'il y en ait autant de l'une que de l'autre.

Cette diſpoſition de minuſcule & de majuſcule eſt telle que les directes ſont par homologie que nous marquerons de deux points, ou par analogie que nous marquerons d'un accent. Dans les pairement pairs ou impairement pairs, on peut mettre toutes les directes par homologie. La ſuite eſt l'art. 38. pour garnir les 2des bandes conjuguées horizontales.

55. *Garniſſez de 2des lettres les quadrangles dont les directes ſont analogues ſelon l'art.* 43. & pour cela il faut parcourir par ordre les lettres accentuées * de chaque verticale conjuguée.

* *art.* 54.

56. *Garniſſez les 2des lettres les 1res verticales & leur ſuite.* Faites comme dans l'art. 54. le quarré magique ſera parfait en lettres.

57. On conſtruira le quarré magique en nombres. 1°. En appliquant aux lettres dans tel ordre que l'on voudra, les nombres trouvez par les art. 25 & 26. enſorte que la ſomme des nombres appliqués à deux 1res lettres analogues, ſoit égale à $2m$, & la ſomme des nombres appliqués à deux 2des lettres analogues ſoit égale à $2n$. 2°. Dans chaque cel-

lule au lieu des deux lettres prenez la ſomme des nombres qui marquent leur valeur comme dans l'art. 18.

Il eſt évident que les petits quarrés ne peuvent pas être conſtruits avec autant de varietez que les grands ; ainſi il faut les faire à bandes correſpondantes, & avec précaution à bandes non correſpondantes, ſur tout les quarrez impairs.

VII. *Conſtructions particulieres des Quarrés par bandes conjuguées.* *

* *art.* 28.

58. *Conſtruction d'un Quarré pairement pair par bandes correſpondantes.* *

* *art.* 2.

	p -4	q -3	r -2	ſ -1	S 1	R 2	Q 3	P 4
a -4	a p	ä q	Ä R	Ä S	Ä ſ	Ä r	ä Q	a P
b -3	B̈ p	b q	B̈ R	b̈ ſ	b̈ S	B̈ r	b Q	B̈ P
c -2	C' P	C' Q	c r	C̈ ſ	C̈ S	c R	c' q	c' p
d -1	D̈ p	d' Q	d' r	d ſ	d S	D' R	D' q	D̈ P
D 1	d̈ P	D' Q	D' r	D ſ	D S	d' R	d' q	d̈ p
C 2	c' P	c' Q	C r	c̈ S	c̈ ſ	C R	C' q	C' p
B 3	b̈ P	B q	b̈ R	B̈ S	B̈ ſ	b̈ r	B Q	b̈ p
A 4	A p	Ä q	ä R	ä S	ä ſ	ä r	Ä Q	A P

1°. Mettez les Indices & les lettres des Indices *art.* 47. Il faut que les lettres analogues ayent les mêmes Indices.

2°. Dans la 1re diagonale mettez les lettres des Indices qui leur répondent, & enſuite leurs analogues conjuguées * qui rempliront la 2e diagonale.

* *art.* 38.

3°. Rempliſſez les bandes horizontales des 1res lettres. Il faut que dans chaque bande il y ait autant de majuſcules que de minuſcules ; mais on peut les diſpoſer enſorte que toutes les directes ſoient par homologie, ou les unes par homologie, & les autres par analogie.

Après avoir rempli les 1res bandes horizontales il faut remplir leurs conjuguées par analogie ſelon l'art. 38.

4°. Examinez dans chaque verticale conjuguée ſi deux 1res lettres ſont par analogie, (nous les avons marqué avec des accens ;) & alors il faut accompagner leurs conju-

guées de deux 2des lettres par homologie.

5°. Achevez de remplir les verticales de 2des lettres, ensorte qu'il y en ait autant de majuscules que de minuscules.

59. *Construction des Quarrés magiques pairement pairs par bandes non correspondantes.*

Nous supposons qu'aucune lettre & son analogue ayent le même Indice, & que deux 2des lettres n'ayent pas les mêmes Indices que deux 1res lettres ; car dans ce cas nous renvoyons à la section VI. Il faut remarquer que les petits Quarrés ne sont pas susceptibles d'autant de varietez que les grands.

	p -4	*P* -3	*q* -2	*r* -1	*Q* 1	*R* 2	*ſ* 3	*S* 4
a -4	a p	*a* P	*a Q*	*AR*	a *q*	*A r*	*A S*	*A ſ*
b -3	*B* p	bP	*b Q*	*B r*	*B q*	b *R*	*b S*	*B ſ*
c -2	*CP*	*C p*	c q	*C R*	*c* Q	*Cr*	*c ſ*	c *S*
d -1	*d p*	*DP*	*d q*	d r	*DQ*	*D*R	d *ſ*	*D S*
A 1	A *p*	*AP*	*A* q	*a R*	AQ	*a r*	*a S*	*a ſ*
B 2	*b P*	B *p*	*B q*	*b* r	*b Q*	B R	*B S*	*b ſ*
D 3	*D p*	*d p*	*D Q*	D *r*	*d q*	*d R*	D ſ	*d* S
C 4	*c P*	*c p*	C *Q*	*c R*	C *q*	*c r*	C ſ	C S

1°. Placez les indices comme cy-dessus, & les lettres dans les circonstances précédentes.

2°. Remplissez la 1re diagonale des lettres des indices, & mettez leurs analogues conjuguées.

3°. Remplissez la 2de diagonale en mettant des lettres qui soient analogues à leurs directes de la 1re diagonale (on peut les mettre homologues dans les grands Quarrés) mettez ensuite les conjuguées analogues.

4°. Achevez comme dans l'art. 58.

60. *Construction des Quarrés pairement pairs par bandes mixtes.*

Suivez les regles de la construction générale Section VI.

61. *Construction des Quarrés impairement pairs par bandes conjuguées.*

Suivez les articles 58. 59. 60. en leur ajoûtant l'art. 53.

62. *Construction des Quarrés pairement impairs par bandes correspondantes.*

1°. Mettez les indices & leurs lettres ſelon l'art. 35. ou 47. ou 58.

2°. Mettez les moyennes *M*, *M*, *n*, *n*, dans les angles d'un quadrangle, enſorte que 1°. *M*, *M* auſſi bien que *n*, *n* ſoient dans les cellules oppoſées d'un même quadrangle. 2°. Qu'il y ait un *M* & un *n* dans chaque horizontale & dans chaque verticale, les diagonales peuvent avoir toutes ces moyennes ou en partie, mais le centre doit avoir *Mn*.

	P -2	*q* -1	*n* 0	*Q* 1	*P* 2
a -2	M p	*A q*	*a* P	*A Q*	*a* n
b -1	B P	b n	b *Q*	M *q*	B p
M 0	*a* p	B *Q*	M n	b *q*	*A* P
B 1	b P	M *Q*	B *q*	B n	b p
A 2	*A* n	*a q*	*A* p	*a Q*	M P

	p -2	*q* -1	*n* 0	*Q* 1	*P* 2
a -2	a p	MQ	A q	A n	a P
b -1	B n	b q	B P	b Q	M p
0	b P	AQ	M n	a q	B p
B 1	MP	B q	b p	B Q	b n
A 2	A p	a n	a Q	M q	A P

3°. Rempliſſez les cellules de la 1re diagonale, en mettant les lettres des indices dans les places qui ne ſont pas occupées par les moyennes; mettés enſuite leurs conjuguées analogues qui ſe trouveront placées dans la 2de diagonale, ou dans la bande moyenne ſi leur place eſt occupée dans la 2de diagonale par *M* ou par *n*.

4°. Rempliſſez la 2de diagonale des lettres qui y manquent, & mettez leurs conjuguées analogues comme cideſſus.

5°. Accompagnez de 2des lettres analogues les *M*, *M* des bandes conjuguées *, mettez enſuite leurs conjuguées par analogie & leurs moyennes par homologie : on le peut auſſi par l'analogie ; faites la même choſe aux moyennes *n*, *n*. Nous avons marqué les 1res & 2des lettres qui accompagnent *M*, *n*, & leur ſuite par un point.

* *art.* 45.

6°. Achevez le Quarré comme dans l'art. 58.

63. Si le Quarré eſt impairement impair, ajoûtez l'article 53.

64. Si le Quarré impair eſt par bandes non correſpondantes,

1°. Placez les indices comme dans l'article 59. & les moyennes comme dans l'article 62. alors la construction devient facile, & convient aux petits Quarrés impairs.

	p -2	q -1	0	P 1	Q 2
a -2	M p	a Q	A P	A n	a q
b -1	B P	o n	b q	B p	M Q
0	A p	B q	M n	a P	b Q
A 1	a n	A Q	a p	M P	A q
B 2	b P	M q	B Q	b p	B n

2°. Ou placez les indices selon l'art. 60. & les moyennes selon l'article 44. alors la construction demande une grande attention pour y appliquer les regles de la Section VI. & les maximes de la Section V. sur-tout dans les petits Quarrés où plusieurs cas sont impossibles.

VIII. *Construction des Quarrés magiques par lettres analogues & par bandes interrompuës.*

65. *Construction des Quarrés magiques impairs par diagonales, par indices & par la méthode mixte* avec les lettres analogues.*

* art. 13. 14. 16.

Au lieu des lettres générales de la Section II. mettez les analogues *M a A b B* & *n p P q Q*, & dans les articles 13, & 16. il faut mettre *M* & *n* dans les diagonales en la place des lettres repetées; ainsi au lieu du Quarré de l'article 14. vous aurez ce Quarré.

	0	1	2	3	4
0. 0	*a p*	*b P*	*M q*	*B Q*	*A n*
2. 3	*M Q*	*B n*	*A p*	*a P*	*b q*
4. 1	*A P*	*a q*	*b Q*	*M n*	*B p*
1. 4	*b n*	*M p*	*B P*	*A q*	*a Q*
3. 2	*B q*	*A Q*	*a n*	*b p*	*M P*

66. *Construction des Quarrés magiques par analogie & par bandes interrompuës.*

Il faut mettre, 1°. dans les deux diagonales telles lettres qu'il vous plaira par analogie.

2°. Il faut placer tellement la 1re lettre *a A*, qu'il y en ait autant dans tout le quarré qu'il y a de cellules dans deux bandes, dont une moitié soit majuscule, & l'autre minuscule, ensorte que dans chaque bande horizontale & verticale chaque *a A* ait son analogue : pour faciliter cet arran-

gement, il faut d'abord mettre un point pour *a* & deux points pour *A*, & quand l'arrangement eſt fait en la place de ces points il faut mettre *a*. *A*.

3°. Il faut mettre *pp PP* après quatre *aa A. A* ſelon l'art. 34. enſuite *qq QQ* & ainſi les autres en commençant par les 2des lettres qui ſont déja les plus repetées, il faut mettre ces 2des lettres avec ces précautions, 1°. qu'on les mette autant qu'on peut par analogie dans chaque horizontale & dans chaque verticale, & à meſure qu'on met une analogie dans une horizontale, mettez un point ſur les deux 2des lettres analogues, & un accent ſur les analogues dans chaque verticale.

4°. Il faut faire la même choſe aprés les autres 1res lettres en ſuivant les regles générales.

La brieveté de cet ouvrage ne permet pas d'entrer dans un long détail pour ces ſortes de Quarrés ni pour les ſuivans.

67. Les autres manieres de conſtruire un Quarré magique par analogie ſont les ſuivantes.

1°. *Par échange de bandes paralleles*, 1°. Il faut avoir un Quarré magique formé par quelqu'une des méthodes précedentes. 2°. Au lieu de mettre dans les cellules des lettres ou des nombres, il faut mettre leurs differences. 3°. Conſiderez dans deux bandes paralleles deux quadrangles ou quarrés de cellules dont celles des diagonales ſoient les cellules oppoſées: ſi la ſomme des differences des cellules oppoſées d'un quadrangle eſt égale à la ſomme des differences des deux autres cellules du même quadrangle, & que la même choſe arrive à l'autre quadrangle, alors les deux bandes paralleles peuvent être échangées comme dans l'art. 23.

2°. *Par échange de cellules ou de lettres*, 1°. Si deux cellules d'une bande ont les 4 lettres par analogie, elles peuvent être échangées contre deux autres cellules d'une autre bande parallele, mais dans les mêmes bandes perpendiculaires qui auront auſſi 4 lettres par analogie. 2°. Deux lettres directes analogues peuvent être échangées contre deux autres directes analogues dans les mê-

mes bandes perpendiculaires, pourvû que les lettres de l'autre espece soient les mêmes,

L'on peut varier les Quarrés par ces differens échanges.

3°. *Par lettres étrangeres*, 1°. En mettant 4. lettres étrangeres analogues à la place de 4. lettres naturelles qui sont analogues dans une bande ou dans deux bandes conjuguées, ce qui peut varier. On peut aussi faire ce Quarré par l'article *66*.

I X. *Construction des Quarrés Magiques par les autres manieres.*

* *art.* 31.

69. *Par Réciprocation* *. 1°. Ayez un Quarré Magique fait par analogie selon quelques-unes des Constructions précedentes ; mais au lieu de lettres, mettez leurs differences que nous supposons ordonnées : par exemple un Quarré de 8 par bandes correspondantes selon l'article 58. dont les premieres lettres directes soient homologues, & les 2des lettres directes soient la plûpart analogues.

-7λ -7	7λ 5	-7λ -3	7λ 1	7λ -1	-7λ 3	7λ -5	-7λ 7
λ 7	-5λ 5	5λ 3	-5λ -1	-5λ 1	5λ -3	-5λ -5	5λ -7
-3λ 7	3λ -5	-3λ -3	3λ 1	3λ -1	-3λ 3	3λ 5	-3λ -7
1λ 7	-1λ -5	1λ 3	-1λ -1	-1λ 1	1λ -3	-1λ 5	1λ -7
-1λ 7	1λ -5	-1λ 3	1λ -1	1λ 1	-1λ -3	1λ 5	-1λ -7
3λ -7	-3λ 5	3λ -3	-3λ 1	-3λ -1	3λ 3	-3λ -5	3λ 7
-5λ -7	5λ 5	-5λ -3	5λ 1	5λ -1	-5λ 3	5λ -5	-5λ 7
7λ -7	-7λ -5	7λ 3	-7λ -1	-7λ 1	7λ -3	7λ 5	7λ 7

2°. Choisissez deux cellules horizontales — 7λ + 3. & 7λ — 5, & deux autres correspondantes dans les mêmes bandes verticales, dans lesquelles la somme des differences des 1res lettres — 7λ. + 7λ qui se répondent horizontalement & verticalement, soit égale à zero, & celle des 2des lettres 3. — 3: — 5. + 5 qui se répondent verticalement, soit

ſoit auſſi égale à zero ; & dont leurs ſommes priſes horizontalement $3 - 5 = -2$ & $-3 + 5 = 2$ ſoient égales entr'elles, mais l'une poſitive & l'autre négative.

3°. Choiſiſſez 4 ſemblables cellules comme $3\lambda + 5$, $-3\lambda - 7$ & $-3\lambda - 5$, $3\lambda + 7$, dont les differences ſoient dans les mêmes circonſtances ; mais il ne faut point toucher aux cellules des diagonales.

4°. Echangez les 4 premieres cellules contre les 4 dernieres, le Quarré reſtera magique, & les 4 bandes horizontales auront des lettres reciproques ou ſans analogues.

On peut faire de ſemblables échanges qui peuvent varier indéfiniment, ſoit 1°. En conſtruiſant le même Quarré par bandes non correſpondantes, ou par bandes mixtes ; & ſi les deux ſommes des 2des lettres ſont égales à zero de tout ſens, on conſtruira un Quarré par bandes interrompuës, comme nous avons dit dans l'art. 66. 2°. On peut de même prendre deux cellules dans des bandes verticales. 3°. Au lieu de prendre dans chaque horizontale deux cellules, on en peut prendre 3 ou davantage avec les mêmes conditions. 4°. Après avoir fait un échange, on en peut faire par ordre pluſieurs autres ſemblables. 5°. Au lieu de ſuppoſer que les ſommes des differences des 1res lettres ſont égales à zero, on les peut prendre égales entr'elles ; mais l'une poſitive & l'autre negative, & faire de même à la ſomme des differences des 2des lettres.

L'on peut conſtruire ces Quarrez en mettant des réciproques dans les diagonales.

70. *Par excedans & défaillans* *. Il faut rendre dans une bande l'excès des 1res lettres égal au défaut des 2des lettres, ou réciproquement le défaut des 1res lettres égal à l'excès des 2des lettres, afin que la ſomme des 1res & des 2des lettres de cette bande ſoit égale à $rm + rn$. Il ſuffit d'examiner la maniere de rendre l'excès des 1res lettres égal au défaut des 2des lettres, parceque l'on a le réciproque en changeant les ſignes des differences ; de plus

* V. art. 35.

* V. art. 25. & 26.

nous supposerons que les differences sont ordonnées *.

1°. L'excés des 1[res] lettres est au plus $\frac{1}{4} r\lambda$ dans les Quarrés impairs, & $\frac{1}{2} r\lambda$ dans les Quarrés pairs, & alors $\frac{1}{2} r$ doit être un nombre pair.

2°. Pour avoir l'excés des 1[res] lettres, prenez une ou plusieurs differences dont la somme soit égale à cet excés : par exemple dans les Quarrés impairs si l'excés est 1λ, prenez 1λ ou $2\lambda - 1\lambda$ ou $3\lambda - 2\lambda$ &c. si l'excés est 2λ, prenez 2λ ou $3\lambda - 1\lambda$ &c. Dans les Quarrés pairs les differences que l'on prend doivent être paires; ainsi si l'excés est 2λ, prenez 2λ ou $4\lambda - 2\lambda$ ou $6\lambda - 4\lambda$: si l'excés est 4λ, prenez 4λ ou $6\lambda - 2\lambda$ ou $8\lambda - 4\lambda$: si l'excés est 6λ, prenez 6λ ou $8\lambda - 2\lambda$ ou $10\lambda - 4\lambda$ ou $6\lambda + 4\lambda - 2\lambda - 2\lambda$.

3°. Pour avoir le défaut des 2[des] lettres, prenez un nombre négatif égal à l'excés des 1[res] lettres, partagez ce nombre en plusieurs parties; ainsi dans le Quarré de 8 si l'on a pris $2\lambda = 8$, il faut partager -8 en $-7 - 1$ ou $-6 - 2$ ou en $-5 - 2 - 1$ &c.

4°. Pour avoir une bande par excedans & défaillans, prenez des differences des 1[res] lettres & 2[des] lettres, dont les sommes soient égales aux excés des 1[res] lettres & aux défauts des 2[des] lettres, ajoûtez ces differences à celles qui sont dans cette bande, vous aurez de nouvelles differences qui rendront cette bande par excedans & défaillans égale à $rm + rn$.

5°. Si l'on veut changer seulement les signes des differences d'une bande, partagez les excés & les défauts en nombres pairs qui soient doubles des differences qui sont dans cette bande, ajoûtez ces differences doubles aux simples qui ont un signe contraire, vous aurez les mêmes differences qui auront seulement changé de signes.

6°. Ayant une bande par excedans & défaillans, l'on peut remplir une bande parallele des analogues des lettres de la précédente bande, & l'on aura une seconde bande par défaillans & excedans.

7°. Le changement que l'on a fait pour rendre une

bande & ſa conjuguée par excedans & défaillans, a introduit de nouvelles lettres, & a ôté les anciennes qu'il faut remettre en la place de ces nouvelles, en rendant d'autres bandes par analogie, par réciprocation ou par excedans & défaillans, ce qui demande ici un trop grand détail.

71. *Par la méthode mixte des lettres analogues*, en mettant tant les lettres réciproques avec les excedans & défaillans; mais il y aura toûjours des bandes dans leſquelles des lettres auront leurs analogues.

72. *Par Quarré magique composé.* La racine de ce Quarré doit être le produit de pluſieurs nombres plus grands que 2, comme $3 \times 3 = 9$. $3 \times 4 = 12$. $3 \times 35 = 105$. ou $7 \times 15 = 105$. &c. Propoſons-nous le Quarré de $15 = 3 \times 5$. dont les lettres ſont *ABC. DEF. GHI. KLM. NOP. pqr. ſtu. xyz. abc. def.*

1°. Je diviſe ces lettres de 3 en 3, (on peut le faire de 5 en 5) & je prens les 1[res] lettres après les diviſions *ADGKN. pſxad.* que j'appelle *les Indicantes* des petits Quarrés.

2°. Je fais un Quarré magique de 5 avec ces lettres indicantes, j'aurai *un Quarré indicant.*

3°. Je diviſe le Quarré de 15 en 25 petits Quarrés, en marquant plus fort les lignes verticales & horizontales de 3 en 3. Ce grand Quarré ſera diviſé en 25. petits Quarrés qui répondront aux 25. cellules du Quarré indicant dont les cellules contiendront les lettres indicantes de chaque petit Quarré qui lui répond dans le grand.

4°. Prenez les lettres indicantes *Ap* de la 1[re] cellule du Quarré indicant, elles marquent qu'il faut prendre les lettres *ABC, pqr* pour faire le 1[er] petit Quarré; de même *Dſ* marqueront qu'il faut prendre *DEF, ſtu* pour le 2[d] petit Quarré, & ainſi des autres.

Le Quarré indicant & les petits Quarrés ſe conſtruiſent ſelon les méthodes précedentes.

5°, Pour mettre en nombre un Quarré magique compoſé en lettres, il faut avoir égard à la Section III. & aux articles 25, & 26.

X. *Des Enceintes, des Croix & des Chaſſis magiques.*

Voyez les Quarrés des art. 66. & 77.

73. *Une Enceinte magique* eſt une ou pluſieurs bandes qui entourent un Quarré magique, enſorte que l'enceinte avec le quarré interieur forment un Quarré total qui eſt auſſi magique.

La Croix eſt un aſſemblage de deux ou de pluſieurs bandes verticales, & d'autant de bandes horizontales ramaſſées vers le milieu d'un Quarré magique qu'elles ſeparent en 4 quartiers, enſorte que la Croix avec ces 4. quartiers forment encore un Quarré magique.

Le Chaſſis eſt auſſi un aſſemblage de deux ou de pluſieurs bandes verticales & d'autant de bandes horizontales, mais qui ſont ſeparez les unes des autres, & dont les verticales coupent les horizontales dans les diagonales, enſorte que le Quarré magique qui ſe trouve ſeparé par ce Chaſſis, forme avec lui un Quarré total qui eſt encore magique.

74. Une Enceinte peut être formée par une ſeule bande de chaque côté du quarré renfermé, ou par pluſieurs bandes. Nous les appellerons Enceinte à ſimple bande, à double, à triple bande, &c.

Un Quarré magique peut être enfermé par une ſeule enceinte magique ou par pluſieurs, qui ſont telles qu'en ôtant une ou pluſieurs enceintes les plus exterieures, le quarré reſtant eſt toûjours magique, chacunes de ces Enceintes peuvent être à ſimple bande, à double bande, &c.

Une Enceinte a des bandes horizontales & verticales qui ſont entieres, & des bandes horizontales, verticales & diagonales qui ſont interrompuës.

Le quarré renfermé dans une Enceinte peut être formé par ſes lettres naturelles ſans lettres étrangeres, que nous appellerons *lettres anciennes*; mais il en faut d'autres pour former l'enceinte, que nous appellerons *lettres nouvelles*;

& en ce cas l'enceinte contient autant de 1res & de 2des lettres nouvelles, qu'il y a de bandes horizontales au haut du Chassis ; de plus le nombre de chaque lettre nouvelle avec ses analogues est égal au nombre des cellules de deux bandes entieres, & le nombre de chaque lettre ancienne avec ses analogues qui doivent servir à former l'enceinte, est égal au nombre des cellules de deux bandes interrompuës ; enfin chaque ancienne lettre doit être accompagnée d'une nouvelle.

Si l'on se sert des lettres nouvelles comme des lettres étrangeres pour former le quarré renfermé *, il faut les remplacer dans l'enceinte par les lettres anciennes dont elles occupent la place.

* art. 67.

La somme des differences des lettres qui remplissent une bande entiere ou une bande interrompuë d'une enceinte, doit être égale à zero ; c'est pourquoi dans une enceinte à bande unique, les cellules opposées d'une bande interrompuë ont leurs lettres analogues.

On regle les lettres de chaque bande entiere & de chaque bande interrompuë comme celles des deux Quarrés par lettres analogues, qui auroient leurs racines égales au nombre des cellules d'une bande entiere & d'une bande interrompuë. La petite racine est toûjours paire, & elle est pairement ou impairement paire, si le nombre des bandes de chaque côté du Chassis est pair ou impair. A l'égard de la grande racine elle est paire ou impaire, si le quarré renfermé est pair ou impair ; c'est pourquoi on reglera la construction d'un Chassis par celle des deux Quarrés qui auront pour racines les nombres des cellules d'une bande entiere & d'une bande interrompuë du Chassis, & on construira plusieurs Chassis autour d'un Quarré, en commençant par les Chassis les plus interieurs, & finissant par les plus exterieurs, & en considerant les Chassis déja construits avec le Quarré renfermé, comme s'ils ne formoient ensemble qu'un seul Quarré.

75. Les Enceintes peuvent être construits en général par analogie, par réciprocation, & par excedans & défaillans

Il y en a qui ne peuvent pas être conſtruits par analogie, comme les enceintes à bande unique,& dont la grande racine eſt impairement paire; d'autres par excedans & defaillans, comme l'enceinte à bande unique dont la grande racine eſt 5.

A l'égard des bandes interrompuës, les horizontales peuvent s'échanger les unes contre les autres auſſi bien que les verticales, parce qu'elles n'ont rien à ménager du côté des diagonales.

76. Dans une Enceinte à bande unique il ne faut avoir égard qu'à la bande horizontale ſuperieure, & qu'à la premiere verticale qui forment enſemble une équerre, laquelle a la cellule *angulaire* (*cq*) commune aux deux bandes, & dont les lettres ſont par conſéquent homologues pour l'une & pour l'autre bande, & les cellules *extrêmes* [*CR*] [*cr*] dont les lettres ſont analogues, les autres cellules des bandes interrompuës, comme *CQ*, *aR*, *AR*, *Br* ſont *les moyennes* de leur bande. A l'égard des deux autres bandes correſpondantes de l'Enceinte, elles ont leurs lettres analogues à celles de l'équerre qui leur répondent par diagonale, horizontalement ou verticalement.

ENCEINTE.

cq	CP	cP	Cr	br	CR
cQ	*ap*	*AQ*	*Aq*	*aP*	Cq
aR	*BP*	*bq*	*bQ*	*Bp*	Ar
AR	*bP*	*Bq*	*BQ*	*bp*	ar
Br	*Ap*	*aQ*	*aq*	*AP*	bR
cr	cp	Cp	cR	BR	CQ

Pour former une enceinte à bande unique comme de 6. autour d'un quarré de 4, dont les anciennes lettres ſont *ab*, *pq*, & les nouvelles *c*, *r*.

Bande horizontale.						*Bande verticale.*					
1λ	-1λ	-1λ	1λ	-3λ	1λ	-1λ	-1λ	-5λ	5λ	3λ	-1λ
C	(*c*)	*c*	[*C*]	*b*	*C*	(*c*)	*c*	*a*	*A*	*B*	[*c*]
P	(*q*)	*P*	[*R*]	*r*	*r*	(*q*)	*Q*	*R*	*R*	*r*	[*r*]
5	-3	5	1	-1	-1	-3	3	1	1	-1	-1

Formez les deux bandes de l'Equerre de cette maniere. 1°. Mettez les nouvelles lettres avec leurs analogues

cccccc, *rrrrrr*, & les anciennes *aa*, *bb*, *pp*, *qq* dans la bande horizontale & dans les cellules moyennes de la bande verticale. 2°. Si vous voulez faire la bande horizontale par excedans & defaillans, entre les 1res lettres choisissez celles dont la somme des differences soit -2λ & par conséquent le défaut est $-2\lambda = -6$: & accompagnez les 1res lettres de 2des lettres dont la somme des differences soit $+6$. 3°. Mettez le reste des 1res & 2des lettres dans les 4 cellules moyennes de la bande verticale, & ajoûtez deux cellules de la bande horizontale, sçavoir l'angulaire *cq* par homologie, & l'extrême *cr* par analogie. Toutes ces lettres doivent être tellement disposées, que les sommes des differences des 1res lettres & des 2des lettres soient égales à zero, ou elles doivent être par excedans & defaillans, & alors on aura deux bandes de l'enceinte, sçavoir une horizontale & une verticale ; & l'on aura les bandes opposées en prenant les analogues des lettres des bandes précedentes.

Dans l'arrangement précedent des 1res & 2des lettres, il faut avoir égard d'accompagner toûjours deux homologues de deux analogues & deux analogues de deux homologues.

77. Une enceinte étant construite, on fera une Croix

CROIX.

ap	*AQ*	cQ	Cq	*Aq*	*aP*
BP	*bq*	aR	Ar	*bQ*	*Bp*
CP	cP	cq	CR	Cr	br
cp	Cp	cr	CQ	cR	BR
bP	*Bq*	AR	ar	*BQ*	*bp*
Ap	*aQ*	Br	bR	*aq*	*AP*

CHASSIS.

ap	cQ	*AQ*	*Aq*	Cq	*aP*
CP	cq	cP	Cr	Cr	br
PB	aR	*bq*	*bQ*	Ar	*Bp*
bP	AR	*Bq*	*BQ*	ar	*bp*
cp	cr	Cp	cR	CQ	Br
AP	Br	*aq*	*aQ*	bR	*AP*

ou un Chassis, en mettant toûjours dans les diagonales les cellules des diagonales de l'enceinte, & en disposant tellement les autres cellules, qu'après le changement les bandes horizontales & verticales conservent toûjours leurs mêmes cellules.

XI. *Des Cubes magiques, & des Quarrés à plusieurs especes de lettres.*

3. Decembre.

78. Un *Cube magique* est un Cube divisé en cellules cubiques qui renferment chacun un nombre, qui est tel que la somme de tous les nombres qui sont dans chaque couche quarrée parallele aux 3 bases, ou qui sont dans chacune des six plans ou couches qui coupent les diagonales des bases opposées, est toûjours la même.

79. Un *Cube magique géometrique* est à l'égard du précédent Cube qui est arithmetique, ce que le Quarré magique géometrique est à l'égard du Quarré magique ordinaire qui est aussi arithmetique; c'est pourquoi il faut ici appliquer la remarque de l'article 11.

80. Dans un Cube magique il y a 3 sortes de lettres; sçavoir, les 1res lettres *A B C D E* &c. & leur moyenne *M*, les 2des lettres *p q r s t* &c. & leur moyenne *n* & les 3mes lettres $\pi\ \rho\ \sigma\ \tau\ \upsilon$ &c. & leur moyenne μ, lesquelles peuvent être générales ou par analogie comme dans les Quarrés magiques.

81. Les nombres qui répondent aux 3mes & 2des lettres des Cubes magiques, sont les mêmes que ceux qui répondent aux 2des & 1res lettres des Quarrés magiques. A l'égard des nombres qui répondent aux 1res lettres des Cubes magiques, le plus petit nombre est aussi égal à zero; mais le second nombre & la difference des autres nombres est au moins égal à la somme du plus grand des 2des & du plus grand des 3mes lettres.

82. Je me contenterai de donner la construction par diagonale du Cube de 5, parce qu'à l'imitation de cette construction on pourra imaginer les autres.

1res lettres	*A*	*B*	*N*	*C*	*D*
1rs nombres	0	1*x*	2*x*	3*x*	4*x*
	0	25	50	75	100.

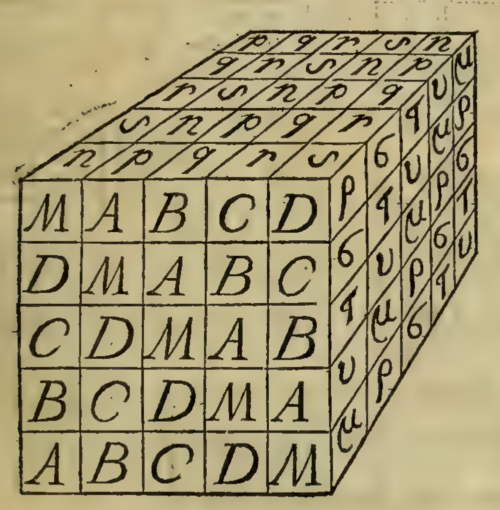
2des

2des lettres	p	q	n	r	s
2ds nombres	0λ	1λ	2λ	3λ	4λ
	0	5	10	15	20
3mes lettres	π	ρ	μ	σ	τ
3mes nombres	1	2	3	4	5

Les 3mes & 2^{ds} nombres sont ici les mêmes que les 2^{ds} & 1ers qui sont trouvez par les articles 7. 8. 18. 19. 20. &c.

Dans les 1ers nombres du Cube magique $A=0$. B ou $1x = s + 1 = 4\lambda + 5 = 25$. A ces 1ers on peut ajoûter des 2des differences comme aux 2^{ds} nombres des Quarrés magiques.

1°. Dans les 3 faces qui forment un angle solide du Cube, écrivez d'ordre les 1res, 2des, & 3mes lettres, en sorte que les moyennes M, n, μ, soient les plus éloignées de cet angle.



2°. Mettez les moyennes dans les cellules de leurs diagonales, & les autres lettres d'ordre, cõme dans l'article 13.

3°. Mettez chaque 1re lettre dans les 5 cellules cubiques interieures qui leur répondent perpendiculairement ; faites la même chose aux 2des & aux 3mes lettres. Chaque cellule cubique interieure aura trois lettres, sçavoir chacune aura une 1re, une 2 & une 3me lettre, & le cube sera magique en lettres.

On le rendra Cube magique en nombres, mettant les nombres appliquez aux lettres en la place des lettres, comme dans l'art. 18.

Pour concevoir mieux les 125 cellules du cube magique de 5, j'ai partagé le cube en 5 couches quarrées paralleles à la face des 1res lettres, & qui contiennent chacun 25 cellules, & chaque cellule 3 lettres. La ſomme des nombres de chaque couche eſt $\overline{m+n+\mu}\times rr$, & la ſomme de tous les nombres du cube magique eſt $\overline{m+n+\mu}\times r^{3}$.

Pour diſtinguer les couches paralleles à l'une de ces 3 faces du Cube, prenez 5 bandes qui ayent toutes les 25 lettres de cette face, & dans chacune deſquelles une lettre des autres eſpeces ſoit repetée.

1 3

2	5 Mnρ	Apρ	2 Bqρ	Crρ	6 Dſρ	4
	Dnσ	5 Mpσ	Aqσ	6 Brσ	Cſσ	
	Cnτ	Dpτ	5 6 Mqτ	Arτ	Bſτ	
	Bnυ	6 Cpυ	Dqυ	5 Mrυ	Aſυ	
4	6 Anμ	4 Bpμ	4 Cqμ	4 Drμ	5 Mſμ	2

1 3

1 3

	5 Mſσ	Anσ	Bpσ	Cqσ	6 Drσ	
2	Dſτ	5 Mnτ	Apτ	6 Bqτ	Crτ	2
	Cſυ	Dnυ	5 6 Mpυ	Aqυ	Brυ	
4	Bſμ	6 Cnμ	Dpμ	5 Mqμ	Arμ	4
	6 Aſρ	Bnρ	Cpρ	Dqρ	5 Mrρ	

1 3

1. 3.

	5 Mrτ	Aſτ	Bnτ	Cpτ	6 Dqτ	
	Drυ	5 Mſυ	Anυ	6 Bpυ	Cqυ	
2	Crμ	Dſμ	5 6 Mnμ	Apμ	Bqμ	2
4	Brρ	6 Cſρ	Dnρ	5 Mpρ	Aqρ	4
	6 Arσ	Cſσ	Cnσ	Dpσ	5 Mqσ	

1 3

		3		5		
	5 Mqυ	Arυ	Bſυ	Cnυ	6 Dpυ	
4	Dqμ	5 Mrμ	Aſμ	6 Bnμ	Cpμ	
	Cqρ	Drρ	5 6 Mſρ	Anρ	Bpρ	
2	Bqσ	6 Crτ	Dſσ	5 Mnσ	Apσ	
	6 Aqτ	Brτ	Cſτ	Dnτ	5 Mnτ	
		3		1		

	3				6	
4	5 Mpμ	Aqμ	Brμ	Cſμ	6 Dnμ	4
4	Dpρ	5 Mqρ	Arρ	6 Bſρ	Cnρ	
	Cpσ	Dqσ	5 6 Mrσ	Aſσ	Bnσ	
2	Bpτ	6 Cqτ	Drτ	5 Mſτ	Anτ	
2	6 Apυ	Bqυ	Crυ	Dſυ	5 Mnυ	2
	3				1	

4°. Nous avons marqué les ſix couches qui paſſent par les diagonales avec les nombres 1 1 : 2 2 : 3 3 : 4 4 : 5 5 5 5 5. *66666.*

83. L'on peut auſſi appliquer trois ſortes de lettres & même plus, à un quarré magique, & voici une maniere de les employer.

Propoſons-nous un Quarré magique de 7 par lettres générales à conſtruire avec 3 ſortes de lettres *A B C D E F G* : *p q r ſ t u x* : π ρ σ τ υ ψ χ.

	0	1	2	3	4	5	6
0.0.0.	Apπ	Bqρ	Crσ	Dſτ	Etυ	Fuψ	Gxχ
2.3.4.	Cſυ	Dtψ	Euχ	Fxπ	Gpρ	Aqσ	Brτ
4.6.1.	Exρ	Fpσ	Gqτ	Arυ	Bſψ	Ctχ	Duπ
6.2.1.	Grψ	Aſχ	Btπ	Cuρ	Dxσ	Epτ	Fqυ
1.5.2.	Buσ	Cxτ	Dpυ	Eqψ	Frχ	Gſπ	Atρ
3.1.6.	Dqχ	Erπ	Fſρ	Gtσ	Auτ	Bxυ	Cpψ
5.4.3.	Ftτ	Guυ	Axψ	Bpγ	Cqπ	Brρ	Eſσ

Mettez les Indices au deſſus du Quarré & 3 colomnes d'Indices à côté. Achevez enfin le quarré ſelon l'art. 14.

Remarquez 1°. que ſi on ne peut pas mettre autant de colomnes d'Indices qu'il y a de lettres, il faut employer pour une ou deux ſortes de lettres la méthode des diagonales *art.* 13. *ou* 16. ou quelques-unes des méthodes par

les lettres analogues ; ou enfin employer pour toutes les ſortes de lettres les differentes manieres par lettres analogues.

2°. S'il y a des lettres repetées dans les diagonales, il faut que la ſomme de leur difference ſoit égale à zero *.

* Voy. Sect. III.

3°. A l'égard des valeurs de lettres, il faut diſtinguer deux claſſes de lettres : la 1re claſſe des lettres ordonnées ſont des eſpeces de lettres dont les valeurs ſont reglées ſur celles des 1res ou 2des lettres ordinaires : la 2e claſſe des lettres deſordonnées eſt celle des eſpeces de lettres dans chacune deſquelles les lettres ou leurs differences peuvent être égales ou inégales, ou quelques unes égales à zero.

4°. Mais de quelque maniere que l'on diſpoſe ces claſſes, la derniere eſpece de lettre doit être de petits nombres ; la penultiéme eſpece doit être multiple de λ, ſuppoſant λ au moins égal au plus grand nombre de la derniere claſſe s'il n'y a point de zero, ou plus grand de 1, s'il y a des zero : l'antépénultiéme eſpece doit être multiple de x, ſuppoſant x au moins égal à la ſomme des plus grands nombres des eſpeces précedentes, & ainſi de ſuite.

Au reſte, il faut que dans l'une de ces eſpeces il n'y ait point de zero, ſoit par le moyen des multiple λ ou x, ſoit par les 2des differences.

Ainſi dans le Quarré précedent de 7, l'on aura les valeurs des lettres ſelon cette Table.

Eſpece de lettres ordonnées.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
	0	$1x$	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$	$6x$
	0	21	42	63	84	105	126
Eſpece de lettres deſordonnées.	*p*	*q*	*r*	*ſ*	*t*	*u*	*x*
	0	0	0	0	1λ	2λ	2λ
					7	14	14
Eſpece de lettres ordonnées.	π	ρ	σ	τ	υ	ψ	χ
	1	2	3	4	5	6	7

C'eſt à cet article qu'on peut rapporter l'art. 10.

XII. *Variations des Quarrés magiques.*

Il y a en général deux ſortes de variations, l'une de nombres & l'autre de méthodes.

78. *La variation de nombres.* C'eſt lorſqu'ayant appliqué aux lettres leurs valeurs en nombres ſelon la Section III. & les articles 25 & 26, on change enſuite les valeurs des lettres de toutes les manieres poſſibles ſuivant les regles des permutations & des combinaiſons.

Pour avoir toutes les permutations des nombres de pluſieurs lettres differentes, il faut multiplier enſemble les nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. juſqu'à celui qui marque le nombre des choſes à permuter. Ainſi le nombre des permutations de 5 lettres eſt 120.

Pour marquer les permutations d'un nombre de lettres, nous mettons *P* devant ce nombre ; ainſi $P5 = 120$. & $Pr = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times r$, c'eſt-à-dire que Pr eſt égal au produit de tous les nombres depuis 1 juſqu'à *r* qui exprime la racine du Quarré.

Pour avoir toutes les variations des premieres & des ſecondes lettres, il faut multiplier le nombre des permutations des 1res lettres par le nombre des permutations des 2des lettres, comme $P5 \times P5$, ou $P5^2 = 14400$.

79. *La variation de Méthodes.* Ce ſont les differentes Méthodes ſelon leſquelles l'on peut faire des Quarrés magiques dans chacune deſquelles variant les nombres qui marquent les valeurs des lettres ſelon toutes les manieres poſſibles, l'on ne tombe point dans les mêmes arrangemens de nombres que dans ceux d'une autre Méthode.

Comme ces differentes méthodes ou manieres de conſtruire des Quarrés magiques ſont indéfinies, il eſt difficile quoique poſſible de les déterminer dans chaque quarré, & encore plus dans les quarrés en général. Nous nous contenterons de mettre ici les principales méthodes avec leurs variations de nombres.

1°. *Par les Diagonales* *. Les variations de nombres ſont

* *art.* 13.

$\frac{\overline{Pr-1}^2}{4}$. Car 1°, le nombre des 1res lettres variables est $\overline{Pr-1}$ (la lettre repetée dans la diagonale ne variant point) & des 2des lettres est aussi $\overline{Pr-1}$, dont les variations des 1res & 2des lettres est $\overline{Pr-1} \times \overline{Pr-1} = \overline{Pr-1}^2$. 2°. Il y a 4 sortes de variations qui sont les mêmes. Car supposant dans le Quarré de l'art. 13. qu'on ait donné des valeurs aux lettres, si l'on donne à E la valeur de B ou à s la valeur de p, & que l'on change par ordre les autres nombres, l'on aura un 2d Quarré qui sera le même que le 1er dont le haut est renversé sur le côté. On aura la 3me variation en changeant comme ci-dessus en même tems les 1res & 2des lettres, & ces 3 variations avec le 1er Quarré font 4 Quarrez qui sont les mêmes ; par conséquent il faut diviser $\overline{Pr-1}^2$ par 4.

D'où il suit que le nombre des variations du Quarré de 3 est 1 : de 5 est 144 : de 7 est 129600 : de 9 est 406, 425, 600 : de 11 est 3, 262, 047, 360, 000.

* art. 14. 2°. *Par Indices* *. Si les lettres ne sont point repetées dans les Diagonales, la variation des nombres est $\frac{Pr^2}{8}$, & si r est un nombre premier, la variation des deux Indices qui sont devant la 2de bande horizontale sont $\overline{r-3} \times \overline{r-4} = rr - 7r + 12$: & la variation totale des lettres par Indices est $\frac{Pr^2}{8} \times \overline{r-3} \times \overline{r-4}$. Ainsi la variation de 5 est 3600 : de 7 est 38, 102, 400 : de 11 est 546, 519, 366, 328, 320, 000.

Si r n'est pas un nombre premier, il faut examiner d'abord les variations des deux Indices qui sont après o. o. * dans lesquelles 1°. il faut exclure les cas où ces deux Indices ou leur difference sont aliquotes ou aliquantes de r. 2°. Dans les autres cas il faut examiner en détail les variations qui arrivent lorsque $n+1$ & $n-1$ d'une espece de lettre, & $n+1$ & $n-1$ de l'autre espece, sont séparement ou deux à deux, ou 3 à 3 aliquotes ou aliquantes de r, ensuite il faut prendre la somme des variations de tous ces cas.

* art. 15.

* art. 16. 3°. *Par la Méthode mixte* *. Si r est un nombre premier ;

le nombre des variations eſt $\frac{Pr \times \overline{Pr - 1}}{4} \times r - 3$. Ainſi le nombre des variations du Quarré de 5 eſt 1440 : de 7 eſt 362, 880 : de 11 eſt 289, 700, 167, 680, 000.

4°. *Par la Méthode deſordonnée* *. Il faut parcourir par détail toutes les manieres dont les lettres ayant leurs valeurs reglées peuvent être rangées pour permettre que les Indices ſoient rangées d'une maniere deſordonnée, l'on trouvera ces cas par l'art. 23, ou plûtôt en ſe ſervant des lettres analogues.

* art. 17.

5°. *Par Analogie* *. Il faut appeller q le nombre des lettres minuſcules, de ſorte que dans les Quarrés pairs $q = \frac{1}{2} r$, & dans les impairs $q = \frac{1}{2} r - \frac{1}{2}$.

* art. 27.

Les variations des nombres de chaque Quarré par analogie eſt $Pq^2 \times 2.^{2q-3}$. Ainſi dans le Quarré de 3 le nombre des variations des nombres eſt 1 : de 4 & de 5 eſt 8 : de 6 & de 7 eſt 288 : de 8 & de 9 eſt 18432 : de 10 & de 11 eſt 1843200.

Il faut enſuite examiner les variations de méthodes par bandes correſpondantes, par bandes non correſpondantes, par bandes mixtes, par bandes interrompuës, par les enceintes, & par les quarrés compoſez faits par analogie ; prendre la ſomme de toutes les combinaiſons de chaque maniere, & multiplier cette ſomme par $Pq^2 \times 2.^{2q-3}$.

6°. *Par les autres manieres* *. Le nombre des variations par les autres manieres eſt égal à la ſomme des combinaiſons & des permutations qu'il faut faire en détail.

* Sect. IX.

80. Pour trouver le nombre de toutes les variations poſſibles d'un Quarré propoſé, il faut chercher en détail les variations de chaque méthode ou maniere de faire ce Quarré (en excluant les manieres dont les variations retombent dans les autres) & prendre la ſomme de toutes ces variations.

XIII. *Raport des Méthodes qui ont été données jusqu'à présent avec les nôtres.*

81. Tous les Auteurs conviennent de se servir des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5 &c. pour en former des Quarrés magiques, je crois que M. de la Hire est le premier qui ait employé d'autres nombres; je détermine tous ceux qui peuvent servir à la construction de ces Quarrés.

82. Pour connoître à laquelle de nos Méthodes se rapporte un Quarré magique en nombres construit selon la méthode de quelque Auteur, comme le Quarré de 4 qui est le 1er de M. Frenicle. 1°. Sous les 2des lettres *p q Q P* mettez les nombres 1 2 3 4*. Sous les 1res lettres mettez les nombres 0. 4. 8. 12. 2°. En la place des nombres du 1er quarré, mettez les lettres qui leur sont égales par la converse de l'art. 18. Vous aurez un Quarré en lettres, & par leur disposition vous connoîtrez qu'il se rapporte à nôtre méthode par analogie & par bandes qui sont en partie continuës & en partie interrompuës.

* art. 25.

1	13	8	12
16	4	9	5
11	7	14	2
6	10	3	15

a 0	*b* 4	*B* 8	*A* 12
ap	*Ap*	*bP*	*BP*
aP	*aP*	*Bp*	*bp*
BQ	*bQ*	*Aq*	*ap*
bq	*Bq*	*aQ*	*AQ*
p 1	*q* 2	*Q* 3	*P* 4

83. C'est ainsi que l'on connoîtra que la 1re maniere de Manuel Moscopule rapporté par M. de la Hire* est par les Indices, & la 2de par les Diagonales, aussi bien que les Quarrés de M. Bachet, dans ses Problêmes plaisans imprimez en 1624.

* Mem. de l'Acad. 1705. pp. 162. 163.

84. Les Quarrés de M. Frenicle imprimez dans les Ouvrages de Mathematique & de Physique de Mrs de l'Académie des Sciences page 484, se raportent à nos differentes Méthodes.

85. L'Auteur des nouveaux Elemens de Géometrie, & le P. Prestet Prêtre de l'Oratoire dans ses nouveaux Elemens de Mathematique, font un Quarré de 3 & un autre

autre de 4 autour desquels ils mettent des enceintes repetées à bande unique qui se rapportent à nos Méthodes art. 74, 75 & 76.

86. Le Quarré magique que M. de la Loubere Envoyé Extraordinaire auprès du Roy de Siam, a mis dans la Relation de son Voyage fait en 1687, est par la méthode mixte art. 16.

87. M. Poignard grand Chanoine de Bruxelles, a fait imprimer en 1704 un Traité des Quarrés sublimes, dans lesquels, 1°. Ses Quarrés par progression repetée se rapportent aux nôtres, dont on a ôté les 1[res] lettres. 2°. Ses Quarrés impairs sont formez par la méthode mixte selon l'art. 16. 3°. Ses premiers Quarrés pairement pairs sont par bandes correspondantes, dans lesquelles les directes sont par homologie selon l'art. 58. & alternativement majuscules & minuscules. 4°. Ses Quarrés impairement pairs (qu'il appelle pairement impairs) sont un cas de l'art. 61. 5°. Ses variations sont des cas de nos variations de nombres art. 78.

88. M. de la Hire a donné ses nouvelles constructions & considerations sur les Quarrés magiques, avec les démonstrations dans les Memoires de l'Académie des Sciences de l'année 1705. ce qu'il a fait d'une maniere plus générale que ceux qui l'ont précedé. Il prend pour principe deux Quarrés primitifs, dont chaque nombre de l'un étant ajoûté à chaque nombre de l'autre qui lui répond, forment un Quarré magique parfait. Ces Quarrés primitifs sont formés plus généralement par nos 1[res] lettres & par nos 2[des] lettres, qui satisfont plus simplement & plus généralement à toutes les difficultés qu'il est obligé de lever par des propositions particulieres.

Dans sa 1[re] partie qui commence à la page 127. il traite des Quarrés impairs dont les constructions sont renfermées sous celle des indices * qui comprend les constructions par diagonales, & par la méthode mixte, dans lesquelles il a senti la difficulté des nombres repetés dans les diagonales, dont j'ay donné la Solution dans la Section III.

* art. 13. 14. & 16.

Les Quarrés pairs dont il traite dans la 2de partie page 364. ſont des cas particuliers de nos Sections VI. & VII. qui s'étendent auſſi aux conſtructions des Quarrês impairs d'une maniere nouvelle. Enfin ſes Enceintes ſont compriſes dans nôtre Section X. dans laquelle nos Croix & nos Chaſſis donnent lieu à de nouvelles manieres de varier les Quarrés magiques.

89. Pour ne rien obmettre j'ajoûteray que les principes que j'établis ſuffiſent pour la conſtruction de tous les Quarrés & de tous les Cubes magiques, & les méthodes que j'ay données ſont entierement détaillées pour les Quarrés impairs par lettres générales, pour les Quarrés pairs & impairs par bandes continuës & pour une partie des variations : le tems ne m'a pas permis d'entrer dans le détail du reſte ; il eſt bon de laiſſer à d'autres le plaiſir d'achever cette matiere.



OBSERVATIONS

De la quantité d'eau qui est tombée à l'Observatoire pendant l'année 1709, avec l'état du Thermometre & du Barometre.

PAR M. DE LA HIRE.

1710. 8. Janvier.

VOici la continuation des observations sur la pluïe, sur le Thermometre & sur le Barometre, que j'ay faites comme les années précedentes dans le même lieu & avec les mêmes Instrumens. Je commencerai donc par la quantité d'eau qui est tombée, soit en pluïe, soit en nége fonduë.

En Janvier	22 lig.	$\frac{3}{8}$	May	32 lig.		Septembre	29 lig.	$\frac{2}{8}$
Fevrier	13	$\frac{7}{8}$	Juin	45	$\frac{4}{8}$	Octobre	17	$\frac{5}{8}$
Mars	20	$\frac{2}{8}$	Juillet	18	$\frac{2}{8}$	Novembre	1	$\frac{5}{8}$
Avril	37	$\frac{6}{8}$	Aoust	10	$\frac{7}{8}$	Decembre	11	$\frac{6}{8}$

Somme de l'eau de toute l'année 1709 est 261 lignes $\frac{1}{8}$ ou 21 pouces 9 lignes $\frac{1}{8}$, ce qui est un peu plus que les années moyennes qu'on a déterminées à 19 pouces.

On voit par ces observations que les trois mois d'Avril, May & Juin ont donné presqu'autant d'eau que les neuf autres mois de l'année, & c'est ce qui arrive ordinairement dans les mois de Juin, Juillet & Aoust; & c'est ce qui a fait que les Mars qu'on a semés fort tard ont raporté beaucoup. La grande quantité de nége qui est tombée pendant l'hiver, a peut-être contribué à la fertilité de la terre, & si le froment & le segle n'eussent pas été gelés jusque dans la racine, cette année auroit été fort abondante.

Le Thermometre dont je me sers pour mesurer la chaleur & le froid, est le même que j'ai conservé depuis 40 ans environ; mais comme il a été placé à differentes expositions du ciel, hormis depuis 15. années, on ne peut

pas faire une comparaiſon très-exacte des premieres obſervations avec les dernieres. Cependant toutes ces obſervations étant toûjours faites à la pointe du jour où l'air eſt le plus froid, on en peut conclure aſſez exactement tout ce qu'on peut connoître par le moyen de cet Inſtrument. Je remarquerai ſeulement que le jugement que nous faiſons ordinairement du froid dépend de pluſieurs circonſtances particulieres, comme du vent, de l'humidité de l'air, de la chaleur ou du froid des jours précedens, de l'expoſition des lieux où l'on eſt, & de la conſtitution des corps, ce qui peut l'alterer conſiderablement; c'eſt pourquoi il ſera toûjours plus ſûr de s'en raporter au Thermometre.

Le froid du commencement de cette année a été exceſſif avec beaucoup de nége, car mon Thermometre eſt deſcendu juſqu'à 5 parties le 13 & le 14 de Janvier, & les jours ſuivans étant un peu remonté, il revint à 6 parties le 20 & le 21 à $5\frac{1}{4}$, mais enſuite le froid diminua peu à peu. Ce grand froid a été fort ſenſible, car le 4 de ce mois de Janvier ce Thermometre étoit à 42 parties qui eſt un état fort proche du moyen que j'ai déterminé à 48, le 6 il vint à 30, le 7 à 22, le 10 à 9, & enfin le 13 à 5; c'eſt ſans doute ce changement ſubit qui a paru ſi extraordinaire, & ce qui eſt encore plus ſurprenant c'eſt que ce grand froid eſt ſurvenu ſans aucun vent conſiderable, ou il n'y en avoit qu'un très-foible vers le Sud, & lorſque le vent augmentoit & tournoit vers le Nord, le froid diminuoit. Ce vent de Sud ſi froid nous devoit marquer ce qui eſt effectivement arrivé dans les païs meridionaux à nôtre égard, où la mer s'eſt gelée en quelques lieux de la côte de Provence, & où la plûpart des arbres fruitiers ſont morts auſſi bien que dans ce païs-ci.

Je n'avois point encore obſervé que ce Thermometre fût deſcendu auſſi bas que cette année. Je trouve ſeulement dans mes Regiſtres que le 6. Fevrier 1695. le Thermometre étoit deſcendu à 7 parties dans le même lieu

où il est à present ; & le froid de cet hiver-là qui avoit commencé en 1694, a été regardé comme un des plus grands qu'il ait fait il y a longtems, mais on voit qu'il n'est pas encore à comparer à celui de cette année. J'ai encore observé quelquefois ce Thermometre à 13 parties, mais assez rarement.

L'hiver de cette année a duré fort longtems, car le 13 Mars il geloit encore très-fort, le Thermometre étant à 24 parties, & la gelée commençant quand il est à 32.

On trouve dans l'Histoire de France de Mezeray que l'hiver de l'année 1608 fut très-long & très-rude, & que la plûpart des jeunes arbres furent gelés ; cependant cette année-là fut fort abondante, quoiqu'on l'appelle l'année du grand hiver : mais par la comparaison de l'abondance & de la perte des arbres, l'hiver dernier doit l'avoir surpassé.

Le Thermometre a été au plus haut à 63 parties le 11 Aoust à 4 heures ½ du matin, & après midi vers les 3 heures à 75 parties. Dans l'état moyen il est à 48 dans le fond des caves de l'Observatoire. La chaleur de cette année a été bien moindre que celle de 1707, où le Thermometre étoit monté à près de 70 parties le 21 Juillet au matin, & après midi à 82, qui est le plus haut où il ait été dans ce païs-ci, sans être exposé au Soleil.

Pour comparer les observations de mon Thermometre avec celles qu'on auroit faites sur celui de M. Amontons, dont il y en a eu beaucoup de distribués dans plusieurs endroits, j'en ay placé un qu'il avoit fait avec grand soin à côté de celui dont je me sers ordinairement ; mais comme il me servoit à quelques observations particulieres, je ne l'ay mis proche du mien qu'au mois de May dernier. On sçait que tous ces Thermometres de M. Amontons ont leur 54e degré ou 54 pouces qui marque la temperature de l'air des caves de l'Observatoire, comme dans le mien le 48e degré. J'ay donc observé que lorsque le Thermometre de M. Amontons étoit à 55 pouces 8 lignes, le mien étoit à 63. parties, ensorte que 15 parties du mien

répondoient à 20 lignes de celui de M. Amontons. Mais lorſque le mien a marqué dans le mois de Decembre dernier 28 parties, celui de M. Amontons marquoit 51 pouces 6 lignes, ce qui donne dans le mien 20 parties au-deſſous de l'état moyen & dans celui de M. Amontons 30 parties, ce qui eſt un rapport bien different du premier, & qui peut être cauſé par l'inégalité de l'interieur des tuyaux; & comme celui de M. Amontons eſt fort petit & le mien mediocre, je croirois que l'inégalité pourroit être plus grande dans celui de M. Amontons que dans le mien. Cependant on peut connoître par-là qu'on ne ſçauroit avoir rien de fort éxact dans la comparaiſon des Thermometres en differens païs & pour un même tems, à moins que les Thermometres n'ayent été rectifiés l'un ſur l'autre dans toutes ſortes de degrés de chaleur & de froid, & je crois qu'il ne ſera pas poſſible d'en trouver deux égaux, c'eſt-à-dire dont des degrés égaux dans la diviſion répondent à des degrés égaux de chaleur ou de froid.

Pour ce qui eſt de mon Barometre, il eſt toûjours placé à la hauteur de la grande Sale de l'Obſervatoire; je l'ai trouvé au plus haut à 28 pouces 3 lignes $\frac{1}{2}$ le 19 Janvier avec calme & ciel ſerein, ce qui étoit vers le tems du plus grand froid; & le 31 Decembre il étoit à 28 pouces 3 lignes $\frac{1}{6}$ avec un très gros broüillard & calme. Il a été auſſi pluſieurs fois au-delà des 28 pouces avec des vents differents, mais qui participoient plûtôt du Nord que du Sud, & toûjours ſans pluïe. J'ai obſervé ce Barometre au plus bas à 26 pouces 7 lignes $\frac{1}{2}$ avec vent fort Sud & pluïe mediocre le 16 Decembre. La difference entre la plus grande & la moindre hauteur du Barometre, a donc été de 1 pouce 8 lignes, qui eſt un peu plus que la difference mediocre qu'on obſerve ici, & qui eſt de 1 pouce 6 lignes. Cet inſtrument a été aſſez exact à prédire la pluïe & le beau tems ſuivant le ſentiment commun.

J'ai obſervé la Déclinaiſon de l'Aiman avec la même aiguille de 8 pouces de longueur & dans le même lieu

où j'ai accoûtumé, & comme je l'ai marqué dans les Memoires des années précedentes. Le 24 Decembre dernier j'ai trouvé cette déclinaison de 10 degrés 30 minutes vers le Couchant. D'où l'on connoît que cette déclinaison augmente toûjours chaque année à peu près de la même quantité.

COMPARAISON

Des Observations que nous avons faites ici à l'Observatoire sur la Pluïe & les Vents, avec celles que Monsieur le Marquis de Pontbriand a faites dans son Château près S. Malo pendant l'année 1709.

PAR M. DE LA HIRE.

IL y a déja quelques années que M. du Torar nous communique les Observations que Monsieur le Marquis de Pontbriand fait chez lui de la même maniere que je les fais ici sur la pluïe. Il a trouvé qu'il est tombé en nége fonduë & en eau aux mois de

1710. 1. Mars.

Janvier	$33^{l.}\frac{1}{4}$	Avril	$30^{l.}\frac{1}{2}$	Juillet	$18^{l}\frac{1}{4}$	Oct.	$14^{l.}$
Fevrier	$17\frac{1}{2}$	May	$26\frac{1}{4}$	Aoust	$5\frac{1}{4}$	Nov.	$3\frac{3}{4}$
Mars	$30\frac{1}{4}$	Juin	$23\frac{3}{4}$	Sept.	5	Dec.	$17\frac{1}{4}$

& pendant toute l'année 225 lignes ou 18 pouces 9 lignes.

Cette quantité d'eau est moindre que celle que nous avons trouvée ici, & qui a été de 21 pouces 9 lignes, ce qui est extraordinaire; car nous avions remarqué les années précedentes qu'il pleut beaucoup moins ici que dans ce païs-là qui est sur le bord de la mer.

On voit par le Memoire de M. de Pontbriand que la forte gelée a commencé quelques jours plûtôt dans ce lieu-là qu'à Paris; mais il y a negé dans le même tems avec un vent N. O. A Paris il ne faisoit pas presque de vent & il étoit vers le S.

Le mois de Janvier lui a donné 33 lignes $\frac{1}{4}$ d'eau & à Paris ſeulement 22 lig. $\frac{1}{2}$. Le Memoire porte que la forte gelée avoit diminué à la fin de Janvier & recommencé en Fevrier, & que la nuit du 23 au 24 elle fut auſſi forte que depuis le 6 juſqu'au 18 de Janvier. A Paris elle recommença auſſi en Fevrier à peu près dans le même tems, mais elle fut bien moindre qu'en Janvier.

Il ajoûte auſſi que les vents étoient très-violens de N.O; mais à Paris il n'en faiſoit qu'un très-foible vers le S.

Il dit enfin que le froid n'a pas été ſi grand chez lui que dans le milieu de la Bretagne; ce qui paroît devoir être ainſi à cauſe de la proximité de la mer dont les vapeurs humides abſorbent une partie du grand froid, comme toutes les expériences nous le font connoître; car pendant la forte gelée l'air eſt extrêmement ſec, & auſſitôt qu'il devient humide il dégêle.

Je remarquerai encore ici que j'ai vû en 1679 dans le Jardin du Roi à Breſt, des Ananas très beaux en pleine terre, & je croi qu'ils y avoient paſſé l'hyver; peut-être auſſi que le terrein maritime contribuoit à cela, car je ne crois pas qu'on puiſſe les élever dans ce païs-ci.

En Juin il n'y eut au Pont-Briand que 23 lignes $\frac{3}{4}$ d'eau & à Paris 45 lignes $\frac{1}{2}$: auſſi à Paris le 25 & 26 il plut 9 lignes, & au Pont-Briand 2 $\frac{1}{2}$ ſeulement.

En Aouſt nous avons eu un orage la nuit du 11 au 12 avec 7 lignes $\frac{1}{2}$ d'eau, & il n'y a rien au Pont-Briand.

En Septembre nous avons eu encore ici un orage la nuit du 13 au 14 qui a donné 9 lignes d'eau & rien au Pont-Briand. De plus il n'eſt tombé pendant tout ce mois au Pont-Briand que 5 lignes d'eau, & à Paris plus de 29 lignes.

En Novembre, au Pont-Briand la quantité d'eau a été de 3 lig $\frac{1}{4}$, & à Paris un peu moins de 1 lig. $\frac{1}{2}$.

En Decembre nous avons eu ici pendant la nuit du 15 au 16 une eſpece de houragan.

En general tous les vents de l'année ſont un peu differens au Pont-Briand & à Paris, & aſſez ſouvent ils tiennent

nent plus du Nord au Pont-Briand qu'à Paris ; ce qui pourroit être causé par la direction de la Manche, & par toutes les Côtes de l'Allemagne, du Dannemarc & de la Norvege, & principalement quand les vents viennent entre le N. & le O.

COMPARAISON

De mes Observations avec celles de M. Scheuchzer sur la Pluïe & sur la Constitution de l'air pendant l'année 1709. à Zurich en Suisse.

PAR M. DE LA HIRE.

1710. 24. May.

M. Scheuchzer m'a envoyé les Observations qu'il a faites sur la quantité d'eau de pluïe qui est tombée à Zuric en Suisse où il a demeuré pendant l'année 1709 ; d'où l'on voit que les premiers six mois lui ont donné $172\frac{1}{2}$ lignes d'eau mesure de Paris, & les derniers 208 lignes, ce qui fait en tout $390\frac{1}{2}$, lignes, ou 32. pouces 6. lignes $\frac{1}{2}$, mais à Paris il n'en est tombé que 21 pouces 9 lignes & $\frac{1}{8}$: il ajoûte que cette année lui a fourni 1 pouce $10\frac{1}{2}$ lignes plus que la précedente.

On connoît par la comparaison de ces observations qu'il pleut beaucoup plus en Suisse qu'à Paris.

J'avois déja remarqué par les observations de la pluïe faites à Lyon, qu'il y pleuvoit bien plus qu'à Paris, & j'en avois attribué la cause aux montagnes de Suisse qui n'en sont pas fort éloignées ; & c'est ce qui se trouve confirmé par ces dernieres observations. Car on ne peut pas douter que les vapeurs qui sont soutenuës en l'air dans un pays plat, & qui se trouvent beaucoup au dessous des hautes montagnes, lorsqu'elles viennent à les rencontrer, s'y arrêtent & s'y condensent en forme de nége dans un tems froid, ce qui doit produire beaucoup plus

d'eau, étant pouſſées par les vents contre ces rochers, que dans les lieux où elles ne s'arrêtent point ; & ſi l'air eſt aſſez chaud pour empêcher ces vapeurs de ſe geler, elles s'y amaſſent enſemble & y tombent en pluïe, outre que les néges qui ſe fondent alors, & dont une partie s'éleve auſſi en vapeurs, y cauſe des pluïes très-abondantes.

Pour ce qui eſt des obſervations de M. Scheuchzer ſur les augmentations ou diminutions de la riviere de la Limage, elles ſuivent naturellement celles de la pluïe & de la fonte des néges dans les ſaiſons où cela arrive.

Il ajoûte encore ſes obſervations ſur le Barometre & ſur le Thermometre, où il marque que la plus grande hauteur du mercure du Barometre a été de 26 pouces 10 lignes $\frac{1}{2}$ le 19 de Janvier, & la plus baſſe de 26 pouces le 20 & le 28 Fevrier; & par conſéquent la difference n'a été que de 10 lignes $\frac{1}{2}$ comme dans l'année 1708.

Ce qu'il y a de conſiderable ici, c'eſt que mon Barometre a été auſſi au plus haut le 19 Janvier à 28 pouces 3 lignes $\frac{1}{2}$ avec calme, qui eſt le même jour où il a été au plus haut à Zuric, & que la difference eſt de 17 lignes ; & ſi l'on vouloit conclure delà la difference des hauteurs des lieux où ces obſervations ont été faites, en poſant pour une ligne de cette difference 12 toiſes 3 piés, comme je l'ai determiné dans ces quartiers-ci, on diroit que le lieu où M. Scheuchzer a obſervé, eſt plus haut que le milieu de l'Obſervatoire où eſt mon Barometre, de 212 toiſes $\frac{1}{2}$. Mais les differentes hauteurs auſquelles nous voyons qu'un même mercure ſe ſoûtient dans differens tuyaux, quoique dans un même lieu, nous pourroient laiſſer quelque ſoupçon de la veritable difference de hauteur de ces lieux.

Pour ce qui eſt de la moindre hauteur du Barometre de M. Scheuchzer qui étoit à 26. pouces le 20 & 28 Fevrier, elle ne s'accorde pas tout-à-fait avec les miennes dans les mêmes jours ; car le 28 Fevrier j'avois 27 pouces 2 lignes avec un vent mediocre, & par conſéquent la

difference de nos Barometres sera ce jour-là de 14 lignes au lieu de 15 que j'ai trouvé dans la plus grande hauteur : peut-être que l'heure de nos observations n'est pas la même, & que le vent peut aussi y apporter du changement ; M. Scheuchzer ne marque pas ces circonstances. Mais le 20 Fevrier le mien étoit à 26 pouces 10 lignes avec un vent fort au lever du soleil : ainsi la difference ne seroit que de 10 lignes, au lieu de 14 ou 15 par les autres observations, & le mien seroit plus bas qu'il ne devroit de 4 à 5 lignes. Ce n'est pas aussi dans ces jours là que mon Barometre a été au plus bas, car je l'ai observé le 16 Decembre à 26 pouces 7 $\frac{1}{2}$ avec un vent fort de Sud ; ainsi le mercure du Barometre auroit des changemens bien plus grands à Paris qu'à Zuric en Suisse.

Il me semble qu'on pourroit attribuer ces sortes d'inégalités à des causes particulieres ; car il n'est pas vraisemblable qu'elles puissent venir des hauteurs differentes de l'atmosphere, ce qui en fait la pesanteur, dans des lieux qui sont peu éloignés les uns des autres. Ne pourroit on pas croire que lorsqu'il fait un grand vent, & qu'il y a beaucoup de nuages, & principalement dans les montagnes comme en Suisse, le vent comprimeroit & condenseroit l'air renfermé entre la surface de la terre, les rochers & ces nuages, ensorte qu'il feroit alors une bien plus forte impression sur le mercure du Barometre, que s'il n'y avoit point de vent ? Mais comme il est rare que dans ces sortes de lieux où il y a beaucoup d'eau, il n'y ait ni vent ni nuages, aussi le mercure du Barometre s'y soûtiendra-t'il par ces causes, presque toûjours plus haut que dans les plaines.

Je ne puis rien dire des observations du Thermometre de M. Scheuchzer, quoique j'en aye un de M. Amontons semblable au sien, qui est une grosse phiole de verre avec un peu de mercure, lequel remonte dans un petit tuyau qui est ouvert par le haut, comme il les avoit construits pour faire l'expérience de l'eau boüillante ; mais

je ne m'en ſers pas à cauſe qu'il eſt ſujet aux differens changemens de la peſanteur de l'air.

USAGE

D'une Intégrale donnée par M. le Marquis de l'Hôpital dans les Mem. de 1700. *pag.* 13.

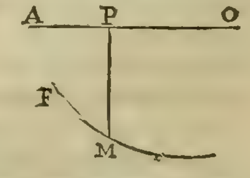
Avec la Solution de quelques autres queſtions approchantes de la ſienne.

PAR M. VARIGNON.

1710. 21. Janvier.

JE ne prétends preſque rien donner ici de moi, mais principalement faire obſerver que la premiere des deux intégrales par leſquelles M. le Marquis de l'Hôpital eſt arrivé à la ſolution du Problême propoſé dans le ſecond Tome des Supplémens des Actes de Leipſik, pag. 291. par M. (Jean) Bernoulli alors Profeſſeur à Groningue, & préſentement Profeſſeur à Baſle, peut encore ſervir à la ſolution de pluſieurs Problêmes touchant les preſſions des Courbes, le long deſquelles tombent des poids qui les compriment, tant de la part de leurs forces centrifuges que de celle de leurs peſanteurs.

Ce Problême de M. Bernoulli conſiſtoit à *déterminer dans un plan vertical la Courbe* FM, *le long de laquelle un corps tombant librement du point* A *en vertu de la ſeule peſanteur ſuppoſée conſtante, la comprimeroit perpendiculairement par tout d'une force égale à cette peſanteur.*



M. le Marquis de l'Hôpital après avoir appellé y, les ordonnées verticales PM de cette Courbe; x, les abſciſſes AP correſpondantes depuis l'origine A vers O ſur l'horizontale AO; dv, les élemens de cette

Courbe, qu'il ſuppoſe conſtans; & a, la peſanteur du poids qui la doit comprimer; a trouvé $\frac{2ayddx}{dvdy}$ pour l'expreſſion générale de la preſſion perpendiculaire cauſée par la force centrifuge de ce poids, & $\frac{adx}{dv}$ pour celle d'une pareille preſſion cauſée par la ſeule peſanteur de ce même poids; ce qui lui a donné $\frac{2ayddx}{dvdy} + \frac{adx}{dv}$ pour l'expreſſion générale de la force totale avec laquelle ce poids doit comprimer perpendiculairement cette Courbe en chaque point M, tant de la part de ſa force centrifuge que de celle de ſa peſanteur, ſa force centrifuge preſſant ainſi cette Courbe de la force $\frac{2ayddx}{dvdy}$, & ſa peſanteur la preſſant de la force $\frac{adx}{dv}$. Delà il lui eſt venu, ſuivant la condition du Problême, $a = \frac{2ayddx}{dvdy} + \frac{adx}{dv} = \frac{2ayddx + adxdy}{dvdy}$; d'où il a tiré $2yddx + dxdy = dydv$; & enſuite (en diviſant le tout par $2\sqrt{y}$) $\frac{2yddx + dxdy}{2\sqrt{y}} = \frac{dydv}{2\sqrt{y}}$, que dv (*hyp.*) conſtante lui a permis d'intégrer en $dx\sqrt{y} = dv\sqrt{y} - dv\sqrt{a}$. C'eſt ce tour d'intégration, & même le premier membre $dx\sqrt{y}$ de cette intégrale, que je dis ne ſervir pas ſeulement à la ſolution du Problême précédent, mais encore à celle de pluſieurs autres de cette nature: par exemple à celle de celui-ci, &c.

PROBLEME I.

Trouver la nature de la Courbe FM *qu'un poids tombant comme ci-deſſus, preſſeroit perpendiculairement en chaque point* M *en raiſon des puiſſances* n *des hauteurs* PM *de ſa chutte faite librement du point* A *le long de cette Courbe.*

SOLUTION.

Les noms demeurant les mêmes que ci-deſſus, ayant encore ici $\frac{2ayddx + adxdy}{dvdy}$ pour l'expreſſion générale de la force totale avec laquelle le poids qu'on ſuppoſe tomber

de *A* le long de la Courbe *FM*, la doit preſſer perpendiculairement en chaque point *M* ; il eſt viſible que l'on aura ici $\frac{2ayddx + adxdy}{dvdy} = \frac{by^n}{c^n}$ dont b, c, ſont des indéterminées conſtantes quelconques ; & delà $2ac^n yddx + ac^n dydx = by^n dydv$; & enſuite (en diviſant le tout par $2\sqrt{y}$, comme M. le Marquis de l'Hôpital a fait dans ſa ſolution du Problême de M. Bernouilli) $ac^n \times \frac{2yddx + dydx}{2\sqrt{y}} = bdv \times \frac{y^n dy}{2\sqrt{y}} = \frac{bdv}{2} \times y^{n-\frac{1}{2}} dy$, dont l'intégrale eſt $ac^n \times dx\sqrt{y} = bdv \times \frac{y^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1}$ en prenant dv conſtante, ou $dx\sqrt{y} = \frac{bdv}{ac^n} \times \frac{y^n\sqrt{y}}{2n+1}$, laquelle intégrale on voit avoir le même premier membre $dx\sqrt{y}$ que la précédente de M. le Marquis de l'Hôpital, & trouvé de la même maniere que par lui. Donc $\overline{2n+1} \times ac^n dx = by^n dv$, ou $\overline{2n+1}^2 \times aac^{2n} dx^2 = bby^{2n} dv^2 = bby^{2n} dx^2 + bby^{2n} dy^2$, ou bien auſſi $\overline{2n+1}^2 \times aac^{2n} dx^2 - bby^{2n} dx^2 = bby^{2n} dy^2$; d'où réſulte $dx = \frac{by^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times aac^{2n} - bby^{2n}}}$ pour l'équation de la Courbe requiſe, laquelle équation ſe change en $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} - y^{2n}}}$ en y faiſant $b = a = c$: on n'y a introduit les indéterminées conſtantes b, c, que pour la rendre ſuſceptible de plus de varieté ſans ſortir des conditions du Problême.

Voici quelques Corollaires de cette derniere équation $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} - y^{2n}}}$ leſquels ſuffiront pour faire voir l'uſage promis de l'intégrale $dx\sqrt{y}$ que nous venons d'emprunter de M. le Marquis de l'Hôpital.

COROLLAIRE I.

Soit, si l'on veut, $n=2$, c'est-à-dire les pressions précédentes de la Courbe *FM* en raison des quarrés des hauteurs *PM* (y) des chutes du poids, faites du point *A* le long de cette Courbe, ou (suivant l'hypothêse de Galilée sur la pesanteur) en raison des quatriémes puissances des vitesses de ce poids en chaque point *M*; l'équation précédente $dx=\frac{y^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n}-y^{2n}}}$ se changera ici

en $dx=\frac{yydy}{\sqrt{25a^4-y^4}}$, qui est celle que M. (Jacques) Bernoulli a assignée à la Courbe élastique dans les Actes de Leipsik de 1694. pag. 272. & de 1695. pag. 538. dans lesquels a signifie la même chose qu'ici $a\sqrt{5}$. Ce qui fait voir que cette Courbe élastique seroit celle de ce cas-ci.

COROLLAIRE II.

Si l'on suppose $n=1$, c'est-à-dire les pressions précédentes de la Courbe cherchée, en raison des hauteurs des chutes du poids qui la doit comprimer, ou (suivant l'hypothése de Galilée sur la pesanteur) en raison des quarrés des vitesses de ce poids le long de cette Courbe; la seconde équation générale $dx=\frac{y^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n}-y^{2n}}}$, se

changera ici en $dx=\frac{ydy}{\sqrt{9aa-yy}}$, dont l'intégrale est $x=$

$-\sqrt{9aa-yy}+q$: de sorte que le cas de $x=0$ en *A*, rendant pareillement de ce point $y=0$, & réduisant ainsi cette intégrale à $0=-3a+q$ d'où résulte $q=3a$; cette intégrale complette doit être $x=3a-\sqrt{9aa-yy}$, ou $\sqrt{9aa-yy}=3a-x$, dont le quarré $9aa-yy=9aa-6ax+xx$, donne $yy=6ax-xx$, qui est une équation au cercle dont le rayon est $=3a$, & qui fait voir que ce cercle seroit la Courbe requise en ce cas-ci. M. Saurin l'a aussi

trouvé, & en a rendu pareillement gloire à M. le Marquis de l'Hôpital.

COROLLAIRE III.

Si présentement on ſuppoſe $n = \frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, les preſſions précédentes de la Courbe FM, en raiſon des racines quarrées des hauteurs des chutes du poids comprimant, ou (ſuivant l'hypothêſe de Galilée ſur la peſanteur) en raiſon des viteſſes de ce poids le long de cette Courbe ; la précédente équation générale $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} - y^{2n}}}$, ſe changera tout d'un coup en $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{4a-y}}$ qui eſt une équation à la Cycloïde pour ce cas-ci ; dont M. Parent a donné la Syntheſe dans les Mem. de 1708. pag. 224.

M. Parent a eu raiſon de dire (*page* 227.) que *la Methode* ou l'Analyſe de ce cas particulier des preſſions en raiſon des viteſſes, ou en raiſon réciproque des inſtans employés à parcourir des élemens conſtans de la Courbe cherchée, *eſt maintenant dans les mains de tout le monde.* Car M. le Marquis de l'Hôpital ayant donné $\frac{2ayddx}{dvdy} + \frac{adx}{dv}$ pour l'expreſſion générale de ces preſſions totales perpendiculaires à la Courbe cherchée, ce cas de telles preſſions en raiſon des viteſſes $\sqrt{ay}$ du corps comprimant en tombant le long de cette Courbe, donne tout d'un coup $\sqrt{ay} = \frac{2ayddx}{dvdy} + \frac{adx}{dv} = \frac{2ayddx + adxdy}{dvdy}$, ou $dvdy\sqrt{y} = 2yddx\sqrt{a} + dxdy\sqrt{a}$, ou bien auſſi $\frac{dvdy}{2} = \frac{2yddx + dxdy}{2\sqrt{y}} \times \sqrt{a}$, dont l'intégrale (à cauſe de dv conſtante) eſt $\frac{ydv}{2} = dx\sqrt{y} \times \sqrt{a} = dx\sqrt{ay}$, ou $2dx\sqrt{ay} = ydv$; & ſon quarré $4aydx^2 = yydv^2 = yydx^2 + yydy^2$, lequel donnant $4adx^2 - ydx^2 = ydy^2$, donne auſſi $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{4a-y}}$ pour l'équation de la Courbe cherchée FM, laquelle on voit être encore une Cycloïde ordinaire, & la même que la précédente.

COROL.

COROLLAIRE IV.

Si l'on ſuppoſe $n = -1$, c'eſt-à-dire les preſſions de la Courbe FM en raiſon réciproque des hauteurs PM, ou des quarrés des viteſſes du poids en chaque point M, l'équation $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} - y^{2n}}}$ ſe changera en $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{1}{aa} - \frac{1}{yy}}} = \frac{ady}{\sqrt{yy-aa}} = \frac{2}{a} \times \frac{aady}{2\sqrt{yy-aa}}$, dont l'intégrale eſt $x = \frac{2}{a} \times \int \frac{aady}{2\sqrt{yy-aa}}$ dépendante de la quadrature de l'hyperbole.

Quelques autres valeurs qu'on donne à n *, on trouvera de même les Courbes ſuſceptibles des preſſions qui y conviennent, ou bien leur impoſſibilité, ſuppoſé les intégrations neceſſaires.*

REMARQUE.

I. Si entre les valeurs de n on ſuppoſe $n = 0$, & conſéquemment $y^n = y^0 = 1$, c'eſt-à-dire, les preſſions de la Courbe par tout les mêmes, la ſeconde équation générale $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} - y^{2n}}}$ de la Solution, ſe réduira à $dx = \frac{dy}{\sqrt{1-1}} = \frac{dy}{0}$; ce qui fait voir qu'en ce cas la Courbe FM dégénereroit en une ligne droite horizontale dont la charge ou la preſſion, toûjours la même, feroit ſeulement égale à la peſanteur entiere du poids alors toute employée à cette compreſſion ſans le ſecours d'aucune force centrifuge, ce poids y demeurant librement en repos contre la condition du Problême qui l'exige tombant en vertu de ſa peſanteur.

II. Cette excluſion de la force centrifuge venant du concours des hypothêſes $b = a$, $n = 0$, il faut ſe ſervir ici de la premiere équation générale $dx = \frac{by^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times aac^{2n} - bby^{2n}}}$

de la Solut. au lieu de la seconde $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} - y^{n2}}}$;
& en employant l'hypothêse de $n=0$ dans cette premiere équation dont a, b, c, font de differentes valeurs constantes quelconques, elle se réduira pour lors à $dx = \frac{bdy}{\sqrt{aa-bb}}$; ce qui, en faisant $a > b$, fait voir que la ligne cherchée FM seroit à la verité encore une ligne droite, mais présentement inclinée à l'horizon d'un angle dont le sinus seroit à celui de son complément : : $dy. dx$: : $\sqrt{aa-bb}. b$. On voit aussi que cette ligne ne seroit encore comprimée dans ce cas-ci de $n=0$, que par la seule pesanteur du poids sans le secours d'aucune force centrifuge, un corps mû le long d'une ligne droite n'en ayant jamais par raport à elle.

Pour ce qui est de l'impression que le poids fait ainsi par sa seule pesanteur (a) sur cette ligne droite inclinée à l'horizon suivant l'angle qu'on lui vient de déterminer ; on la trouvera $=b$ si l'on considere que l'équation $dx = \frac{bdy}{\sqrt{aa-bb}}$ de cette ligne, donnant $dy = \frac{dx\sqrt{aa-bb}}{b}$, & conséquemment $dv^2 (dx^2 + dy^2) = dx^2 + \frac{aadx^2 - bbdx^2}{bb} = dx^2 + \frac{aadx^2}{bb} - dx^2 = \frac{aadx^2}{bb}$, ou $dv = \frac{adx}{b}$, la substitution de cette valeur de dv dans l'expression générale $\frac{adx}{dv}$ de l'effort de la pesanteur du poids sur ce qu'elle presse, doit rendre pour ici cette expression $\frac{adx}{dv} = \frac{abdx}{adx} = b$; ce qui fera voir que la force de la pression du plan ici incliné doit être à celle de l'horizontal de l'art. 1. c'est-à dire à la pesanteur entiere du poids comprimant l'un & l'autre : : $b. a$.

III. Le cas de $n=0$, qui en rendant ainsi droite (*art.* 1. 2.) la ligne cherchée FM, sçavoir (*art.* 1.) horizontale en faisant $b=a$, & (*art.* 2.) inclinée à l'horizon en faisant $b < a$, pressée toûjours d'une même force $=a$ par le poids en repos lorsqu'elle est horizontale, & d'une force $=b$ par le même poids en mouve-

ment lorſqu'elle eſt inclinée à l'horizon ſuivant l'angle marqué dans l'art. 2. n'étant preſſée en chaque point que de la part de la peſanteur conſtante, faute de force centrifuge en ce cas-ci; il eſt viſible que la ligne droite poſéé de la ſeconde de ces deux manieres ſatisferoit au Problême de M. Bernoulli, s'il ne s'y agiſſoit que de preſſions égales moindres que la peſanteur, & ſans y requerir aucunes forces centrifuges qui y ſont toûjours anéanties par $n=0$. Mais ce Problême, outre des preſſions égales à la peſanteur du poids, exigeant des forces centrifuges qui avec cette peſanteur ayent auſſi part à ces preſſions conſtantes de la ligne cherchée; M. le Marquis de l'Hôpital, pour conſerver ces forces centrifuges, a ajoûté la grandeur conſtante $-dv\sqrt{a}$ au ſecond membre de l'intégrale immediate $dx\sqrt{y}=dv\sqrt{y}$ qui lui eſt venuë de la differentielle $\frac{2yddx+dydx}{2\sqrt{y}}=\frac{dydv}{2\sqrt{y}}$ réſultante des conditions de ce Problême : c'eſt pour cela, dis-je, qu'il en a conclu $dx\sqrt{y}=dv\sqrt{y}-dv\sqrt{a}$. Sans cela l'intégrale immediate $dx\sqrt{y}=dv\sqrt{y}$ ne lui donnant que $dx=dv=\sqrt{dx^2+dy^2}$; & conſéquemment $dy=0$, il n'auroit auſſi trouvé qu'une droite horizontale pour la ligne cherchée dans ſon Problême.

IV. On pourroit auſſi ajoûter la grandeur conſtante $\pm\frac{bdv}{ac^n}\times\frac{g^n\sqrt{g}}{2n+1}$ à l'intégrale $dx\sqrt{y}=\frac{bdv}{ac^n}\times\frac{y^n\sqrt{y}}{2n+1}$ trouvée dans la Solution précédente, & prendre $dx\sqrt{y}=\frac{bdv}{ac^n}\times\frac{y^n\sqrt{y}}{2n+1}\pm\frac{bdv}{ac^n}\times\frac{g^n\sqrt{g}}{2n+1}$ pour cette intégrale, celle-ci ayant la même differentielle que l'autre; ce qui donnant $\overline{2n+1}\times ac^n dx\sqrt{y}=\overline{y^n\sqrt{y}\pm g^n\sqrt{g}}\times bdv$, ou (en quarrant le tout) $\overline{2n+1}^2\times aac^{2n}ydx^2=\overline{y^n\sqrt{y}\pm g^n\sqrt{g}}^2\times bbdv^2=\overline{y^n\sqrt{y}\pm g^n\sqrt{g}}^2\times\overline{bbdx^2+bbdy^2}$, donneroit auſſi $dx=\frac{by^n\sqrt{y}\pm bg^n\sqrt{g}}{\sqrt{\overline{2n+1}^2\times aac^{2n}y-\overline{by^n\sqrt{y}\pm bg^n\sqrt{g}}^2}}\times dy$ pour l'équation générale de la Courbe cherchée dans le Problême précé-

dent : & si l'on y fait non-seulement $b=a=c$, comme dans la Solution de ce Problême, mais encore $g=a$; l'on y aura de même $dx = \frac{y^n\sqrt{y} \pm a^n\sqrt{a}}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n}y - \overline{y^n\sqrt{y} \pm a^n\sqrt{a}}^2}} \times dy$ pour l'équation requise.

Il n'y a plus qu'à faire $n=0$ dans cette derniere équation pour la changer tout d'un coup en $dx = \frac{\sqrt{y} \pm \sqrt{a}}{\sqrt{y - \overline{\sqrt{y} \pm \sqrt{a}}^2}} \times dy$ $= \frac{\sqrt{y} \pm \sqrt{a}}{\sqrt{y - y \mp 2\sqrt{ay} - a}} \times dy = \frac{\sqrt{y} \pm \sqrt{a}}{\sqrt{\pm 2\sqrt{ay} - a}} \times dy$; c'est-à-dire, en $dx = \frac{\sqrt{y} + \sqrt{a}}{\sqrt{-2\sqrt{ay} - a}} \times dy$, & en $dx = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}} \times dy$, dont la premiere est imaginaire, & la seconde est celle de M. le Marquis de l'Hôpital. Et ainsi de toutes les autres valeurs de n.

Après avoir ainsi trouvé les Courbes des pressions perpendiculaires causées tout à la fois par la force centrifuge & par la pesanteur d'un poids comprimant en raison des puissances quelconques des hauteurs de sa chute en tombant le long de ces Courbes ; voici à cette occasion les Courbes de pareilles pressions causées de même en raison de ces puissances quelconques par chacune de ses forces considerées séparement ; & les courbes sur lesquelles les pressions perpendiculaires d'une de ces forces seroient à celles de l'autre en raison donnée quelconque.

PROBLEME II.

Trouver une Courbe FM *dont les pressions perpendiculaires causées par la seule force centrifuge d'un poids tombant de* A *le long de cette Courbe, soient en raison des puissances* n *des hauteurs* PM *de sa chute.*

SOLUTION.

Les noms & la Figure demeurant ici les mêmes que dans le Problême 1. l'on aura $\frac{2ayddx}{dvdy}$ pour l'expression générale de ces pressions en faisant dv constante. Donc la condition de ce Problême-ci donnera $\frac{2ayddx}{dvdy} =$

$= \frac{by^n}{c^n}$, ou $2ac^n ddx = bdv \times y^{n-1} dy$, que dv (*hyp.*) conſtante permet d'intégrer en $2ac^n dx = bdv \times \frac{y^n}{n}$, d'où réſulte $2nac^n dx = by^n dv$, de qui le quarré $4nnaac^{2n}dx^2 = bby^{2n}dv^2 = bby^{2n}dx^2 + bby^{2n}dy^2$ donnant $4nnaac^{2n}dx^2 - bby^{2n}dx^2 = bby^{2n}dy^2$, donnera $dx = \frac{by^n dy}{\sqrt{4nnaac^{2n} - bby^{2n}}}$, ou (en faiſant $b = a = c$) $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{4nna^{2n} - y^{2n}}}$ pour l'équation de la Courbe cherchée.

On voit que cette Courbe doit être ſemblable à celle du Problême 1. n'y ayant de difference, qu'en ce qu'au lieu de $4nn$ qui ſont ici, il y a là $\overline{2n+1}^2$: auſſi les Corollaires de ce Problême-ci donnent-ils des Courbes de même eſpece que ceux de celui-là en pareils cas, c'eſt-à-dire à chaque valeur de n la même pour l'un & pour l'autre: par exemple,

COROLLAIRE I.

Si l'on veut $n = 2$, la ſeconde $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{4nna^{2n} - y^{2n}}}$ des deux équations précedentes ſe changera en $dx = \frac{yydy}{\sqrt{16a^4 - y^4}}$. Ce qui fait voir que la Courbe ici cherchée ſera comme dans le même cas du Corol. 1. du Prob. 1. L'Elaſtique aſſignée par M. (Jaques) Bernoulli dans les Actes de Leipſik de 1694. pag. 272. & de 1695. pag. 538. dans leſquels a ſignifie la même choſe qu'ici $2a$, & que $a\sqrt{5}$ dans le Corol. 1. du Prob. 1.

COROLLAIRE II.

Si l'on ſuppoſe $n = 1$, la même équation générale $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{4nna^{2n} - y^{2n}}}$ ſe changera en $dx = \frac{ydy}{\sqrt{4aa - yy}}$, qui eſt une équation au cercle comme en pareil cas du Cor. 2. du Prob. 1.

COROLLAIRE III.

Si l'on ſuppoſe $n = \frac{1}{2}$, cette même équation générale $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{4nna^{2n} - y^{2n}}}$ ſe changera en $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{a-y}}$, qui eſt une équation à la Cycloïde ordinaire comme en pareil cas du Corol. 3. du Prob. 1.

COROLLAIRE IV.

Si l'on ſuppoſe $n = -1$, la même équation générale $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{4nna^{2n} - y^{2n}}}$ ſe changera en $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{4}{aa} - \frac{1}{yy}}} = \frac{ady}{\sqrt{4yy - aa}}$, qui eſt une équation à une Courbe ſemblable à celle du Corol. 4. du Prob. 1. en pareil cas, & ſemblablement dépendante de la quadrature de l'hyperbole. Ce ſera la même choſe de toutes les autres valeurs de n, ſuppoſé les intégrations neceſſaires.

REMARQUE.

I. Il eſt pourtant à remarquer que ſi l'on ſuppoſe $n = 0$, c'eſt à-dire ici, la force centrifuge perpendiculaire conſtante & par tout la même, l'une & l'autre des deux équations générales de ce Problême-ci ſe changera en l'imaginaire $dx = \frac{dy}{\sqrt{-1}}$; ce qui n'arrive point dans la générale du Probl. 1. Mais cela ne venant que de ce que cette ſuppoſition de $n = 0$, rend ici $4nn = 0$, & là $\overline{2n+1}^2 = 1$, toutes les autres valeurs de n ne laiſſent pas de donner des Courbes ſemblables de part & d'autre, ou également impoſſibles.

II. Il eſt vrai que la differentielle $2ac^n ddx = bdv \times y^{n-1} dy$ de la premiere des deux équations générales du preſent Prob. 2. & conſéquemment de la ſeconde, eſt auſſi celle de $2ac^n dx = bdv \times \frac{y^n}{n} \pm bdv \times \frac{g^n}{n}$, d'où réſulte pareillement

$dx = \frac{by^n \pm bg^n}{\sqrt{4nnaac^{2n} - bb \times \overline{y^n \pm g^n}^2}} \times dy$ pour l'équation de la Courbe ici requise ; mais le cas présent de $n = 0$, la réduisant à $dx = \frac{b \pm b}{\sqrt{-bb \times \overline{1 \pm 1}^2}} \times dy = \frac{1 \pm 1}{\sqrt{-\overline{1 \pm 1}^2}} \times dy$, c'est-à-dire, à $dx = \frac{dy}{\sqrt{-4}}$, ou à $dx = \frac{dy}{\sqrt{-0}}$, y devient aussi imaginaire ou impossible.

III. Ce n'est pourtant pas que ce cas soit absolument impossible, mais seulement qu'il est exclus de la Solut. préced. par le changement qu'on y a fait de $\frac{2ayddx}{dvdy} = \frac{by^n}{c^n}$ en $\frac{2addx}{dvdy} = \frac{by^{n-1}}{c^n}$, lequel faisant ainsi évanoüir y de $\frac{2ayddx}{dvdy}$, comme compris dans y^n, il n'en reste plus dans la suite pour ce cas de $n = 0$; au lieu que cet y auroit resté dans la differentielle $\frac{2ayddx}{dvdy} = b$ propre de ce cas, telle qu'elle auroit résulté de $\frac{2ayddx}{dvdy} = \frac{by^n}{c^n}$ en y faisant d'abord $n = 0$: c'est, dis-je, tellement cet évanoüissement de y dans $\frac{2ayddx}{dvdy} = b$ qui cause cette exclusion ou impossibilité apparente, qu'en l'y laissant la Courbe de ce cas se trouvera trés réelle. En effet $\frac{2ayddx}{dvdy} = b$ donnant $2addx = bdv \times \frac{dy}{y}$, donnera aussi (en intégrant, & dv demeurant constante) $2adx = bdv \times ly$, dont le quarré $4aadx^2 = bb \times ly^2dv^2 = bb \times ly^2dx^2 + bb \times ly^2dy^2$ donnant $4aadx^2 - bb \times ly^2dx^2 = bb \times ly^2dy^2$, donne aussi $dx = \frac{blydy}{\sqrt{4aa - bbly^2}}$ pour l'équation de ce cas-ci, laquelle doit être réelle tant que bly sera moindre que $2a$.

IV. La differentielle $2addx = bdv \times \frac{dy}{y}$, ayant aussi $2adx = bdv \times ly + bdvlg$ pour intégrale, on trouvera encore de même $\frac{ly \pm lg}{\sqrt{4aa - bb \times \overline{ly \pm lg}^2}} \times bdy$ pour l'équation de la Cour-

be de ce cas-ci, laquelle sera encore réelle tant que $b \times ly + b \times lg$ sera moindre que $2a$.

PROBLEME III.

Trouver la Courbe FM *dont les pressions perpendiculaires causées par la seule pesanteur d'un poids tombant de* A *le long de cette Courbe, soient en raison des puissances* n *des hauteurs* PM *de sa chute.*

SOLUTION.

Les noms & la Figure demeurant encore ici les mêmes que dans le Problême 1. l'on aura $\frac{adx}{dv}$ pour l'expression générale de ces pressions. Donc la condition de ce Problême-ci donnera $\frac{adx}{dv} = \frac{by^n}{c^n}$, ou $ac^n dx = by^n dv$; & (en quarrant le tout) $aac^{2n}dx^2 = bby^{2n}dv^2 = bby^{2n}dx^2 + bby^{2n}dy^2$, ou $aac^{2n}dx^2 - bby^{2n}dx^2 = bby^{2n}dy^2$; d'où résulte $dx = \frac{by^n dy}{\sqrt{aac^{2n} - bby^{2n}}}$, ou (en faisant $b = a = c$) $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{a^{2n} - y^{2n}}}$ pour l'équation de la Courbe cherchée, qu'on voit être encore semblable à celles des Probl. 1. 2. n'y ayant de difference ici & là que dans les coëfficiens de aac^{2n}, a^{2n}.

REMARQUE.

I. On ne s'arrêtera point ici à faire voir que dans toutes les suppositions de $n = 2$, $n = 1$, $n = \frac{1}{2}$, $n = -1$, &c. on aura pareillement ici des Courbes semblables à celles qu'on a déduites des Solutions des Prob. 1. 2. pour tous ces cas, excepté dans celui de $n = 0$, qu'on vient de voir dans les art. 1. 2. de la Remarque sur le Prob. 2. ne pouvoir convenir à ce Problême-là.

II. Si au lieu de faire ici $\frac{adx}{dv} = \frac{by^n}{c^n}$, l'on y eût fait $\frac{adx}{dv} = \frac{by^n}{2nc^n}$, l'on y auroit eu la même équation $dx = \frac{by^n dy}{\sqrt{4nnaac^{2n} - bby^{2n}}}$ qu'on a trouvée dans la Solution du Problême 2. Ce qui prouve encore la ressemblance, & même

même l'identité des Courbes de ces deux Problêmes 2 3.

PROBLEME IV.

Trouver la Courbe FM *dont les pressions perpendiculaires causées par la force centrifuge d'un poids tombant de* A *le long de cette courbe, soient aux pressions perpendiculaires causées par la pesanteur de ce poids, en raison constante quelconque de* m *à* n.

SOLUTION.

Les noms & la Figure demeurant encore ici les mêmes que dans le Problême 1. l'on aura ici $\frac{2ayddx}{dvdy} . \frac{adx}{dv} :: m . n$. D'où résulte $2nyddx = mdxdy$, ou $2nyddx - mdxdy = 0$: de sorte qu'en multipliant le tout par $\frac{y^{m-1}dx^{2n-1}}{y^{2m}}$, l'on aura pareillement ici $\frac{2ny^m dx^{2n-1}ddx - mdx^{2n}y^{m-1}dy}{y^{2m}} = 0$, dont l'intégrale est $\frac{dx^{2n}}{y^m} = \frac{dv^{2n}}{a^m}$ en prenant dv constante comme l'est a. Et cette intégrale se changeant en $\frac{dx^2}{y^{\frac{m}{n}}} = \frac{dv^2}{a^{\frac{m}{n}}}$, ou en $a^{\frac{m}{n}}dx^2 = y^{\frac{m}{n}}dv^2 = y^{\frac{m}{n}}dx^2 + y^{\frac{m}{n}}dy^2$, & delà en $a^{\frac{m}{n}}dx^2 - y^{\frac{m}{n}}dx^2 = y^{\frac{m}{n}}dy^2$; il en résulte $dx = \frac{y^{\frac{m}{2n}}dy}{\sqrt{a^{\frac{m}{n}} - y^{\frac{m}{n}}}}$ pour l'équation de la Courbe cherchée.

COROLLAIRE.

Il est manifeste que les hypotheses de $m = 4n$, $m = 2n$, $m = n$, $m = -2n$, &c. donneront ici des Courbes semblables à celles qui ont résulté de $n = 2$, $n = 1$, $n = \frac{1}{2}$, $n = -1$, &c. dans les Corol. 1. 2. 3. 4. des Probl. 1. 2. & qui en résulteroient aussi dans la Solut. du Probl. 3.

REMARQUE.

I. Au lieu de l'intégrale $\frac{dx^{2n}}{y^m} = \frac{dv^{2n}}{a^m}$, on pouvoit prendre pareillement ici $\frac{dx^{2n}}{y^m} = \frac{b^{2n}dv^{2n}}{\overline{2aa}^{2n} \times c^m}$, la differentielle de ces deux intégrales étant la même dans la présente hypothese de dv constante ; & l'on auroit eu $\frac{dx^2}{y^{\frac{m}{n}}} = \frac{b^2dv^2}{\overline{2na}^2 \times c^{\frac{m}{n}}} = \frac{bbdv^2}{4nnaac^{\frac{m}{n}}}$, ou $4nnaac^{\frac{m}{n}} dx^2 = bby^{\frac{m}{n}} dv^2 = bby^{\frac{m}{n}} dx^2 + bby^{\frac{m}{n}} dy^2$; ce qui donnant $4nnaac^{\frac{m}{n}} dx^2 - bby^{\frac{m}{n}} dx^2 = bby^{\frac{m}{n}} dy^2$, l'on auroit aussi trouvé $dx = \frac{by^{\frac{m}{2n}} dy}{\sqrt{4nnaac^{\frac{m}{n}} - bby^{\frac{m}{n}}}}$ pour l'équation de la Courbe cherchée.

II. Si l'on suppose présentement $m = 2nn$, cette équation se changera en $dx = \frac{by^n dy}{\sqrt{4nnaac^{2n} - bby^{2n}}}$ la même que dans les Probl. 2. 3. Ce qui prouve non seulement la ressemblance des Courbes de ces trois Problêmes, mais encore l'identité de ces Courbes en faisant ici $m = 2nn$; & si l'on joint à ceci ce qu'on a vû dans les Corol. du Probl. 2. de la ressemblance des Courbes de ce Problême & du Probl. 1. on verra sans peine que dans les mêmes cas les quatre Problêmes précédens donnent des Courbes semblables.

Cela se voit encore tout d'un coup en jettant les yeux sur les deux équations générales $dx = \frac{by^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times aac^{2n} - bby^{2n}}}$, $dx = \frac{by^n dy}{\sqrt{4nnaac^{2n} - bby^{2n}}}$ dont la premiere est celle de la Courbe du Probl. 1. & la seconde, celle de la Courbe de chacun des trois autres : ces deux équations étant de

même nature, n'y ayant de difference que dans les coëfficiens $\overline{2n+1}^2$, $4nn$, de la grandeur conſtante aac^{2n}.

III. Puiſque (*hyp.*) dans ce dernier Prob. 4. la preſſion cauſée par la force centrifuge du poids comprimant, eſt à ce qu'en cauſe ſa peſanteur :: $m.n.$ la ſuppoſition qu'on vient de faire (*art.* 2.) de $m=2nn$, rendroit ce raport :: $2nn.n$ :: $2n.$ 1 :: $n.\frac{1}{2}$.

Cela ſuit encore des Solutions des Probl. 2. 3. Car puiſque (*Prob.* 2.) $\frac{2ayddx}{dvdy}=\frac{by^n}{c^n}$, & (*Remarque art.* 2. *Prob.* 3.) $\frac{adx}{dv}=\frac{by^n}{2nc^n}$, la preſſion de la force centrifuge $\left(\frac{2ayddx}{dvdy}\right)$ doit auſſi être ſuivant ces deux Problêmes à celle $\left(\frac{adx}{dv}\right)$ de la peſanteur :: $\frac{by^n}{c^n}.\frac{by^n}{2nc^n}$ :: $2n.$ 1 :: $n.\frac{1}{2}$. Ce qui eſt encore une confirmation des reſſemblances précédentes.

OBSERVATIONS SUR LA RHUBARBE.

Par M. Boulduc.

1710. 15. & 29. Janvier.

Nous avons dans divers Auteurs une hiſtoire aſſez exacte de la Rhubarbe, pour me diſpenſer d'en donner ici la deſcription, ayant ſeulement deſſein de rapporter ce que j'ai connu de ſes effets par la pratique, & de ſes principes par l'analyſe.

Les expériences apprennent que cette racine eſt un purgatif des plus doux & des plus efficaces, mais l'on ſoûtient communément qu'elle eſt en même tems aſtringente; d'où l'on infere qu'elle évacuë en fortifiant & en reſſerrant, & qu'elle peut, par de certaines préparations, être depoüillée de ſa vertu cathartique & reſter toute aſtringente, comme ſi dans ſon état naturel elle étoit

composée de deux parties qui puſſent aiſément ſe diviſer & être ſéparées l'une de l'autre.

Perſonne n'oſera jamais conteſter la vertu purgative de la Rhubarbe; mais qu'elle reſſerre & fortifie encore par elle-même, c'eſt ce qui me ſemble difficile à proüver par des faits ſenſibles & convaincans. Je ſçai qu'outre la ſaveur amere & nullement déſagreable qu'on y remarque quand on la mâche, & qui ſemble indiquer ſa qualité purgative, la langue ſe trouve auſſi frappée d'une certaine âpreté ſemblable à celle qui s'obſerve dans tout ce que nous appellons aſtringent, & qui a fait dire que la Rhubarbe étoit auſſi aſtringente; mais juſqu'à preſent on n'a pû encore démontrer que les particules qui cauſent cette âpreté ſur la langue, faſſent ſur le ventricule & ſur le conduit inteſtinal une impreſſion ſuffiſante pour les reſſerrer & les faire entrer en des contractions oppoſées à celles par leſquelles les matieres étoient déterminées à y couler de haut en bas, comme on l'éprouve de l'Ypecacuanha, qui manifeſtement purge & reſſerre tout à la fois; & il n'eſt pas aiſé non-plus de ſe perſuader qu'après auoir eſſayé d'ôter à la Rhubarbe la proprieté qu'elle a d'agir par les déjections, il ne lui reſte plus que celle de reſtraindre.

J'avouë que la Rhubarbe terrefiée ne purge preſque pas, & qu'après avoir tiré la teinture de cette racine, le marc n'eſt aucunement purgatif; mais par toutes les épreuves que j'ai faites dans les occaſions les plus propres à m'en éclaircir, je n'ai pû encore m'aſſurer que la Rhubarbe, après ces deux préparations & d'autres pareilles, ſoit veritablement aſtringente.

Il eſt conſtant que dans tous les purgatifs dont on a tiré la teinture par des menſtruës convenables, il ſe rencontre outre cette ſubſtance mielleuſe qu'on nomme extrait, qui contient toute la vertu purgative, une ſeconde ſubſtance terreſtre qui eſt le marc qui ſert comme de frein pour moderer l'activité de l'autre lorſqu'elles ne ſont point ſéparées, & qui ne purge en nulle façon. Il

faudroit donc dire sur ce pied-là que le marc ou le résidu de tous les purgatifs seroit astringent, ce qu'on n'a point encore avancé, parce qu'afin qu'un médicament passe pour astringent, il doit sensiblement resserrer & être employé avec succès dans les dévoyemens.

Je vais donc maintenant rapporter ce que j'ay nouvellement observé de la Rhubarbe par les differentes teintures ou extractions & par la distillation, ainsi que j'en ai usé à l'égard des autres purgatifs dont j'ai parlé dans d'autres Assemblées.

J'ai mis en infusion au bain de cendres à chaleur toûjours égale pendant 24. heures deux onces de Rhubarbe choisie coupée par tranches dans 24 onces d'eau de riviere pure; j'en ai ensuite coulé l'infusion que j'ai legerement exprimée; la teinture ayant été bien reposée étoit d'un beau jaune foncé tirant sur le rouge & d'une amertume supportable, avec une âpreté ou astriction médiocre: je n'ai point fait boüillir cette infusion, persuadé par quantité d'expériences que les purgatifs, principalement d'entre les vegetaux, perdent beaucoup de leur vertu par la grande chaleur ou par l'ébulition, ayant fait évaporer cette teinture jusqu'à consistance d'extrait solide, il m'en est resté quatre dragmes & douze grains.

La teinture d'une dragme de Rhubarbe préparée, comme je viens de le specifier, purge davantage que l'extrait de deux dragmes de Rhubarbe fait de la même teinture, & même 24 grains de Rhubarbe en substance purge plus que l'infusion d'une dragme & demie, & encore plus qu'une dragme d'extrait; il en est de même du Senné & de plusieurs autres purgatifs de cette nature, d'où l'on peut conclure qu'il est souvent plus à propos d'employer les médicamens, sur-tout les purgatifs, sans les décomposer & tels que la nature les produit, à moins que le Medecin n'ait des raisons particulieres pour en user autrement.

Je remarquerai aussi en passant que les infusions des purgatifs vegetaux agissent mieux & ont de meilleurs ef-

fets que les décoctions, d'où il paroît que les principes les plus actifs de ces mixtes se dissipent par la chaleur : l'on s'apperçoit même que la plûpart de ces vegetaux gardez trop long-tems, sur tout en poudre, diminuent beaucoup de leur énergie.

Pour reprendre le fil de nôtre opération, je dirai qu'ayant fait dessécher le marc de la Rhubarbe dont j'avois tiré cette premiere teinture & le premier extrait ; j'ai trouvé le marc du poids d'une once trois dragmes & quelques grains, & j'ai tiré de la teinture de ce marc par simple infusion : cette seconde teinture étoit plus foible en couleur, moins amere & moins âpre sur la langue, & enfin moins odorante que la précedente, de laquelle elle approchoit fort ; mais j'ai remarqué en diverses rencontres que telles secondes teintures purgeoient moins que les premieres, quoique celles-là fussent données en plus grande dose, je n'y ai point non plus remarqué d'astriction.

Après avoir fait évaporer cette seconde teinture bien séparée de ses fêces, j'en ai encore eu trois dragmes d'extrait assez solide ; ce dernier extrait purge veritablement, mais notablement moins que celui de la premiere teinture.

Le résidu de cette seconde infusion desséché ne pesoit que sept dragmes, il étoit presqu'insipide & avoit peu d'âpreté.

Je n'ai pas laissé d'en faire une troisiéme infusion par ébulition ; la décoction avoit une couleur noire, obscure, sans odeur, avec peu de saveur & presque nulle âpreté.

Je ne me suis pas aperçu que cette troisiéme teinture & son extrait purgeassent, ni qu'ils resserrassent, quoiqu'on les prît en une quantité considerable. J'ai encore retiré de cette troisiéme infusion ou décoction une dragme d'extrait dur, mais d'une consistance peu liée & très terrestre ; ce dernier marc après avoir été bien desséché ne pesoit plus que six dragmes moins quelques grains, sans odeur ni saveur, n'ayant pas même donné de teinture à l'esprit de vin.

J'ai souvent fait prendre de ces differens résidus de Rhubarbe à des malades, sans aucun effet sensible d'astriction.

Les deux onces de Rhubarbe par ces trois infusions ont ainsi rendu une once douze grains d'extrait.

Voilà tout ce que j'ai remarqué de la Rhubarbe examinée par le dissolvant aqueux, vous allez voir ce que m'en a produit le dissolvant sulphureux.

J'ai tiré avec suffisante quantité d'esprit de vin rectifié la teinture d'une once de Rhubarbe dans des vaisseaux convenables par un feu de digestion, lent au commencement, & un peu plus fort sur la fin durant 24 heures. Cette teinture étoit fort legere, d'un beau jaune de citron, & très-differente de celle qui avoit été preparée avec l'eau, non-seulement quant à la couleur, mais encore à raison de la saveur; car cette teinture faite avec l'esprit de vin, est peu amere & presque sans âpreté; ce qui peut faire croire que la qualité purgative de la Rhubarbe réside plus dans ses parties salines que dans ses souphres, qui n'y doivent être que peu considerables, vû que la teinture en étoit très legere: Je soupçonne même (comme je l'ai dit plusieurs fois) que ce peu de teinture que l'esprit de vin en a tiré, provient de ce qui reste toûjours de phlegme, dont l'esprit de vin, quelque rectifié qu'il semble être.

Ayant retiré par la distillation l'esprit de vin de cette teinture, l'extrait restant pesoit une dragme & demie; il étoit très beau, sentant bon, & laissant sur la langue le vrai goût de la Rhubarbe; demie-dragme de cet extrait purge légerement & fort doucement.

Cette teinture dont l'esprit de vin se charge, ne devient point laiteuse en y mêlant de l'eau, ce qui montre qu'elle ne contient que peu ou point de parties resineuses.

Le résidu de la Rhubarbe où l'esprit de vin avoit passé, pesoit six dragmes après son parfait desséchement, & il étoit presqu'aussi beau, presqu'aussi amer & aussi âpre

qu'étoit la Rhubarbe avant qu'on l'eût employée.

J'ai donné plusieurs fois de ce marc au poids de demie dragme, qui a purgé comme auroit pû faire une pareille dose de Rhubarbe; mais il n'a pas toûjours eu autant d'effet, quoiqu'il n'ait jamais manqué de purger.

J'ai encore retiré la teinture de ce résidu avec de l'eau, & j'en ai fait l'extrait; cette teinture & cet extrait purgent comme les premiers dont j'ai parlé.

J'ai remarqué si peu de qualitez dans les dernieres teintures de ce marc, que je n'en ai presque pas fait d'usage.

J'ajoûterai que par l'examen que j'ai fait de toutes ces teintures & de tous ces extraits; ce qu'il y a de plus purgatif & d'astringent dans la Rhubarbe passe dans la premiere infusion & dans le premier extrait, puisque l'un & l'autre sont plus ameres & plus âpres que les autres.

La distillation de la Rhubarbe par la cornuë à la maniere ordinaire, non plus que les autres purgatifs distilez de même, ne m'ont pas beaucoup instruit. De la Rhubarbe ainsi distilée, j'ai tiré par le premier degré du feu un phlegme qui avoit quelque odeur de la Rhubarbe, peu d'âpreté & de saveur: les autres portions qui viennent ensuite sont acides par degrez Les dernieres ne fournissent gueres d'huile; car les mixtes pourvûs de peu de resine, rendent peu d'huile par la distillation: le sel extrait du *Caput mortuum* est en petite quantité & fermente avec les acides.

Par tous les faits que je viens de rapporter, il me semble qu'on doit être aussi incertain de la faculté astringente de la Rhubarbe, qu'assuré de sa faculté purgative; celle-là n'étant établie que sur un leger goût d'âpreté ou d'astriction qu'on y observe; la terrefaction qu'on en fait sur le feu, ne lui laissant qu'une substance terrestre, des proprietez de laquelle on ne sçait encore rien de constant; de sorte que si dans les dévoyemens on se sent plus soulagé & moins abatu après l'usage de la Rhubarbe que si l'on avoit pris la plûpart des autres purgatifs, c'est parce qu'ordinairement elle ne cause ni tranchées ni dégoûts,

&

& qu'en dégageant les vaiſſeaux, des humeurs qui les incommodoient, elle permet aux reſſorts de reprendre leur tenſion & leur direction naturelles.

OBSERVATION

De l'Eclipſe de Lune du 13 *Février au ſoir de l'an* 1710.

PAR Mrs CASSINI & MARALDI.

POur obſerver l'Eclipſe de Lune qui eſt arrivée le 13 de Février au ſoir, nous avions préparé une Lunette de 8 pieds qui avoit à ſon foyer un Chaſſis diviſé en pluſieurs intervalles égaux par des fils de ſoye poſez à égale diſtance l'un de l'autre & paralleles entr'eux, qui devoient ſervir à déterminer les phaſes de la Lune éclipſée.

1710. 19. Février.

Le ſoir deux heures avant l'Eclipſe, nous obſervâmes que le diametre apparent de la Lune comprenoit préciſément 22. de ces intervalles, & que chacun étoit égal à 33 minutes de doigt.

Ces intervalles entre leſquels la Lune étoit compriſe, comparez avec la longueur de la Lunette, donnerent le diametre apparent de la Lune de $33' \, 30''$, préciſément comme nous l'avons trouvée auſſi par l'obſervation de ſon paſſage par un cercle horaire, toutes les réductions étant faites.

Le Ciel n'a pas toûjours été favorable pour l'obſervation de cette Eclipſe, la Lune ayant preſque toûjours paru au travers des nuages qui ſe confondoient avec le terme de l'ombre, & rendoient ſouvent douteuſe la détermination des phaſes. Il n'y eut qu'environ une demie-heure avant la fin que la Lune parut claire, & qu'on put obſerver l'Eclipſe aſſez exactement.

$9^h \, 10'$ La Lune ayant paru aſſez claire & bien terminée, on ne voïoit encore aucune marque d'Eclipſe.

9^h 18′ 30″ La Lune ayant paru au travers des nuages rares, l'Eclipſe paroît avoir commencé.

9 22 La partie éclipſée paroît égale à un intervalle entre deux fils, ce qui donne un peu plus de demi-doigt d'Eclipſe; mais l'ombre eſt mal terminée.

9 28 L'ombre a toûjours été mal terminée, & la Lune ſe couvre.

9 42 On voïoit la Lune au travers des nuages ſans rien diſtinguer.

10 14 La partie de la Lune compriſe entre le bord clair & les cornes de la Lune, étoit de dix intervalles; ce qui donne la grandeur de l'Eclipſe de 7 doigts & demi.

10 17 La Lune ayant paru aſſez claire, on a trouvé la grandeur de l'Eclipſe de 8 doigts 40 minutes; mais le terme de l'ombre qui tomboit ſur des taches obſcures rend cette détermination un peu douteuſe.

10 22 La diſtance entre les deux cornes de la Lune étoit de 20 intervalles & demi; ce qui donne la portion de la circonference de la Lune éclipſée de 222 degrez.

10 25 La partie claire de la Lune occupoit 4 intervalles & demi, d'où la grandeur de l'Eclipſe réſulte 9 doigts 32 minutes.

10 28 La Lune ſe couvre entierement, & ne ſe découvre qu'à 10^h 59′, & pour lors la partie claire m'a paru moindre qu'elle n'avoit été à 10^h 28′. Ainſi le milieu de l'Eclipſe a été plus proche de 11^h que de 10^h & demi.

11 5 28 Les nuages étant plus rares on a commencé de voir le Cœur du Lion, qui étoit éloigné vers l'Orient à l'égard du bord oriental de la Lune qui étoit éclairé de 8 intervalles des fils qui font 12 minutes & demi d'un grand cercle.

11^h	$12'$	$50''$	Le Cœur du Lion étoit dans le parallele du bord ſuperieur de la Lune.
11	19		La grandeur de l'Eclipſe eſt environ de 8 doigts.
11	22		La grandeur de l'Eclipſe eſt de 7 doigts 36'.
11	28		L'Eclipſe eſt de 7 doigts.
11	35½		La partie claire de la Lune comprenoit dix intervalles, ce qui donne la grandeur de l'Eclipſe de 6 doigts 30'
11	36	15	L'ombre eſt à Menelaüs.
	39	50	L'ombre au bord de *Mare ſerenitatis.*
11	41	20	L'ombre à Plinius.
11	44		La grandeur de l'Eclipſe eſt de 4 doigts 50'.
11	45	40	L'ombre à Dioniſius.
11	45	50	L'ombre paſſe par le milieu de Tycho.
11	47	10	L'ombre arrive au ſecond bord de Tycho.
11	50		Grandeur de l'Eclipſe, 4 doigts 18'.
11	51	20	L'ombre à Proclus.
11	54	45	L'ombre à *Promontorium acutum.*
11	57	50	L'ombre au bord de Caſpie.
12	59		L'Eclipſe eſt de 2 doigts 6 minutes.
12	4⅓		L'Eclipſe eſt de 1 doigt 31'.
12	8		L'Eclipſe eſt de 1 doigt.
12	11		Elle eſt de 25 minutes.
12	12½		J'ai jugé que c'étoit la fin de l'Eclipſe, quoique par le progrez des phaſes précedentes elle ait pû arriver deux ou trois minutes plus tard.

Outre les Obſervations que nous avons rapportées de la Lune avec le Cœur du Lion, nous en avons fait diverſes autres pendant le temps de l'Eclipſe & après pour la recherche de la parallaxe de la Lune; mais à cauſe des nuages qui empêcherent de faire des obſervations néceſſaires à une grande diſtance du Meridien, on ne peut pas profiter entierement comme on auroit ſouhaité, de cette rencontre qui étoit la plus favorable qui ſe ſoit préſentée depuis long-tems pour cette recherche.

OBSERVATIONS

De l'Eclipse de Lune arrivée la nuit entre le 13. & le 14. Février 1710. à l'Observatoire.

PAR MM. DE LA HIRE.

1710. 19. Fév.

LE Ciel fut toûjours couvert dans le commencement de cette Eclipse; cependant on ne laissoit pas de voir la Lune de tems en tems au travers de quelques nuages; mais comme elle disparoissoit presque à l'instant, nous ne pûmes rien déterminer de bien juste. Nous estimâmes seulement que le commencement avoit pû être vers 9^h $16'$. L'ombre de la Terre ne nous paroissoit pas bien terminée comme on la voit quelques fois; nous observâmes seulement que

à 10^h $15'$ l'Eclipse étoit de 9 doigts 24 minutes &

à 10 18 elle étoit de 9 doigts 30 minutes.

Le Ciel se couvrit ensuite de telle maniere que nous ne pûmes rien observer, jusqu'un peu après 11 heures où il devint fort serein & l'ombre paroissoit bien nette.

			Doigts éclipsés.	M.
à 11^h	$7'$	$5''$	9	31
11	9	11	9	18
11	11	17	9	4
11	13	22	8	50
11	15	25	8	36
11	17	29	8	23
11	19	32	8	10
11	21	34	7	56
11	23	36	7	42
11	25	34	7	28
11	27	31	7	16
11	29	27	7	2

			Doigts éclipsés.	M.	
à 11h	31′	22″	6	48	
11	33	16	6	34	
11	35	6	6	20	
11	36	55	6	7	
11	38	43	5	54	
11	40	30	5	40	
11	42	16	5	27	
11	43	58	5	14	
11	45	38	5	0	
11	47	17	4	47	
11	48	55	4	33	
11	50	31	4	20	
11	52	5	4	6	
11	53	37	3	52	
11	55	8	3	38	
11	56	38	3	25	
11	58	6	3	11	
11	59	27	2	58	
12	0	46	2	44	
12	2	3	2	31	
12	3	18	2	17	
12	4	31	2	4	
12	5	42	1	50	
12	6	51	1	37	
12	7	43	1	23	
12	8	32	1	9	
12	9	18	0	55	
12	10	3	0	42	
12	10	47	0	28	
12	11	31	0	14	
12	12	15	0	0	Fin.

Vers la fin de l'Eclipse l'ombre nous paroiſſoit fort mal terminée

Toutes ces obſervations ont été faites avec le Micrometre, & nous en avons tiré les tems de l'Eclipſe en doigts entiers comme il ſuit.

			Doigts.
à 10h	18′	0″	$9\frac{1}{2}$
11	7	0	$9\frac{1}{2}$
11	11	53	9
11	20	59	8
11	29	44	7
11	37	53	6
11	45	38	5
11	52	45	4
11	59	15	3
12	4	51	2
12	8	47	1
12	12	15	0 Fin.

Nous pourrons tirer le milieu de l'Eclipſe à $10^h\ 42'\frac{1}{2}$ des deux obſervations correſpondantes de 9 doigts $\frac{1}{2}$; mais pour une détermination exacte il faudroit avoir pluſieurs de ces Obſervations.

Nous avons auſſi obſervé l'ombre ſur quelques Taches du diſque de la Lune tant en entrant qu'en ſortant.

à 9h	26′	20″	Grimaldi entre dans l'ombre.
10	21	0	L'ombre entre ſur *Mare Criſium.*
10	24	0	L'ombre au milieu de *Mare Criſium.*
11	10	0	Emerſion du milieu de Grimaldi.
11	38	0	Emerſion de Menelaus.
11	39	0	Emerſion de *Inſula Sinus medii.*
11	40	0	L'ombre quitte tout à fait *Mare ſerenitatis.*
11	40	0	Emerſion de Pline.
11	45	0	Emerſion de Dionyſius.
11	46	0	Emerſion de Tycho.
11	47	30	Commenc. de l'Emerſion de *Mare Criſium.*
11	53	0	Emerſion de *Promontorium acutum.*
11	58	0	Emerſion totale de *Mare Criſium.*

Nous obſervâmes auſſi le 12 Février au ſoir le paſſage du centre de la Lune par le Meridien à $11^h\ 7'\ 49''$, & ſa hauteur Meridienne apparente de $60°\ 13'\ 46''$, & ſon diametre étoit de $33'\ 37''\frac{1}{2}$.

Vers la fin de l'Eclipſe la Lune paſſa auſſi au Meridien, & ſon centre y arriva le 14 au matin à 0^h 3′ 58″: la hauteur meridienne apparente de ſon centre étoit alors de 53° 57′ 49″, & ſon diametre obſervé avec le Micrometre de 33′ 52″.

OBSERVATION

DE L'ECLIPSE DE LUNE

du 13. Février 1710,

Faite à Verſailles en préſence de MONSEIGNEUR LE DUC DE BOURGOGNE.

PAR M. CASSINI.

LE Ciel étoit couvert à Verſailles au commencement de l'Eclipſe, & il tomboit une pluye fine. A 9^h 53′ on apperçut la Lune entre les nuages éclipſée d'environ 6 doigts, à ce qu'on en put juger à la vûë ſimple. Le Ciel ſe découvrit un peu à 10^h 32′, & à 10^h 45′ la Lune parut dans ſa plus grande Eclipſe de 9 doigts 55′.

1710. 19. Février.

On obſerva enſuite aſſez diſtinctement l'Emerſion de quelques Taches de l'ombre comme il ſuit.

à 11^h	5′	30″	Galilée étoit éloignée de l'ombre du diametre de cette Tache.
11	7		Grimaldi commence à ſortir de l'ombre.
11	9		Grimaldi eſt entierement ſorti.
11	22		L'ombre quitte Copernic.
11	40		Pline commence à ſortir.
11	49	15	Proclus commence à ſortir.
12	11	30	Fin de l'Eclipſe obſervée par Monſeigneur le Duc de Bourgogne, avec une Lunette de 4 pieds.

à 12^h 12′ 0″ Fin de l'Eclipſe obſervée avec une Lunette de 6 pieds.

Auſſi-tôt après la fin de l'Eclipſe on obſerva avec un quart-de-cercle de deux pieds de rayon, quelques hauteurs du petit Chien, pour regler la pendule à ſecondes & déterminer l'heure veritable des Obſervations telle qu'elle eſt marquée ci-deſſus. La difference des Meridiens qui eſt entre Verſailles & l'Obſervatoire Royal ayant été déterminée géometriquement par des Triangles de 0′ 50″ dont Verſailles eſt plus à l'Occident. La fin de l'Eclipſe a dû arriver à Paris ſuivant la premiere détermination obſervée avec une Lunette de 4 pieds à 12^h 12′ 20″; & ſuivant la ſeconde à 12^h 12′ 50″.

On apperçevoit pendant cette Eclipſe le cœur du Lion, qui fut en conjonction avec la Lune & une autre petite Etoile qui devoit entrer dans le diſque de la Lune; mais la clarté de la Lune qui recouvroit ſa lumiere nous empêcha de l'obſerver.



DES

DES POINTS DE RUPTURE DES FIGURES.

De la maniere de les rappeller à leurs Tangentes : D'en déduire celles qui sont par tout d'une résistance égale : Avec la Méthode pour trouver tant de ces sortes de Figures que l'on veut : Et de faire ensorte que toute sorte de Figure soit par tout d'une égale résistance, ou ait un ou plusieurs points de rupture.

I. MEMOIRE.

Des Figures retenuës par un de leurs bouts, & tirées par telles & tant de puissances qu'on voudra.

PAR M. PARENT.

1710. 22. Fevrier.

I. Art. SOit (*dans les 6. 1res figures*) un corps quelconque *EFaAB* retenu fixement par sa bâse *EBAC*, & dont toutes les Tranches *ebac* paralleles à *EBAC* lui soient en même tems proportionnelles ; ensorte qu'ayant divisé les axes *EB*, *eb* de ces tranches proportionnellement en *D*, *d*, leurs ordonnées *DC*, *dc*, ayent un même raport aux dernieres ordonnées *AB*, *ab*, & entre elles, comme je l'ai supposé dans les Memoires du 2 Avril 1704, & du 4 Juin 1707. Soit *BbF* l'axe de ce corps qu'on suppose perpendiculaire aux tranches *EBA*, *eba*, aussi-bien qu'à la commune direction *PM* des puissances *M* qui doivent rompre ce corps, comme dans le cas le plus ordinaire, & auquel tous les autres cas peuvent aisément se rapporter. Soit *PM* cette direction commune rencontrant *BF* en *P* ; *M* la force composée de toutes les puissances

quelconques appliquées à rompre ce corps. Il a été démontré dans les Memoires citez, [*Que les résistances des bases* E B A C, e b a c, *sont entr'elles comme les produits* $EB^2 \times BA$, $eb^2 \times ba$ *continuellement*], en supposant les unes & les autres prêtes à ceder. (ce qui se réduit à EB^3 & eb^3, quand ces bases ou coupes sont des figures semblables; à EB^2 & eb^2, lorsque ces bases ou coupes sont des rectangles rompus en côté; & enfin à BA, ba, quand ce sont des rectangles rompus à plat.)

Si l'on suppose donc par pensée, & pour un tems seulement, que le corps $EFAB$ soit dans un tel état de tension, que toutes ses tranches imaginables $EBAC$, $ebac$, soient prêtes à se séparer, & que le rapport $\frac{M \times PB}{EB^2 \times AB}$ soit continuellement égal au rapport $\frac{M \times Pb}{eb^2 \times ba}$, il est évident que ce corps pourra être tenu en cet état de tension par la seule puissance M. Mais si la supposition restant toûjours la même, le rapport $\frac{M \times Pb}{eb^2 \times ba}$ est plus grand que $\frac{M \times PB}{EB^2 \times BA}$, & que tous ses pareils, cette tranche $ebac$ sera plus foible pour résister à la puissance M, que toutes ses pareilles; ainsi, si la puissance M est suffisante, la rupture se fera en $ebac$. Il s'agit donc maintenant de trouver toutes les figures infinies qui ont cette proprieté, d'être prêtes à rompre dans tous leurs points à la fois; ou si elles ne l'ont pas, de la leur faire avoir. Et à l'égard des autres figures, de trouver leur point, ou leurs points de rupture, si elles en ont un; ou si elles n'en ont pas, de leur en faire avoir: & enfin de trouver en même tems les puissances M qu'il faut appliquer, pour les séparer, dans les points de rupture.

I. Principe pour les points de rupture, & les figures d'égale résistance tirées par des puissances constantes

Pour cet effet soit $BE = a$, $BA = b$, $BF = c$, $bP = u$, $bE = x$, $be = y$, $ba = z$. Soit $\varepsilon\beta\alpha\kappa$ une 3e tranche parallele aux 2 1res & indéfiniment proche de $ebac$, qui donnera $b\beta = dx$: on aura donc pour les exposans des résistances

des tranches $EBAC$, $ebac$, $a^2 b$, & $y^2 z$, & le rapport $\frac{Mu}{y^2 z}$ devra être constant pour les figures d'égale résistance, ou égale à une quantité constante c ; & pour les points de rupture des figures qui en ont, ce rapport devra être égal à un *Maximum*, ce qui donnera pour les figures d'égale résistance tirées par une force constante M la formule générale $Mu = y^2 zc$; car appellant e la distance constante PF, on aura $u = x \pm e$, ce qui la changera en celle-ci $M \times \overline{x \pm e} = y^2 zc$. Or il est évident que si le profil FaA par exemple étant donné en x, & en quantitez constantes à souhait, l'on substituë dans cette formule la valeur de z, ou ab en x ou bF, il en résultera une équation exprimée toute en x, y, & en quantitez constantes, laquelle marquera la nature du profil FeE desiré : ou tout au contraire ; si l'on y substituë une valeur arbitraire de y ou be en x, & en quantitez constantes, il en résultera une équation toute exprimée en x & z & en quantitez constantes, laquelle exprimera la nature du profil desiré FaA.

A l'égard de la nature des tranches $ABEC$, $abec$, elle pourra être telle qu'on voudra, pourvû qu'elles soient toutes proportionnelles entr'elles, ce qui donnera une infinité de figures differentes toutes d'égales résistances.

II. Principe pour les figures d'égale résistance tirées par des puissances variables.

Mais si M represente un assemblage quelconque de quantitez dévariables, la distance PF sera alors une quantité variable, le centre commun P de toutes ces puissances changeant de place à mesure que Fb variera. Mais Mu étant toûjours égal à la somme des momens infinis de chacune des puissances rompantes par leurs distances particulieres à l'axe ab ; & lorsque ab se change en $\alpha\beta$, cette somme n'augmentant que du produit de la somme M des mêmes puissances par $b\beta$ (comme il est évident) il s'ensuit que la differentielle ou l'accroissement de Mu

est Mdx. Tirant donc la difference de la formule ci-devant $Mu = y^2zc$, on aura $Mdx = dy^2z$; & tirant une 2e fois la difference de cette équation, en supposant les dx, constantes, il vient $\frac{dxdM}{c} = ddy^2z$. Or il est évident que dM marque seulement la difference des forces variables rompantes, qui n'est autre chose que la force rompante appliquée à la tranche élémentaire *abeβα*, telle que soit cette force.

On peut donc prendre pour regle générale des figures d'égale résistance tirées par les forces variables à souhait. [*Que les secondes differences* ddy^2z *des résistances de leurs tranches* ECBA, ecba, *&c. doivent être continuellement entr'elles en même raison que les forces rompantes appliquées à ces mêmes tranches.*] D'où il suit que pour rendre toute sorte de figure proportionnelle *EFAC* d'égale résistance, il faut appliquer à chacune de ses tranches *ebca*, des puissances qui soient entr'elles comme les secondes differences des résistances de ces mêmes tranches, sçavoir comme les $dd.y^2z$. Si l'on suppose par exemple que la figure *EFcA* (4. *fig.*) soit une espece de Pyramide dont le profil *EcF* soit une 1re Parabole, & le profil *AaF* une des 1res paraboles à l'infini, desquelles paraboles *F* soit le sommet commun, & *BF* une commune tangente, l'équation du profil *EeF* sera $y = x^2$, & celle du profil *AaF* sera $y = x^p$, & la tranche *ebac* sera continuellement exprimée par le produit $yz = x^{2+p}$. Sa résistance sera $y^2z = x^{4+p}$, dont la difference $= \overline{4+p}dx \times x^{3+p}$, & de rechef la difference de cette difference (en supposant toûjours les dx constantes) $= \overline{4+p} \times \overline{3+p}dx^2 \times x^{2+p}$, laquelle est continuellement en même proportion que les $yz = x^{2+p}$, ou que les tranches mêmes *ebac*. Ce qui nous apprend que cette espece de Pyramide est par tout également résistante par sa propre pesanteur.

II. Principe. Pour les points de rupture des figures tirées par des puissances variables quelconques ; qu'on appliquera dans la suite à des variables mêlées de constantes.

On prendra la differentielle du rapport $\frac{Mu}{y^2z}$ qu'on égalera à zero, ce qui donnera l'égalité $y^2z \times Mdx = 2ydyzMu + y^2dzMu$, d'où l'on tire cette autre $\frac{yzdx}{2dyz+ydz} = u$, & enfin celle-ci $\left\{\frac{\frac{ydx}{dy} \times \frac{zdx}{dz}}{\frac{ydx}{dy} + \frac{2zdx}{dz}}\right\} = u = \frac{bZ \times bY}{bZ + 2bY}$; Dans laquelle on voit à l'œil que $\frac{ydx}{y}$, & $\frac{zdx}{dz}$ sont les deux soûtangentes bZ, bY (6. 1[res] *fig.*) aux points e & a des profils EeF, AaF; ce qui donne un principe général pour tous les points de rupture, sçavoir qu'au point de rupture b, [*Le produit des deux soûtangentes qui répondent à ce point, divisé par la somme de la soûtangente qui répond à l'ordonnée verticale, & du double de la soûtangente qui répond à l'ordonnée horizontale, est toûjours égal au levier commun de toutes les puissances rompantes.*]

Connoissint donc par les méthodes ordinaires les soûtangentes bZ, bY, aux points e & a, au moyen des équations des profils EeF, AaF, si l'on en forme la valeur cidessus, cette valeur sera toute exprimée par les abscisses bF, ou par x; de même que le levier $bP = u$ est exprimé lui-même aussi en x par la connoissance de la figure $EBAF$, & des puissances rompantes qu'on y applique. C'est pourquoi égalant ces deux quantitez, on aura une équation toute exprimée en x qui donnera la distance Fb du sommet F au point de rupture désiré b.

Si l'on suppose par exemple le poids constant M attaché en F (7. *fig.*); pour le profil EeF l'équation $y = \frac{a^2}{x}$, & pour le profil AaF l'équation $z = \frac{b^2}{c-x}$. Le premier sera une premiere hyperbole entre les Asymptotes FV, FB dont F sera le centre ; & le second sera une autre premiere

hyperbole entre les Asymptotes BA, BF, ayant son centre en B, & BF = sera = c : la soûtangente bZ de la premiere, = $-x$; & celle de la seconde, = $c - x = bY$, ce qui change la formule générale $\frac{bZ \times bY}{bZ + 2bY} = x$, en cette autre $\frac{x^2 - cx}{2c - 3x} = x$, d'où l'on tire $\frac{3}{4}c = x = bF$ desirée.

On trouvera la même chose en changeant le rapport $\frac{Mu}{y^2 z}$, ou ici $\frac{Mx}{y^2 z}$ en cet autre $\frac{M \times \overline{x^3 c - x^4}}{a^4 b^2}$ au moyen des deux équations ci-dessus, & l'égalant à un *Maximum* selon le premier Principe, & par les Méthodes ordinaires.

III. Principe, pour les figures d'égale résistance tirées par des puissances variables quelconques.

Du dernier Principe, on en peut tirer un troisiéme pour les figures d'égale résistance, sçavoir [*Que toutes celles dans lesquelles le produit des deux soûtangentes par un même point de l'axe divisé par la somme de celle qui répond à l'ordonnée verticale, & du double de celle qui répond à l'ordonnée horizontale, est continuellement égal au levier des puissances variables rompantes sont par tout également résistantes.*] c'est ce qu'on peut voir dans la pyramide ci dessus (4. *fig.*).

Premiere Remarque sur les points de rupture.

Il faut remarquer que si M réprésente une ou plusieurs puissances constantes mêlées avec les variables, ou plûtôt une seule puissance constante égale à toutes les constantes ensemble, conçûë dans leur centre commun de gravité, & jointe avec ces variables quelconques ; bP ou u renfermera cette même constante. Mais comme la valeur de cette constante capable conjointement avec les variables de rompre le corps en *ebac* est inconnuë, puisque cette tranche *ebac* n'est pas encore connuë, il est évident qu'on aura dans la premiere équation deux inconnuës, sçavoir x, & cette constante. C'est pourquoi avant d'en tenter la résolution, il faudra chercher une seconde équation par l'analogie suivante: Comme la résistance

de la bafe *EBAC* à être rompuë, eft à celle de la tranche *ebac*; ou comme $BE^2 \times BA$, eft à $be^2 \times ba$: ainfi le moment du poids quelconque trouvé par expérience capable de rompre la figure dans fa bâfe *EBAC* avec un levier quelconque; au moment capable de la rompre dans *ebac* avec le levier *bP*; lequel moment on égalera au moment $M \times bP$ qui eft tout exprimé par x, & par la force conftante renfermée en *M*, & avec ces deux équations on trouvera & la diftance *Fb* defirée & la valeur, & cette force conftante capable avec la variable de rompre la figure en *ebca*.

Seconde Remarque fur les points de rupture.

Souvent les figures qui n'ont point de point de rupture étant tirées par quelqu'un de leurs points, comme (par exemple) par le fommet *F*, fe trouvent en avoir lorfqu'on les tire par quelqu'autre *P* pris au delà, ou en deçà de *F*, à l'égard de la bâfe *EBAC*; ou même en les tirant toûjours par le même point *F*, & leur ajoûtant quelque figure connuë, comme un triangle, un rectangle, &c. dont on verra des exemples dans la fuite.

Conféquences tirées des Principes précedens.

II. ART. Ces principes étant établis, voici plufieurs conféquences qui s'en déduifent naturellement, & qui ferviront elles-mêmes de principes particuliers pour les figures plus fimples.

Premierement, pour les points de rupture des Sphéroïdes & Conoïdes, il eft évident que les profils *EeF*, *AaF* étant les mêmes (1. & 4. *fig.*) les foûtangentes *bZ*, *bY*, qui répondent aux points *e* & *a*, feront égales; ce qui réduira la feconde formule des points de rupture tirée du fecond Principe, [*Au quarré de la foutangente* bZ *ou* bY *divifé par trois fois la même foûtangente*; *de forte qu'alors* bP *eft toûjours le tiers de la foûtangente* bZ *ou* bY.]

Et pour les Sphéroïdes & Conoïdes d'égale réfiftance,

il eſt maniſeſte [*Que* bP *doit être continuellement le tiers de* bZ]; & comme dans la premiere parabole cubique *EeF* (1. *fig.*) dont *BF* eſt l'axe & *F* le ſommet, *bF* eſt continuellement le tiers de *bZ*, on ne peut douter que ſi *M* eſt une force conſtante attachée en *F*, le Conoïde *EFcA* ne ſoit alors tendu également dans toutes ſes coupes *EBAC*, *ebac*, comme nous l'avons marqué dans le Memoire cité de 1704, en parlant de la figure naturelle des bornes des portes & des murs. Au reſte cette même figure eſt une de celles qui ont été remarquées par Galilée, par M. Leibnits, & enſuite par M. Varignon.

La même choſe ſe tire de la formule $Mu = y^2 zc$ du premier Principe qui devient ici $Mx = y^2 zc$: parce que y étant égal à z, on a $\frac{Mx}{c} = y^3$, dans laquelle M étant conſtante, on voit que cette équation eſt celle de cette premiere parabole cubique.

Mais ſi *M* eſt une force variable, comme par exemple, la peſanteur des coupes mêmes, *ebac*; *EeF*, *AaF* (4. *fig.*) ſeront dans ce cas des premieres paraboles dont *BF* ſera la tangente par le ſommet commun *F*, parce que dans ce cas la diſtance *bZ* ou *bY* eſt continuellement triple de la diſtance *bP* de la coupe *ebca*, au centre de gravité *P* de la portion *eFac*; *bZ* ou *bY* étant toûjours dans cette Parabole la moitié de *bF*, & *bP* n'étant jamais que la ſixiéme partie de la même *bF*, ce qui eſt connu de tous les Méchaniciens.

La même choſe ſe tire du ſecond Principe des figures d'égale réſiſtance; car z étant $= y$, on a $dz = dy$, & $ddz = ddy$. Donc la formule de ce Principe donne cette équation $\frac{dxdM}{c} = ddy^2 z = 6dy^2 y + 3y^2 ddy$, dans laquelle $dM = y^2 dx$ continuellement à cauſe de la ſimilitude des coupes. Subſtituant donc cette valeur de dM dans cette équation, il vient l'équation differentielle $\frac{dx^2 y}{c} = 6dy^2 + 3yddy$, dont l'intégrale 2e eſt $y = \frac{x^2}{30}$ qui convient à la premiere parabole.

Si

Si M repreſente le vent (1. & 4. *Figures*), la Figure EFA ſera alors un Cône dont EBA ſera la baſe, F le ſommet, & BF l'axe ; mais il faut conſiderer cette Figure comme exemte de peſanteur. Dans cette Figure bP eſt toûjours le tiers de la hauteur bF, (à cauſe que les impreſſions du vent ſur les tranches ſemblables $eeaa$, ſe font comme ſi ces tranches étoient plates), & bF eſt toûjours la ſoûtangente qui répond au point b. Cette Figure n'avoit pas encore été marquée : on la trouve dans nôtre Memoire de 1704.

La même choſe ſe tire du ſecond principe des Figures d'égale réſiſtance, en intégrant l'équation $\frac{dx^2}{c} = 6dy^2 + 3yddy$ qui eſt tirée de ſa formule $\frac{dxdM}{c} = dd.y^2z$, à cauſe qu'alors $dM = ydx$.

Secondement pour les lames rompuës ſur le chan ou en côté, on aura tous les z ou les AB, ab (3. & 6. *Fig.*) égaux entr'eux, ainſi la ſoûtangente bY ſera alors infinie ; c'eſt pourquoi la formule $\frac{bY \times bZ}{2bY + bZ} = bP$ du ſecond principe des points de rupture ſe réduira à $\frac{bZ}{2} = bP$. De ſorte qu'en ce cas, le levier bP eſt toûjours la moitié de la ſoûtangente bZ au point de rupture b.

A l'Egard des Figures d'égale réſiſtance, il eſt manifeſte que celles-là où ce levier bP ſera continuellement la moitié de la ſoûtangente bZ, réſiſteront également dans toutes leurs parties. C'eſt pourquoi dans la premiere Parabole EeF (3. *Fig.*) dont BF eſt l'axe, F le ſommet, & dans laquelle abſciſſe bF eſt continuellement la moitié de la ſoûtangente bZ, on ne peut douter que ſi l'on ſuſpend un poids conſtant M en F, la lame EeF ne ſoit alors également tenduë dans toutes ſes parties, pourvû que l'on n'ait point égard aux poids de ces mêmes parties, comme les Auteurs cités l'ont remarqué.

La même choſe ſe tire encore tout d'un coup de la premiere formule $Mu = y^2zc$ du premier principe qui devient alors $Mx = y^2zc$, parce qu'alors z & M ſont des

quantités conſtantes ; ce qui la réduit à $x = y^2$, en prenant $M = zc$.

Mai ſi M repreſente (par exemple) la peſanteur des tranches $ebac$ (6. *Fig.*) ; alors le profil EeF ſera la même premiere Parabole ſur ſa tangente BF par ſon ſommet F, que pour le Conoïde cy-deſſus (4. *Fig.*) ; parce qu'en ce cas bP eſt toûjours $\frac{1}{4}$ de bF, & que bZ en eſt toûjours la moitié. Donc bP eſt auſſi toûjours $= \frac{1}{2} bZ$.

Ceci ſe trouve encore par le ſecond principe des Figures d'égale réſiſtance ; car les z étant conſtans, les dz & ddz n'ont plus lieu : ainſi la formule de ce principe ſe réduit à $\frac{dxdM}{c} = dd.\,y^2z = 2\,dy^2z + 2ddyzy$, dans laquelle dM vaut ydx, ce qui donne l'équation $ydx^2 = 2dy^2 + 2yddy$, en prenant zc pour l'unité ; de laquelle l'integrale ſeconde eſt $\frac{x^2}{1.2} = y$, ce qui fait voir que la figure de cette lame eſt telle qu'on la vient de marquer.

Cette figure a été encore remarquée par les Auteurs cités.

Si M repreſente le vent venant perpendiculairement à BF (3. & 6. *Fig.*) choquer en côté, il eſt évident qu'alors $EeFB$ ſera un triangle dont F ſera la pointe & EB la baſe. Car dans cette figure la diſtance bP de la tranche eba au centre P d'impreſſion du vent, ſera toûjours la moitié de bF qui eſt la ſoûtangente au point e ; mais on n'a point égard aux poids des differentes parties de cette figure.

C'eſt encore une de celles qui ont été obſervées par les Auteurs cités.

La même choſe ſe connoît par le ſecond principe d'égale réſiſtance, en intégrant l'équation $\frac{dx^4}{dx^2 + dy^2 \times zc} = 2dy^2 + 2yddy$ qui eſt tirée de ſa formule $\frac{dxdM}{c} = dd.\,y^2z$; parce qu'alors $dM = \frac{dx^3}{dx^2 + dy^2}$, ce qu'on trouve dans nos Elémens de Méchanique & de Phyſique, & ailleurs.

Troiſiémement, enfin à l'égard des lames rompuës ſur

le plat, on aura tous les y ou BE, be (2 & 5. *Fig.*) égaux; ce qui rendra la ſoûtangente bZ infinie. Ainſi la formule des points de rupture du ſecond principe $\frac{bY \times bZ}{2bY + bZ} = bP$ ſe réduira à $bY = bP$; de ſorte qu'en ce cas la ſoûtangente bY au point de rupture b ſera toûjours égale au levier même bP ou bF.

Et à l'égard des figures d'égale réſiſtance, il eſt évident, que celles-là où le levier bP ſera continuellement égal à la ſoûtangente bY du point b, ſeront par tout également réſiſtantes. C'eſt-pourquoi ſi la figure ABF eſt un triangle dont AB ſoit la baſe, & F le ſommet où l'on ait ſuſpendu un poids conſtant M; comme en ce cas la ſoûtangente bF au point b ſera toûjours la même choſe, que le levier bF; on ne peut douter que cette figure ne ſoit par tout également réſiſtante, & cela ſans avoir égard aux poids des differentes parties de la figure.

Cette figure a encore été reconnuë par les Auteurs cités.

La même choſe ſe tire encore de la formule $Mu = y^2 zc$ du premier principe, qui devient ici $Mx = y^2 zc$, & dans laquelle M & y ſont des quantités conſtantes, ce qui la réduit à $x = z$ en ſuppoſant $M = cy^2$.

On peut dire la même choſe d'un trapeſe que d'un triangle, tout étant d'ailleurs le même & par la même raiſon.

Cette derniere proprieté n'avoit pas encore été remarquée.

Mais ſi M (5. *Fig.*) repreſente la peſanteur, ou l'effort du vent ſoufflant contre la face de la lame (lequel en ce cas fait le même effet), ou même tous les deux enſemble, & que l'on ſe ſerve de la formule du ſecond principe des figures d'égale réſiſtance $\frac{dxdM}{c} = ddy^2 z$, dans laquelle $dM = dxz$, & où les dy, dy^2 & ddy n'ont point lieu, à cauſe qu'ici tous les y ou be ſont ſuppoſés égaux, on la réduira à la ſimple $\frac{dx^2 z}{c} y^2 ddx$, ou ſi l'on veut à $dx = \frac{ddz}{z}$

en ſuppoſant la conſtante $cy^2 = 1$. Or cette équation fai voir que la lame *AaPB* eſt en ce cas une Logarithmi-que dont *B F* eſt l'axe, puiſque dans cette figure les differences de differences à l'infini conſervent toûjours entr'elles le même rapport que les ordonnées.

Et cette figure n'avoit pas encore été remarquée.

Du centre de gravité de la Logarithmique.

Cette proprieté de la Logarithmique nous en découvre une autre très-ſinguliere, ſçavoir que le centre de gravité *P* de la partie indéfinie *baF*, ſe trouve toûjours à l'extremité de la ſoûtangente *bY* qui répond au point de rupture *a*; puiſqu'on vient de voir que le levier *bP* de la partie rompante *baF*, doit toûjours être égal à la ſoûtangente correſpondante *bY*; d'où il ſuit que ce centre eſt toûjours également éloigné de la baſe, ou premiere ordonnée *ba*.

Delà il eſt manifeſte que la Logarithmique *ABF* doit être indéfinie du côté de *F* pour être par tout également réſiſtante, afin que *bY* ſoit toûjours moindre que *bF*.

D'où il eſt aiſé d'avoir le centre de gravité *H* d'un ſegment de Logarithmique compris entre les deux ordonnées *BA*, *ba*; car en menant les tangenres *AG*, *aY* en *A*, *a*, on aura les centres de gravité *G*, *Y* de la Logarithmique entiere *ABF*, & de ſa partie *abF*. C'eſt pourquoi ſi l'on mene la parallele *aI* à l'axe *BF* ſur *BA*, & qu'on faſſe l'analogie: *Comme le reſte ou ſegment propoſé* ABba *eſt à la partie indéfinie* abF, *ou comme* AI *eſt à* ab; *ainſi réciproquement la diſtance* GY = Bb (*à cauſe que* BG = bY) *à un quatriéme terme, il viendra* GH, *qui étant ôtée de* BG *donnera* BH *deſirée* $= \frac{AI \times BG - Ab \times bB}{AI}$.

Cette proprieté m'a paru nouvelle, ne l'ayant point vûë nulle part.

Troiſiéme article. Voici maintenant pluſieurs exemples des points de rupture des figures tirées premierement par un poids fixe attaché à un point de leur axe.

De la Logarithmique rompuë sur une ordonnée.

1°. Si l'on suppose que la Courbe NaA (*Fig.* 5.) soit une Logarithmique dont FB soit l'asymptote, & AB une ordonnée sur laquelle elle soit fixée, & que le poids M soit suspendu au point F de son axe; il est aisé de voir que le point de rupture b sera éloigné de F de la valeur de la soûtangente connuë bY, quand on la rompra sur le plat; mais quand on la rompra en côté, alors la distance bF (6. *Fig.*) sera seulement la moitié de la même soûtangente, & le tiers quand on la rompra en Conoïde. (*Fig.* 4.)

Des Hyperboles rompuës sur leurs asymptotes.

2°. Si la Courbe NaA est une 1re hyperbole (*Fig.* 7.) aïant B pour son centre, & BA, BF pour ses asymptotes, on sçait que la soûtangente bY de cette Courbe est toûjours égale à bB; & comme bY doit être égale à bF, quand on rompt cette figure en plan par un poids fixe M suspendu en F (*Fig.* 5.) il est évident qu'alors bF doit être égale à $\frac{1}{2}BF$, & égale à $\frac{1}{3}BF$ quand on la rompt en côté (*Fig.* 6.) parce qu'alors bF n'est que la moitié de bY; & enfin quand on la rompt en Conoïde, bF ne doit être que le quart de BF (*Fig.* 4.) à cause qu'alors bF n'est que le tiers de bY.

Des Hyperboles rompuës sur des ordonnées aux axes.

3°. Si le profil naA (*Fig.* 5. & 8.) est encore une premiere hyperbole dont b soit le centre, ba le demi-axe déterminé $= p$, & Fb le conjugué $= e$, on aura par la nature de cette Courbe, en supposant toûjours M un poids suspendu en F, & BA l'axe de rupture, & appellant BF, x; & BA, z; $z = \frac{p}{e}\sqrt{x^2 + 2e^2 - 2ex}$; d'où l'on tire la soûtangente BY qui répond au point $A = \frac{x^2 + 2ee - 2ex}{x - e}$ par les methodes ordinaires, laquelle étant égalée à x pour la figure rompuë à plat, donne l'équation $x^2 + 2ee - 2ex = x^2 - ex$, d'où l'on tire $2e = x = FB$; de sorte qu'en ce cas le point de rupture est à l'extremité B de l'axe FB opposée à F.

Mais si on la rompt en côté, égalant la soûtangente cy-dessus à $2x$, il en résulteroit $x^2 = 2ee$ & $x = e\sqrt{2} = FB$.

Enfin si on la rompt en Cylindroïde, on égalera la même soûtangente à $3x$, ce qui donnera $2x^2 - ex = 2ee$, & enfin $x = e \times \overline{\frac{1}{4} + \sqrt{17}} = FB$.

On trouvera de même qu'attachant le poids au centre b, la rupture faite sur le chan se trouvera encore en BA à l'extremité du demi-axe conjugué; & qu'en rompant en Cylindroïde, l'axe de rupture BA sera éloigné de b de la quantité $\frac{e}{\sqrt{2}}$.

Des Trapeses & des Arbres rompus par le vent.

4°. Supposons encore que $FaAQO$ soit un trapese (*Fig.9.*) dont OF, QA soient les deux côtés perpendiculaires à l'axe OQ, & qui soit rompu en côté par un poids suspendu en F ou O, soit Pba l'axe de rupture, & ABQ la base dans laquelle il est retenu; il est constant que si l'on prolonge le côté oblique AF sur l'axe en Z, PZ sera la soûtangente par le point de rupture a, laquelle doit être alors double du levier PO, donc OP est égale alors à $OZ = \frac{FO \times FB}{BA}$.

Mais si on le rompt en cône tronqué qui soit tiré & retenu de même; alors la soûtangente PZ devra être triple de PO, ou OZ double de OP, donc OP sera $= \frac{FO \times FB}{2BA}$.

Ce Problême est encore un de ceux du Mémoire de 1704, on y regarde le tronc d'un arbre depuis la terre jusqu'au centre d'impression du vent contre la touffe de son feüillage, comme le cône tronqué $OFAQ$. O represente ce centre, & AQ le pied de l'arbre, BA represente la difference de ses deux diametres en ces deux endroits, FB la hauteur de ce centre au-dessus de la terre, & FO son diametre au droit de ce centre.

A l'égard de ce trapese rompu en plan, il est évident qu'il est partout d'une égale résistance, comme le triangle même, & par la même raison, comme on l'a déja remarqué cy-devant.

On peut remarquer ici que le triangle rompu ſur le chan, ou en cône par un poids fixe n'a point de point de rupture, puiſque ſa ſoûtangente eſt toûjours la même choſe que le levier de la puiſſance rompante, & non pas le double ou le triple comme elle le devroit; cependant quand on lui ajoûte un rectangle pour en faire un trapeſe, il ne laiſſe pas d'en avoir dans ces deux cas; ce qui ſert déja d'exemple de la premiere maniere de faire avoir des points de ruptures à des figures qui naturellement n'en ont point.

Des Conchoïdes rompuës par leurs aſymptotes.

5°. Si la figure $FNaA$ étoit une Conchoïde (*Fig.* 10.) ayant F pour ſon ſommet, yFB pour axe, BA pour aſymptote, & y pour pole, laquelle fût retenuë par BA & rompuë en plan par un poids fixe M ſuſpendu en F, en nommant yF, a; yB, p; FB, c; Bb, u; on auroit l'équation $\frac{\overline{p-u}\sqrt{c^2-u^2}}{u} = z = ba$, quand le pole y eſt du côté du ſommet F à l'égard de BA, & $\frac{\overline{p+u}\sqrt{c^2-u^2}}{u} = z = ba$ lorſque y eſt de l'autre côté, ce qui donne $dz = du \times \frac{\overline{pc^2 \mp u^3}}{u^2\sqrt{c^2-u^2}}$, & la ſoûtangente $bT = \frac{z\,du}{dz} = \frac{\overline{up \mp u^2} \times \overline{c^2-u^2}}{cp^2-u^3}$ qui doit être en ce cas $= c-u = FB$; d'où l'on tire en ſubſtituant la valeur de $p = a \pm c = yP$ l'équation $u^2 + \frac{puc-pc^2}{a} = 0$, qui donne $u = \sqrt{p^2+4ap} - p \times \frac{c}{2a} - Bb$; & $u = c \times \sqrt{3}-1$ quand dans le premier cas $yF = FB$ ou $a = c$: ou $u = \frac{1}{2}c$ lorſque dans le ſecond cas $c = \frac{1}{2}a$ ou $BF = By$.

Mais ſi cette figure eſt rompuë en côté, on égalera cette ſoûtangente à $2c-2u$; d'où l'on tirera l'égalité $u^3 \pm au^2 \pm cup \mp 2pc^2 = 0$, qui donne dans le premier cas $u = Bb = c$, qui marque que la rupture eſt en F, & $u = \frac{p+\sqrt{p^2+8pc}}{2} = Fb$ dans le ſecond cas.

Enfin ſi on rompt la même ſeconde Conchoïde en Conoïde, on égalera la même ſoûtangente cy-deſſus à $3c-3u$, ce qui donnera l'équation $u^3 - \frac{au^2 - puc + 3pc^2}{2} = 0$.

à cauſe que $p=a-c$, laquelle en ſuppoſant à l'ordinaire $u=s+\frac{a}{b}$, ſe change en cette autre $\left\{\begin{matrix} s^3 & -\frac{a^2 s}{12} & -\frac{a^3}{108} & \\ & -\frac{pcs}{1} & +\frac{3pc^2}{2} & =0 \\ & & -\frac{pc2}{12} & \end{matrix}\right\}$

ou $s^3-es-b=$ qui n'a qu'une racine poſitive, ſçavoir $u=\frac{a}{b}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{27}e^3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}bb-\sqrt{\frac{1}{4}bb-\frac{1}{27}e^3}}$ lorſque $\frac{1}{4}b^2$, excede $\frac{1}{27}e^3$, les deux autres étant imaginaires. Mais ſi $\frac{1}{27}e^3$, eſt égal à $\frac{1}{4}bb$, on aura $u=\frac{a}{b}+2\sqrt[3]{\frac{1}{2}b}$. Enfin ſi $\frac{1}{27}e^3$ excede $\frac{1}{4}bb$, on trouvera cette racine poſitive au moyen des analogies ſuivantes.

Comme $\sqrt{\frac{e}{b}}$ eſt à $\frac{h}{\frac{2}{3}e}$, ainſi le ſinus total des tables du cercle à un quatriéme terme,

qui ſera le ſinus d'un arc dont on prendra les $\frac{1}{3}$ qu'on ajoûtera à 120 degrez, pour faire la ſeconde analogie :

Comme le ſinus total eſt à la corde de la ſomme trouvée ; ainſi $\sqrt{\frac{e}{3}}$ à un quatriéme terme,

qui ſera la valeur déſirée, à laquelle on ajoûtera $\frac{1}{4}a$,

A l'égard de la premiere rompuë en Conoïde, ſon point de rupture eſt à ſon ſommet, comme quand on la rompt en côté.

6. Voici auſſi quelques exemples des Courbes qu'il faut augmenter d'un rectangle pour leur faire avoir un point de rupture, en les tirant par un poids fixe.

D'un Quart de Cercle augmenté d'un rectangle rompu ſur une Tangente.

Premierement ſoit $FNaA$ un quart de cercle (*fig.* 11.) dont FB, AB, ſoient deux tangentes par ſes extremitez faiſant un angle droit dans leur rencontre B, ſoit $FOQB$ un quarré appliqué à FB, on ſuppoſe cette figure retenuë dans ſa bâſe AQ & tirée en plan par un poids appliqué en F. Appellant FB, FO, c; Fb, x; & ba, u; on aura $Fb=x$ $=\sqrt{2cu-u^2}$, & $u=c-\sqrt{c^2-x^2}=ba$, & $du=\frac{xdx}{\sqrt{c^2-x^2}}$;

ce

qui donnera la soûtangente $\frac{u+\overline{c}\times dx}{du}=PY=\frac{2c-\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{c^2-x^2}}{x}$ qu'il faut égaler au levier $OP=x$, d'où l'on tirera l'égalité $4x^2=3c^2$, & $x=\frac{c}{2}\sqrt{3}$, qui donne l'arc *Fa* de 60 degrez précisement.

Mais si on rompt la même figure sur le chan, en la retenant, & tirant comme ci-dessus, & les mêmes dénominations subsistant; on aura (en égalant la soûtangente PY à $2x$) l'égalité $x^4+6c^2x^2=3c^4$. D'où l'on tire $x=c\sqrt{2\sqrt{3}-3}$.

Enfin si on rompt la même figure en Conoïde, tout demeurant au reste le même, on égalera la soûtangente PY à $3x$; ce qui donnera l'égalité $x^4+2x^2c^2=\frac{3}{4}c^4$, qui donne (*même fig.*) $x=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{7}-1}$.

De la Parabole rompuë sur une Tangente par son sommet.

2. Si la figure FaA est une parabole (*même fig.*) sur la tangente FB par son sommet F, qui soit retenuë par son ordonnée BA, & rompuë en plan par un poids fixe attaché en F, à laquelle on ait ajoûté le rectangle $FOQB$ dont la largeur FO soit égale au paramètre $=p$. Soit toûjours $Fb=OP=x$, $ba=z$, on aura par la nature de cette Courbe $\frac{x^2}{p}=z$, & $\frac{2xdx}{p}=dz$, ce qui donnera la soûtangente PY prise sur $OQ=\frac{\overline{z+p}dx}{dz}=\frac{x^2+p^2}{2x}$, qu'il faut égaler à $PO=x$; ce qui donne l'égalité $p^2=x^2$, & $p=x$; de sorte que l'axe de rupture Pba est alors éloigné du sommet F, ou du poids M, de la valeur du parametre.

Mais si on rompt cette figure en côté, il faudra alors égaler $\frac{x^2+p^2}{2x}$ à $2x$; ce qui donnera l'égalité $p^2=3x^2$, & $\frac{p}{\sqrt{3}}=\frac{p\sqrt{3}}{3}=x$.

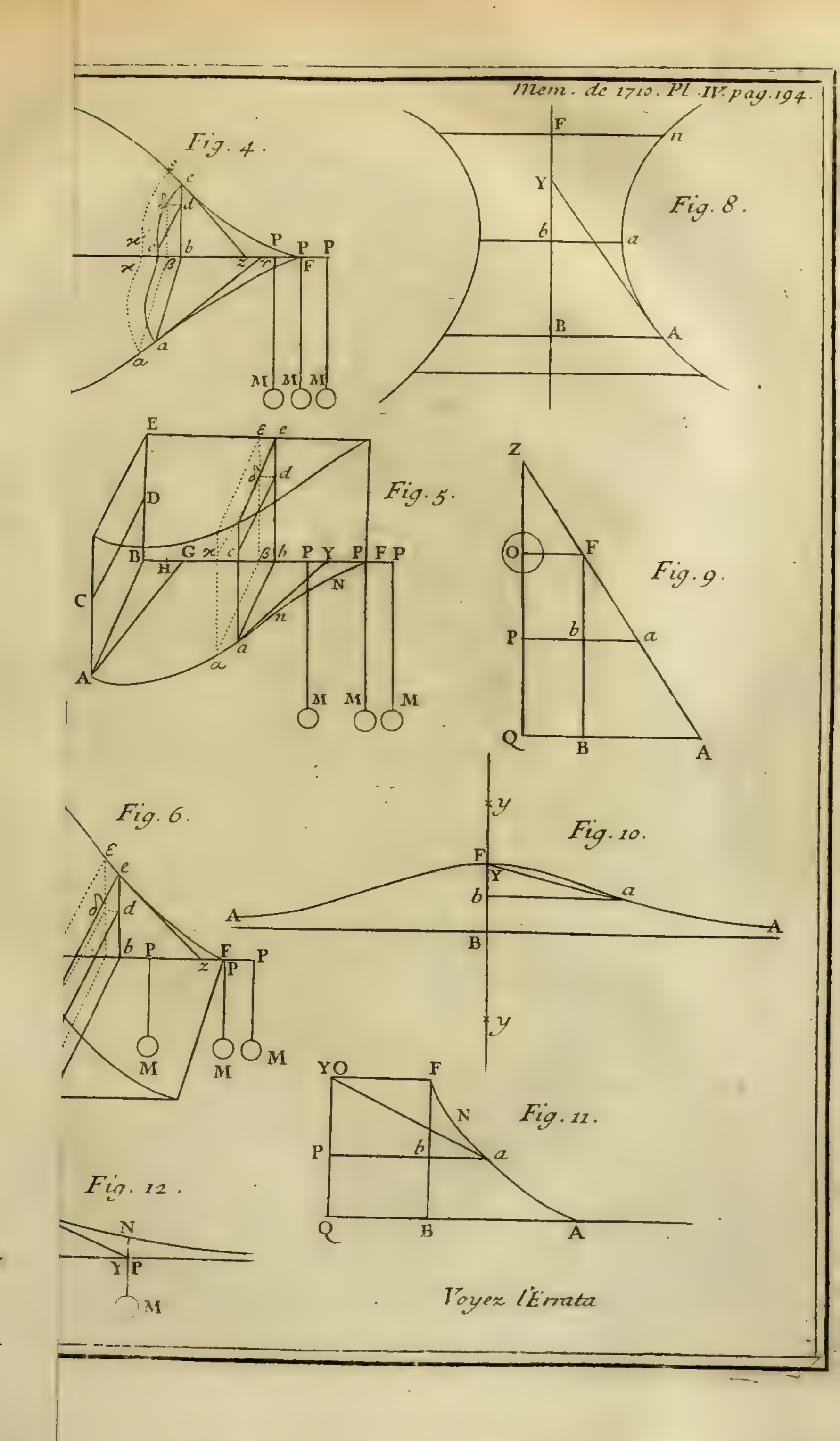
Enfin si l'on rompt la même figure en Conoïde, tout le reste demeurant égal, on égalera la même soûtangente $\frac{x^2+p^2}{2x}$ à $3x$; ce qui donnera $p^2=5x^2$, & $\frac{p}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}p=x$.

De la Cissoïde rompuë sur une Ordonnée par son centre.

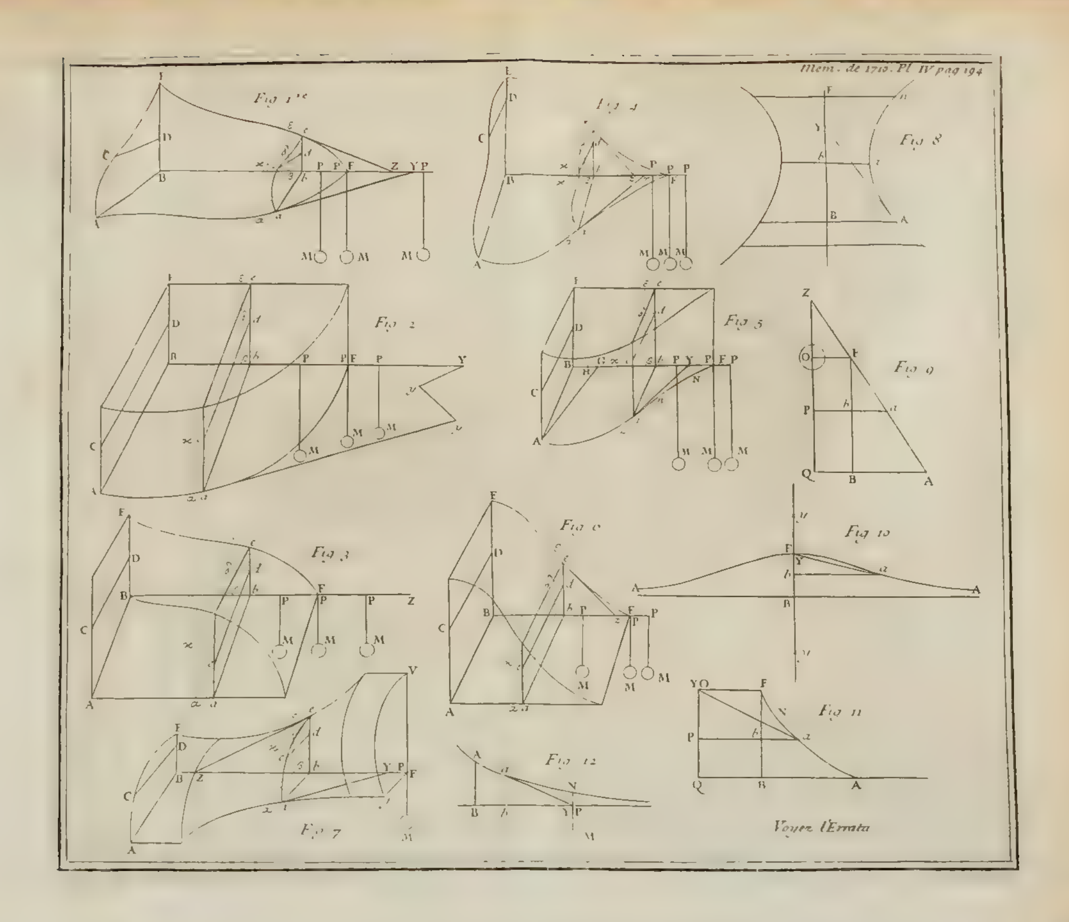
3. Si de plus FaA (*même fig.*) eſt une Ciſſoïde dont F ſoit le ſommet, FB l'axe, B le centre, BA une ordonnée par ce centre, par laquelle elle ſoit, ſi l'on veut, retenuë, ou par une parallele à QBA encore plus éloignée de F; tandis qu'elle eſt tirée en plan par un poids conſtant appliqué en F, & que $OFBQ$ ſoit encore un quarré appliqué à l'axe FB : appellant toûjours Fb, x; $FB = FO$, c; on aura par la nature de cette Courbe $ba = u = \frac{x^2}{\sqrt{2cx - x^2}}$; dont la differentielle $du = \frac{\overline{3cx - x}^2 \times dx}{\sqrt{\overline{2c - x}^3 \times x}}$: d'où l'on tire la ſoûtangente $PY = \frac{\overline{x^2 + c\sqrt{2cx - x^2}} \times \overline{2c - x}}{3cx - x^2}$, qui étant égalée à $PO = x$, donne l'équation $x^3 = \overline{2c - x}^3$, & enfin $c = x$; de ſorte qu'en ce cas la rupture ſe fera par le centre B.

Si la Ciſſoïde eſt rompuë en côté, tout le reſte demeurant le même, on égalera la ſoûtangente PY ci-deſſus à $2x$, ce qui donnera l'équation $\overline{2c - x}^3 \times c^2 = \overline{4cx}^2 \times x^3$, d'où l'on tire $x^5 - 8x^4 + 17x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$, en ſuppoſant $c = 1$, d'où l'on tire $x = \frac{6141}{1000} \times c$.

Enfin ſi l'on rompt cette Courbe en Conoïde, on aura en égalant la même ſoûtangente ci-deſſus à $3x$, l'équation $x^3 \times \overline{7c - 2x}^2 = \overline{2c - x}^3 \times c^2$, d'où l'on tire l'égalité $x^5 - 7x^4 + \frac{25x^3}{2} - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$, en ſuppoſant $c = 1$, ce qui donne $x = \frac{2633}{1000} \times c$.



Voyez l'Errata



Mem. de 1710. Pl. IV pag 194
Fig 1.re
Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig 5
Fig 6
Fig 7
Fig 8
Fig 9
Fig 10
Fig 11
Fig 12
Voyez l'Errata

OBSERVATION

DE L'ECLIPSE DU SOLEIL *du 28 Février 1710,*

Faite à Versailles en présence de MONSEIGNEUR LE DUC DE BOURGOGNE.

PAR M. CASSINI le fils.

1710. 5. Mars.

LE Ciel étoit couvert à Versailles au commencement de l'Eclipse. A $1^h\ 5'$ on apperçut le Soleil au travers des nuages rares qui le laissoient quelquefois entrevoir assez distinctement, & empêchoient souvent que son disque ne parût exactement terminé,

A $1^h\ 8'$ la quantité du disque du Soleil qui étoit éclipsé fut observée avec le Micrometre d'un peu plus de 7 doigts.

à 1^h	$19'$	la grandeur de l'Eclipse étoit de	6^d	$50'$
1	25		6	17
1	28		6	0
1	29 ½		5	47 ½
1	34		5	13
1	43		4	26
1	46		4	11
1	50	exacte	3	52
1	53		3	39
1	54		3	24
1	59 ½	exacte	2	52
2	2	exacte	2	37
2	5 30		2	19
2	22 30		0	27
2	26	Fin de l'Eclipse	0	0

On a tiré de ces Phases le temps des doigts éclipsés depuis le milieu jusqu'à la fin.

à 1^h	13′		7^d 0′
1	28		6
1	31	45	5 ½
1	37	20	5
1	42	15	4 ½
1	48		4
1	53	36	3 ½
1	58	23	3
2	3	22	2 ½
2	8	0	2
2	17	30	1
2	22	30	Un demi doigt.
2	26	0	Fin de l'Eclipſe.

OBSERVATION

DE L'ECLIPSE DU SOLEIL du 28 *Fevrier* 1710.

PAR M. MARALDI.

1710. 24. Mars.

QUelques jours avant l'Eclipſe on avoit placé au foyer d'une Lunette de 12 pieds deux fils de ſoye, enſorte qu'ils comprenoient préciſément le diametre entier du Soleil, & ils étoient attachez ſur les deux côtez d'une plaque de cuivre qui avoit une ouverture quarrée. Les intervalles entre ces deux fils furent diviſez en 24 parties égales, à chacune deſquelles on plaça un fil de ſoye pour avoir le diametre entier diviſé en 24 parties égales, qui ſont les doigts & les demi-doigts.

Comme la grandeur apparente du Soleil ne change point ſenſiblement d'un jour à l'autre, ſon diametre étoit encore compris préciſement entre ces deux fils le jour de l'Eclipſe.

Pour obſerver les doigts éclipſez on a placé le bord en-

tier du Soleil sur le fil qui est à une des extremitez, & dans cette situation on a marqué le tems que la concavité de l'Eclipse est arrivée à un des fils placez à l'autre extremité : les fils compris entre ces termes font connoître la partie claire du Soleil, & le résidu des fils jusqu'à 24 donnent les doitgs & les demi-doigts éclipsez.

C'est de cette maniere qui nous a paru la plus prompte & la plus évidente que nous avons observé la plûpart des phases de l'Eclipse. Les autres parties des doigts éclipsez ont été observées par estimation, lorsque la concavité de l'Eclipse arrivoit à la moitié de chaque intervalle.

Le matin du 28 Février le Soleil ayant paru un peu de tems au travers des nuages vers les 9 heures & demie, se couvrit entieremment presque aussi-tôt, & ne commença de paroître qu'à une heure & demi après midi, lorsque le commencement & le milieu de l'Eclipse étoient déja passez. A une heure & demie le Soleil ne parut qu'un moment, de sorte qu'on n'eut pas le tems d'en faire d'observations exactes avec le Reticule. Il parut ensuite à diverses reprises, mais je ne pus pas mesurer la grandeur de l'Eclipse qu'à une heure 41′ 50″ que je trouvai précisément de 5 doigts. Je déterminai cette phase & les suivantes jusqu'à 2 heures par les fils compris entre les cornes, qui étoient beaucoup mieux terminées que le bord inferieur du Soleil qui étoit plus plongé dans les nuages.

à 1^h	48′		l'Eclipse est de	4 doigts	30′
1	50		elle est de	4	25
1	55			3	32
1	58			3	15
2	0	30		3	10
2	3	50		2	45 douteuse.
2	6			2	30
2	9			2	15
2	10			2	0
2	14	45		1	30
2	17			1	15
2	18	40		1	0

à 2^h 20′ 30″		0 doigts 45′
2 22 30		0 30

Ensuite le Soleil se couvre pendant trois minutes, & à 2^h 25′ 34″ le Soleil ayant paru mal terminé, je ne vis plus d'Eclipse. A 2^h 26′ 4″ le Soleil parut bien terminé, & l'Eclipse étoit entierement finie.

OBSERVATION

DE L'ECLIPSE DE SOLEIL

arrivée le 28 Fevrier 1710. à l'Observatoire.

PAR MM. DE LA HIRE.

1710. 5. Mars.

LE Ciel a été entierement couvert dans tout le commencement de cette Eclipse, ensorte qu'on ne pouvoit pas même appercevoir l'endroit où étoit le Soleil, & l'on n'a commencé à le voir un peu distinctement qu'à 1^h 35′; ensuite on a fait les observations suivantes avec le Micrometre attaché à la Lunette de 7 piés.

Tems vray.	*Doigts éclipsés & min.*	*Doigts & demi-doigts.*
à 1^h 35′ 0″	5 doigts 51′	
41 20	5 38	doigts
43 18	5 16	1^h 42′ 3″ — 5 ½
44 40	4 58	44 31 — 5
46 55	4 40	
49 0	4 26	48 24 — 4 ½
50 45	4 12	
53 12	3 57	52 43 — 4
57 55	3 31	
59 50	3 15	58 2 — 3 ½
2 2 15	3 1	
4 10	2 46	2 2 23 — 3
5 30	2 32	

Tems vray.			*Doigts éclipsés & min.*		*Doigts & demi-doigts.*			
								doigts
à 2^h	7′	25″	2 doigts	8′	2^h	5′	46″ —	2 ½
	9	23	2	4				
	11	15	1	50		9	55 —	2
	13	10	1	36				
	15	18	1	22		14	5 —	1 ½
	17	27	1	7				
	19	18	0	53		18	22 —	1
	21	10	0	39				
	23	8	0	24		22	21 —	0 ½
	25	8	0	11				
	27	0	0	0 Fin.		27	0 —	Fin.

Nous avons aussi observé cette éclipse avec un carton placé au foyer d'un verre d'environ 23 piés, sur lequel l'image du Soleil occupoit 31 lignes ½, que nous avons divisée en 24 parties égales pour y recevoir les doigts & demi doigts de l'Eclipse : mais comme le Soleil étoit trop foible quand il a commencé à paroître au travers des nuages, on ne pouvoit pas voir encore son image sur le carton blanc; c'est-pourquoi on n'a pû s'en servir que dans les observations suivantes.

à 2^h	7′	20″ —	2 doigts	½
	10	48 —	2	0
	15	45 —	1	½
	19	0 —	1	0

On a aussi observé la fin de l'Eclipse avec une Lunette de 16 piés pour la voir plus distinctement, & on l'a trouvée à 2^h 27′ 0″ comme on l'avoit déterminée séparement avec la Lunette de 7 piés à laquelle le Micrometre est attaché.

On a remarqué que l'endroit où la Lune quittoit le Soleil, étoit un peu inégal & comme dentelé, ce que nous avons attribué aux Montagnes qui sont sur le bord de la Lune, comme on l'a déja vû dans d'autres Eclipses.

A la fin de l'Eclipse nous avons observé avec le Micrometre, que le diametre du Soleil étoit précisément de 32′ 21″.

METHODE GENERALE

POUR LA DIVISION DES ARCS DE CERCLE ou des Angles, en autant de parties égales qu'on voudra.

PAR M. DE LA HIRE.

1710. 15. Mars. FIG. I.

SOit un arc de cercle *BN* qu'il faut diviſer en autant de parties égales qu'on voudra aux points *AEG* &c. Ce qu'on dit d'un arc de cercle, ſe doit entendre de même d'un angle.

Soit *BN* la corde de cet arc laquelle ſoit donnée : Soit *BA* l'une des parties requiſes de l'arc, & *NP* une autre partie auſſi requiſe, & ces deux parties ſont aux extremités de l'arc. Si par le point *A* on méne le diametre *ACD*, & que par le point *P* on méne la corde *PD*; je dis que la corde *PD* coupera la corde *BN* à angles droits en *M*.

Si l'on méne les cordes *BA*, *BD*, le triangle *ABD* ſera rectangle en *B*, mais le triangle *PBM* eſt ſemblable au triangle *ADB*; car les angles *PBN*, *ADB* ſont égaux, étant appuyés ſur des arcs égaux, & l'angle *BPD* eſt égal à l'angle *BAD* étant appuyés ſur le même arc, dont l'angle *BMP* eſt droit étant égal à l'angle droit *DBA*.

LEMME I.

Il ſuit de ce que je viens de démontrer, que pour quelque diviſion que ce ſoit *BP* eſt à *BM*, comme *AD* à *DB*. Et ſi l'on poſe le rayon du cercle $CA = r$, la corde *BN* donné $= d$, & la corde d'une des diviſions comme $AB = z$, on aura $AD \mid BD \mid\mid 2r \mid \sqrt{4rr - zz} \mid\mid BP \mid BM$.

Mais *BP* eſt toûjours la corde de la diviſion précedente de l'arc, laquelle eſt moindre d'une partie que celle

celle qui eſt propoſée, & je poſe cette corde $BP = c$, c'eſt pourquoi on aura $BM = \frac{c}{2r} \sqrt{4rr - zz}$

LEMME II.

Si du centre C du cercle on mene la perpendiculaire CR ſur la corde BP, elle la coupera en deux également, & l'angle BCR ſera égal à l'angle BDP qui eſt auſſi égal à l'angle BNP, car BCR eſt la moitié de BCP qui ſeroit au centre, & appuyé ſur le même arc que les deux autres. Mais les deux triangles BCR, NMP étant rectangles, & ayant de plus un angle égal à un angle, ſont ſemblables; donc $CB | CR$, ou bien $2CB = 2r | 2CR = \sqrt{4rr - cc} || PN = z | NM = \frac{z}{2r} \sqrt{4rr - cc}$.

Nous aurons donc une formule générale pour la corde $BN = d = BM + NM$, qui ſera par ces deux Lemmes $\frac{c}{2r} \sqrt{4rr - zz} + \frac{z}{2r} \sqrt{4rr - cc} = d$.

On voit par-là, qu'en commençant la diviſion de l'arc en deux & pourſuivant, on aura les équations de toutes les diviſions à l'infini, en ſubſtituant toûjours dans la formule la valeur de la corde de la diviſion précedente $= c$ juſqu'à celle qu'on demande.

EXEMPLES.

Pour la diviſion de l'arc en deux on trouvera l'équation $\frac{z}{2r} \sqrt{4rr - zz} + \frac{z}{2r} \sqrt{4rr - zz}$ en ſubſtituant z qui eſt égale à la corde précedente $= c$, dans la formule générale, & cette équation ſe réduit à $\frac{z}{r} \sqrt{4rr - zz} = d$, qui eſt une équation qui ſe réduit à une plane.

Pour la diviſion d'un arc en trois parties on trouvera $\frac{z}{2rr} \times 4rr - zz + \frac{z}{2r} \sqrt{4rr - \frac{4rrzz + z^4}{rr}} = d$ après avoir dans la formule générale la ſubſtitution de la valeur de c qu'on a trouvée pour la corde de la diviſion précedente qui eſt $\frac{z}{r} \sqrt{4rr - zz}$. Mais cette équation ſe réduit à $\frac{3rrz - z^3}{rr} = d$.

Pour la diviſion d'un arc en quatre parties, on trouvera de même en ſubſtituant dans la formule générale, la valeur de la corde de la diviſion précedente qui eſt celle de trois, $\frac{3rrz - z^3}{2r^3} \times \sqrt{4rr - zz} + \frac{z}{2r}\sqrt{4rr - \frac{9r^4zz + 6rrz^4 - z^6}{r^4}}$ $= d$. Mais cette équation ſe réduit à

$$\frac{2rrz - z^3}{r^3} \times \sqrt{4rr - zz} = d.$$

Pour la diviſion de l'arc en cinq parties, on trouvera de même en ſubſtituant dans la formule générale, la valeur de c qui eſt la corde de la diviſion précedente, & qui eſt moindre d'une unité que celle qui eſt propoſée,

$$\overline{\frac{2rrz - z^3}{2r^4}} \times \overline{4rr - zz} + \frac{z}{2r}\sqrt{4rr - \frac{\overline{2rrz + z^3}^2}{r^3} \times \overline{4rr - zz}} = d.$$

& ainſi des autres.

Mais on remarquera que toutes les diviſions en nombre pair ſe dépriment à la moitié par la diviſion de l'arc en deux; & ayant réduit la corde donnée à la corde de la moitié de l'arc, on la conſiderera comme la corde de l'arc qu'on doit diviſer $= d$.

Toutes ces équations pourront ſe conſtruire facilement par les méthodes générales, en les réduiſant en deux lieux dont l'un ſera à un cercle, & l'autre à une ligne courbe d'un dégré qui convient à l'équation propoſée : mais il y a quelque difficulté à les conſtruire avec le cercle donné ſur lequel eſt l'arc propoſé à diviſer, en le tirant de l'équation.

M. Deſcartes rapporte dans le 3e Livre de ſa Géometrie, la méthode pour diviſer un arc de cercle en trois parties, qui lui ſert d'un exemple pour réſoudre des équations cubiques, & il y employe une parabole avec un cercle qui n'eſt pas celui où eſt l'arc propoſé. Il trouve par ce moyen les racines de l'équation qui ſont les ordonnées à l'axe de la parabole, leſquelles ſont menées par ſes rencontres avec le cercle; c'eſt auſſi ce que l'on trouve facilement par la méthode générale des conſtructions. Mais M. Deſcartes ayant remarqué quelles ſont deux de ces racines, ne dit rien autre choſe de la troi-

siéme, si ce n'est qu'elle est égale aux deux autres prises ensemble, & c'est ce qui est évident par la forme de l'équation qui n'a point de second terme ; & il semble qu'il n'ait pas apperçû qu'elle donnoit aussi, comme elle doit faire, une solution de ce même Problême. Il est vrai qu'il n'est pas facile d'appercevoir cette solution dans la construction qu'il donne ; c'est pourquoi je crois qu'on doit preferer dans ces sortes de constructions, celle qui se fait avec un lieu qui coupe celui qui est donné, comme ici le cercle, dans tous les points de la solution du Problême & dans toute son étenduë, & principalement quand le lieu trouvé est le plus simple qui puisse servir à la solution avec celui qui est donné, ce qui montre aussi toutes les racines de l'équation & leurs usages : & c'est ce qui ne se trouve pas généralement par toutes sortes de constructions. Voici comment on peut trouver ce lieu dans le cas de la trisection de l'arc ou de l'angle.

Soit sur le cercle donné *ABGF* ; l'arc proposé *FAB* qu'il faut diviser en trois parties égales aux points *H*, *I*. FIG. II.

Puisque l'arc *FAB* est donné, aussi sa corde *FB* est donnée, & la perpendiculaire *CD* menée du centre *C* sur cette corde sera aussi donnée.

Ayant mené le rayon *CH*, il coupera en deux également l'angle *FHI* fait par les cordes des parties de l'arc, & il rencontrera la corde *FB* au point *E* qui sera l'angle du parallelogramme équilateral *FHIE*, puisque par la construction les côtés *HI* & *FE* sont paralleles entr'eux.

Maintenant ayant mené le diametre *CK* parallele à la corde *FB* & *HL* parallele à *AC*, soit posé le rayon du cercle $= r$, $FD = d$. $CD = a$. $CL = y$. & $HL = z$.

On aura pour le lieu au cercle donné $rr = yy + zz$.

On a aussi $HL \mid CL \mid\mid CD \mid DE$, ce qui est

$$z \mid y \mid\mid a \mid \frac{ay}{z} = DE.$$

Mais $FE = HI = 2CL = 2y$: donc $DF = 2y + \frac{ay}{z} = d$, ou bien $2yz + ay - dz = 0$, qui est un lieu à une hyperbole équilatere entre ses asymptotes ; & pour en faire la

conſtruction avec le cercle donné, on la réduira d'abord à $\frac{1}{2}dz - yz - \frac{1}{2}ay = 0$, & poſant $\frac{1}{2}d - y = t$, ce qui donne auſſi $\frac{1}{2}d - t = y$, on aura $tz - \frac{1}{4}ad + \frac{1}{2}at = 0$; & prenant enfin $z + \frac{1}{2}a = v$, on aura $tv = \frac{1}{4}ad$ ou $= \frac{1}{2}a\,\frac{1}{2}d$, pour le lieu tout réduit.

On diviſera donc FD en deux également en M, & l'on tirera MO parallele à CA, & elle ſera une des aſymptotes du lieu cherché. Enſuite ayant pris $MO = \frac{1}{2}CD$, & par le point O ayant mené PO parallele à FB, PO ſera l'autre aſymptote du lieu cherché qui doit paſſer par le centre C du cercle. Car par la conſtruction le rectangle OC ſera $= \frac{1}{4}ad$, & qui doit être égal au rectangle $OQ \times QH = tv$; puiſque $HL + LQ = z + \frac{1}{2}a = v$ par la conſtruction, & $OQ = DM - CL = \frac{1}{2}d - y$. Ainſi l hyperbole HCS rencontrera l'arc de cercle FAB au point H de ſa diviſion cherchée, & l'autre hyperbole GR rencontrera l'autre partie du cercle au point G, qui ſera auſſi le point de la diviſion en trois, ſçavoir, FG de l'arc FGB du reſte du cercle.

Mais ces deux hyperboles rencontrent encore aux points RS le cercle propoſé, qui doivent être auſſi des points de la ſolution du Problême: cependant il ſemble qu'ils n'ayent aucun rapport à la diviſion des arcs de cercle en trois parties. Il eſt pourtant vrai qu'il doit y avoir autant de racines & de ſolutions dans l'équation, qu'il y a de rencontres des deux lieux qui la conſtruiſent. C'eſt pourquoi dans cet exemple cherchons l'équation qui devroit être conſtruite par la combinaiſon de ces deux lieux.

La premiere eſt celle au cercle $rr = zz + yy$, la ſeconde eſt celle à l'hyperbole $yz + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}dz = 0$, & nous tirerons de celle-ci $z = \frac{\frac{1}{2}ay}{\frac{1}{2}d - y}$; & ſubſtituant dans l'équation au cercle la valeur de zz tirée de cette derniere, on aura $rr = \frac{\frac{1}{4}aayy}{\frac{1}{4}dd - dy + yy} + yy$, ou bien $\frac{1}{4}ddrr - rrdy + rryy - \frac{1}{4}aayy - \frac{1}{4}ddyy + dy^3 - y^4 = 0$; & comme

on a auſſi à cauſe du cercle $aa + dd = rr$, cette équation ſe réduit à celle-ci $y^4 - dy^3 - \frac{3}{4}rryy + rrdy - \frac{1}{4}rrdd = 0$.

Mais dans la combinaiſon des deux lieux il eſt évident que la racine *RZ* eſt égale à *FD*, puiſqu'on a coupé *FD* en deux également en *M*, & que le rectangle *RO* eſt égal au rectangle *CO*. Auſſi l'équation quarre-quarrée qu'on a trouvée ſe déprime à une cubique par la diviſion de $y - d = 0$; car cette racine *RZ* eſt une vraye, étant du même côté que *CL* ou *HQ* par rapport à *CA*. Cette équation réduite ſera donc

$y^3 - \frac{3}{4}rry + \frac{1}{4}rrd = 0$, ce qui montre qu'entre les trois racines reſtantes de l'équation, il y en a encore une fauſſe *ST*, qui eſt égale toute ſeule aux deux autres vrayes priſes enſemble *HQ* & *GV*, à cauſe que cette équation cubique n'a point de ſecond terme, comme M. Deſcartes l'avoit remarqué dans la Solution de ce Problême.

Mais la difficulté n'eſt pas levée dans cette conſtruction, laquelle ne paroiſſoit pas dans celle de M. Deſcartes, & il lui ſuffiſoit d'avoir remarqué que cette fauſſe racine étoit égale aux deux vrayes; mais ici il n'en eſt pas de même, car il faut neceſſairement qu'elle donne une ſolution particuliere, puiſque les rencontres des deux lieux donnent des ſolutions du Problême, auſſi ce point *S* en eſt-il une; car l'arc *BS* eſt le tiers de la difference entre les deux arcs *FAB*, *FGB*, ce qui réſout le Problême dans toute l'étenduë qu'on peut deſirer; car par ce moyen non ſeulement chacune des portions propoſées de tout le cercle eſt diviſée en trois parties, mais encore tout le cercle le ſera aux points de rencontre *HSG*, & par conſéquent *BS* ſera le tiers de la difference entre les tiers des deux ſegmens. Ce que l'on trouvera vrai ſi l'on cherche à diviſer l'arc *FGB* en trois parties, en poſant *FG* pour une de ces parties comme on a fait *FH*; car un ſemblable calcul donnera les mêmes hyperboles & dans la même poſition où on les a trouvées pour le point *H*. Enfin ſi l'on tire *BY* parallele à *AM* qui ſera égale & parallele auſſi à *FR*, on voit qu'elle ſera la moitié de

la difference des deux portions du cercle ; & si l'on cherche par la méthode précedente les hyperboles qui diviseront l'arc *BY* en trois parties, dont l'une soit *SY* sur la corde *BY*, comme on a fait pour la portion *FH* sur la corde *FB* ; on trouvera encore les mêmes hyperboles & dans la même position, ce qui sert de démonstration pour ce que j'ai avancé.

On peut assurer que cette Solution est la plus simple & la plus générale de toutes celles qu'on peut trouver pour la trisection d'un angle, puisque de toutes les Sections Coniques il n'y en a point après le cercle qui soit plus facile à décrire, ni dont l'équation soit moins composée que celle de l'hyperbole équilatere entre ses asymptotes, ni qui ait plus de rapport au cercle.

Mais comme il m'a semblé qu'on pouvoit trouver quelque difficulté à chercher le lieu qui donneroit avec le cercle proposé d'autres divisions d'un arc en plus de parties que trois, je ferai voir encore l'application de cette méthode générale dans une division en cinq parties.

FIG. III. Soit l'arc *FAB* donné sur le cercle *FB* dont le centre est *C*, & il faut diviser cet arc en cinq arcs égaux aux points *RHIN*.

Soit fait ; & soit mené le rayon *CA* perpendiculaire sur la corde donnée *FB* qui la coupera en deux également, & de même aussi la corde *HI* de la division du milieu. Soit aussi mené le diametre *CQ* parallele à la corde *FB*, & les rayons *CH*, *CI* qui couperont la corde *RN* aux points *EM*, qui sont les mêmes où les cordes *IF* & *HB* la rencontrent; ce qui est évident par ce qui a été démontré de la division de l'arc en trois parties.

Mais les deux triangles *HRE*, *EFV* sont semblables, puisqu'ils ont leurs angles en *R* & *F* égaux, étant appuïés chacun sur deux divisions de l'arc proposé, & de plus leurs côtés sont paralleles entr'eux ; donc *FV* est égale à *FE*, puisque *RE* est égale à *RH*. Mais aussi la corde *IF* est égale à la corde *RN* ; donc *RM* est égale à *FE*.

égale à FV, égale à NE; & par conséquent on pourroit former la parallelogramme $FRMV$, & l'équilatere $FENV$.

Soit maintenant posé CH rayon du cercle $= r$, & ayant mené HQ parallele à CA, soit $CQ = y = \frac{1}{2} HI$ qui est la demi-corde d'une des divisions, & $HQ = z$. Soit aussi la demi-corde FD donnée $= d$, & CD aussi donnée $= a$, & enfin SQ ou $CO = x$.

On aura donc $HQ = z \mid CQ = y \parallel CO = x \mid OE = \frac{yx}{z}$, & par conséquent RM ou FV ou $FE = RE + 2EO = 2y + \frac{2yx}{z}$.

Mais $HQ \mid QC \parallel CD \mid DV$, ce qui est $z \mid y \parallel a \mid \frac{ay}{z} = DV$.

Donc $FD = FV + DV = 2y + \frac{2yx}{z} + \frac{ay}{z} = d$.

Ce qui donne la premiere équation. Mais comme elle renferme trois inconnuës, il en faut faire évanoüir une, laquelle doit être x, afin qu'il n'y reste que les deux autres y & z qui forment l'équation au cercle donné, sçavoir $rr = yy + zz$.

Les deux triangles HCI, HIE sont semblables, car ils ont un angle commun en H, & l'angle HIF à la circonference sur l'arc HF double de l'arc HI, sera égal à l'angle au centre HCI; c'est pourquoi $CH \mid HI \parallel HI \mid HE$, ce qui est

$r \mid 2y \parallel 2y \mid \frac{4yy}{r} = HE$.

Mais aussi $CH \mid HQ \parallel HE \mid HS$, ce qui est

$r \mid z \parallel \frac{4yy}{r} \mid \frac{4yyz}{rr} = HS$.

Et enfin $HQ - HS = CO = x = z - \frac{4yyz}{rr}$.

Si l'on substituë donc dans la premiere équation que nous avons trouvée $2y + \frac{2yx}{z} + \frac{ay}{z} = d$ cette valeur de x, on aura l'équation du lieu $2yz + 2yz - \frac{8y^3z}{rr} + ay = dz$, ou bien $8y^3z - 4rryz - arry + rrdz = 0$, qui est le lieu d'une hyperbole du second genre entre ses asymptotes à

angles droits, qu'on peut facilement conſtruire à l'ordinaire, après l'avoir préparée & réduite, laquelle rencontrera le cercle propoſé au point *H* & aux autres qui donnent toutes les ſolutions du Problême, comme nous avons vû pour la diviſion de l'arc en trois.

ADDITION A LA SOLUTION générale du Problême de la page 257. des Mem. de 1709. ou parmi une infinité de Courbes ſemblables décrites ſur un plan vertical, & ayant même axe & un même point d'origine, il s'agit de déterminer celle dont l'arc compris entre le point d'origine & une ligne donnée de poſition, eſt parcouru dans le plus court tems poſſible.

PAR M. SAURIN.

Ce qu'on donne ici ſous ce titre eſt hors de ſa place, il avoit été deſtiné à faire partie du Memoire même : on a oublié de l'imprimer à la ſuite de ce Memoire, & il y doit être rapporté.

1710. 9. Avril.

SI on vouloit que la ligne donnée de poſition fût une Courbe Geometrique, la méthode, ainſi que le remarque M. Bernoulli, ſeroit la même ; mais le calcul en ſeroit plus embarraſſé, & d'autant plus embarraſſé, que l'équation de la courbe ſeroit plus compoſée.

* FIG. I.

Soit *CND* * cette Courbe : on aura toûjours $\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$ (tems par *AGB*). t (tems par *AFD*) :: $\sqrt{AB}$. $\sqrt{AD}$ :: $\sqrt{AL}$ $(\sqrt{x})$. $\sqrt{AP}$ :: $\sqrt{BL}$ $(\sqrt{y})$. $\sqrt{PD}$. D'où il vient $t = \frac{\sqrt{AP}}{\sqrt{x}} \times \int\frac{dz}{\sqrt{y}}$, ou $t = \frac{\sqrt{PD}}{\sqrt{y}} \times \int\frac{dz}{\sqrt{y}}$. Il s'agit d'avoir en x, ou en y, la valeur de *AP*, ou celle de *PD* ; ce qui dépend de la conſideration

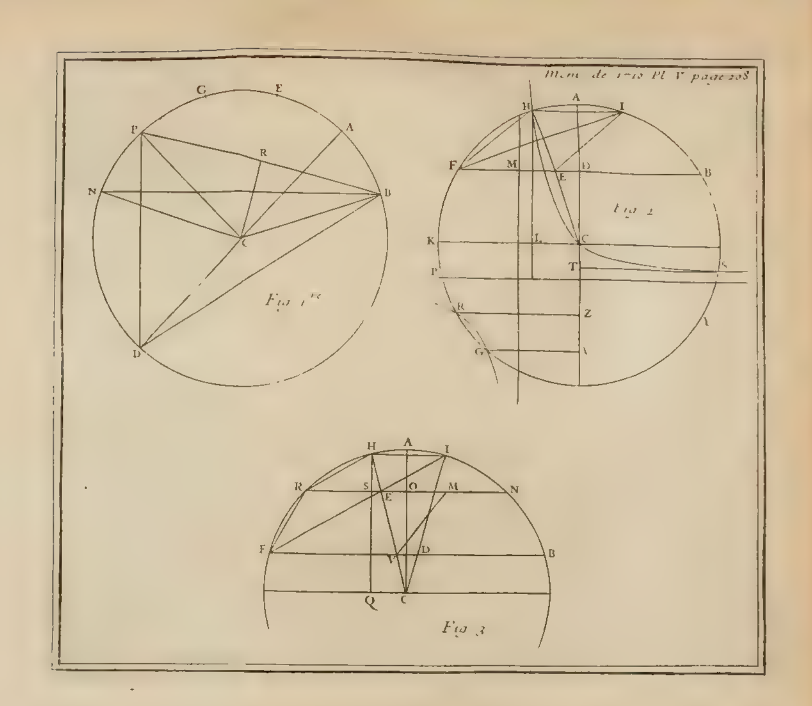
E
A
R
B
C

Fig. 1.re

A
H
I
F
M
D
B
E
Fig. 2.
K
L
C
T
S
P
R
Z
Y
G
V

H
A
I
R
S
O
M
N
E
F
D
B
V
Q
C

Fig. 3.


Mem. de 1710. Pl. V. page 208.
Fig. 1re
Fig. 2
Fig. 3

consideration de trois inconnuës AP, PD, PC; mais aussi a-t-on trois égalités qui déterminent ces valeurs: la premiere, l'équation de la Courbe, qui donne PC en PD, ou PD en PC: la seconde, l'égalité $AC-PC=AP$, ou $AC-AP=PC$; & la troisiéme, celle qui vient de la comparaison des triangles semblables ALB, APD.

Par exemple, prenons pour la Courbe CND * une Parabole ordinaire dont le parametre soit $=p$; si l'on nomme PC, u; la proprieté de la parabole donnera CE, ou $PD=\frac{uu}{p}$; en nommant AC, c; on aura $AC-PC$, ou $AP=c-u$; & les triangles semblables ALB, APD fourniront cette analogie; $BL\,(y).\,AL\,(x)::PD\,\left(\frac{uu}{p}\right).\,AP\,(c-u)$; égalant le produit des Extrémes au produit des moyens, on aura $cy-uy=\frac{uux}{p}$; $pcy-pyu=xuu$, & $uu+\frac{py}{x}\times u=\frac{cpy}{x}$; d'où l'on tire $u=-\frac{py}{2x}+\frac{\sqrt{ppyy+4cpxy}}{2x}$; on a donc $AP=c-u=c+\frac{py\mp\sqrt{ppyy+4cpxy}}{2x}$; & mettant cette valeur dans l'égalité $t=\frac{\sqrt{AP}}{\sqrt{x}}\times\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$, on aura $t=\frac{\sqrt{2cx+py\mp\sqrt{ppyy+4cpxy}}}{x\sqrt{2}}\times\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$, dont la differentiation, avec les réductions convenables, donnera la solution requise. Mais cette differentiation produisant un grand nombre de termes, il en naît des constructions trop composées, & trop pleines d'embarras. C'est ce qui m'a fait penser à un autre moyen de résoudre le Problême, du moins en particulier à l'égard des Cycloïdes.

* FIG. II.

Par les démonstrations précedentes il est clair, que la Cycloïde requise est celle qui coupe à angles droits la Courbe géometrique donnée; car dans cet exemple soit AFD la Cycloïde qui coupe ainsi la parabole CND au point D. Si l'on méne à ce point la tangente QDS, la Cycloïde tombera à angles droits sur cette tangente; & par conséquent en vertu de ce qui a été démontré, l'arc AFD compris entre le point d'origine & la tangente est

celui du plus court tems pour arriver à la même tangente : donc à plus forte raison est-il celui du plus court tems pour arriver à la Parabole ; la tangente étant toute hors de la Parabole de part & d'autre du point D, & du côté du point d'origine A. Par-là le Problême se réduit à déterminer entre une infinité de Cycloïdes, celle qui vient couper la parabole à angles droits ; ce que je fais aisément de cette sorte.

Je méne à l'arc AGB au point B la tangente BK, qui rencontre en K l'horisontale AC prolongée de l'autre côté du point d'origine A ; je méne aussi du point D, DT parallele à BK, qui rencontre en T l'horisontale AC ; & que je prolonge de l'autre côté jusqu'à la rencontre de l'axe de la Parabole au point R ; elle est tangente au point D à l'arc AFD, cet arc étant semblable à l'arc AGB.

Maintenant, nommant ER ; z ; on a $ER\ (z) . ED\ (u) :: PD . PT :: LB\ (y) . LK\ \left(\frac{ydx}{dy}\right) :: dy . dx :: \sqrt{a-y} . \sqrt{y}$ (par la proprieté de la Cycloïde) ; ce qui donne $u = \frac{z\sqrt{y}}{\sqrt{a-y}}$; mais dans le cas de la supposition l'arc AFD tombant sur la parabole à angles droits, il est évident que ER est la sousperpendiculaire de la Parabole, & par conséquent égale à $\frac{1}{2}p$; mettant donc dans l'égalité précedente cette valeur $\frac{1}{2}p$ au lieu de z qui est ER, on aura $u = \frac{p\sqrt{y}}{2\sqrt{a-y}}$; on avoit déja trouvé $u = \frac{-py + \sqrt{ppyy + 4cpxy}}{2x}$; on aura donc $\frac{p\sqrt{y}}{\sqrt{a-y}} = \frac{-py + \sqrt{ppyy + 4cpxy}}{x}$.

En délivrant cette égalité des fractions & des signes radicaux, il vient $4appy - 4ppyy = 16aacc + 16ccyy + ppxx - 32accy - 8acpx + 8cpxy$. Et dégageant yy des quantitez connuës, qui le multipliant, on a . . . . $yy + \frac{2cpxy}{4cc+pp} + \frac{ppxx}{16cc+4pp} - \frac{8accy}{4cc+pp} - \frac{2acpx}{4cc+pp} + \frac{4aacc}{4cc+pp} + \frac{appy}{4cc+pp} = 0$; ce qui est un lieu à l'ellipse, ou au cercle ; la quantité connuë $\frac{pp}{4cc+pp}$, qui multiplie le quarré xx surpassant le quarré de la moitié de celle qui multiplie le plan xy,

ſçavoir le quarré de $\frac{cp}{4cc+pp}$; car ſi on fait $c.p::p.q$; on aura $pp=cq$; & $\frac{pp}{16cc+4pp}=\frac{pp}{16cc+4cq}$; on aura auſſi $\frac{cp}{4cc+pp}=\frac{cp}{4cc+cq}=\frac{p}{4c+q}$, dont le quarré $\frac{pp}{16cc+8cq+qq}$ eſt moindre que $\frac{pp}{16cc+4cq}$ qui multiplie xx.

Si l'on conſtruit ce lieu, il ira couper la Parabole au point B cherché. *Ce qu'il falloit trouver.*

Quelque généralité que nous ayons donné au Problême réſolu dans un Memoire précedent & dans celui-ci, il eſt toûjours reſtraint par cette condition, que les lignes qui partent du même point d'origine A, ſont des lignes courbes ſemblables. Comme cette conſideration de lignes ſemblables n'a plus de lieu, ſi on change les Courbes en lignes droites ; les ſolutions précedentes ne renferment point le cas des lignes droites, non plus que celui des Courbes diſſemblables. Quoique la Solution particuliere de ce cas des lignes droites, ſoit la choſe du monde la plus aiſée par les voyes les plus communes, je ne laiſſerai pas de la donner ici par occaſion de deux manieres differentes, qui plairont peut être du moins aux Commençans, l'une par la ſimplicité de la conſtruction que j'en tire, & l'autre par la brieveté & le tour particulier de la Solution même.

Parmi les lignes droites qui peuvent être menées du point * A à une donnée de poſition quelconque CR, ſoit AD celle le long de laquelle un corps tombant du point A, arrive à quelque point D de la donnée de poſition dans le plus court tems poſſible. Je mene AF perpendiculaire à la donnée de poſition au point F ; & des points F & D je mene les droites FQ, DL paralleles entr'elles & perpendiculaires l'une & l'autre à l'horizontale AC : du point F, je mene auſſi FO perpendiculaire à DL au point O.

* FIG. III

La droite AC étant donnée avec l'angle ACF, les lignes AF, CF, QF, ſont auſſi données : je nomme donc AF, a ; CF (m) ; QF, n ; l'inconnuë OD, x ; & le tems de la chute par AD, t. Les triangles rectangles & ſemblables QFC, ODF donneront cette analogie ; QF (n)

$CF\ (m) :: GD\ (x)$. $FD = \frac{mx}{n}$, & par conféquent AD qui eft $\sqrt{AF^2 + FD^2}$, fera en termes analytiques $\frac{\sqrt{aann + mmxx}}{n}$: Mais on fçait que le tems de la chute par AD eft égal à celui qu'employeroit un corps à parcourir deux fois AD avec une viteffe acquife au point D par la chute de A en D; on a donc $t = \frac{2AD}{\sqrt{LD}} = \frac{2\sqrt{aann + mmxx}}{n\sqrt{x+n}} =$ *Minimum.* En differentiant il vient, $\frac{2mmxdx \times \sqrt{x+n}}{n \times \overline{x+n} \times \sqrt{aann + mmxx}} - \frac{dx \times \sqrt{aann + mmxx}}{n \times \overline{x+n} \times \sqrt{x+n}} = 0$; & mettant à même dénominaifon, on a, $\frac{2mmxdx \times \overline{x+n} - dx \times \overline{aann + m^2xx}}{n \times \overline{x+n} \times \sqrt{x+n} \times \sqrt{aann + mmxx}} = 0$; & par conféquent $2nmmx + 2mmxx = aann + mmxx$; & $2nmmx + mmxx = aann$, ou $xx + 2nx = \frac{nn}{mm}aa$; d'où l'on tire $x + n = \frac{n}{m}\sqrt{aa + mm}$; ce qui fe réfout en cette analogie, $n\ (QF)$. $m\ (CF) :: x + n\ (LD)$. $\sqrt{aa + mm}\ (AC)$; mais à caufe des triangles femblables QFC, LDC, on a auffi $QF\ (n)$. $CF\ (m) :: LD\ (x+n)$. CD; donc $CD = AC$: ainfi pour déterminer la ligne cherchée AD, on n'a qu'à prendre CD égale à AC; & ce feroit toute la même chofe s'il s'agiffoit de faire monter un corps du point A * par quelque droite Ad pour arriver dans le plus court tems poffible à quelque point d d'une donnée de pofition quelconque Cd; de forte que fi du point C comme centre, & de la diftance CA comme rayon, on décrit le cercle DAd, ce cercle fera le lieu de tous les points D ou d, pour toutes les pofitions de la droite CD ou Cd, foit que le corps defcende ou qu'il monte; & la corde de l'arc qui mefure l'angle que fait l'horizontale avec la donnée de pofition, fera par tout la droite requife AD ou Ad. On entend bien fans doute que dans le cas où le corps monte, il commence à monter avec la viteffe fuffifante pour arriver feulement à la donnée de pofition Cd, c'eft à-dire avec la même viteffe qu'il auroit acquife en defcendant de la donnée de pofition au point A, par la même ligne qu'il monte du point A, à la donnée de pofition.

* FIG. IV.

AUTRE SOLUTION

SANS CALCUL.

Du point * A soit mené la verticale AM jusqu'à la rencontre de la donnée de position au point M, & sur AM comme diametre soit décrit le cercle $AFGM$. Soit aussi prolongée la droite AD jusqu'au point G, où elle rencontre la circonference du cercle. Le tems de la chute par la corde AG qui est égal à celui de la chute par toute autre corde, étant appellé θ ; on aura par tout dans le cercle, t (temps par AD) . θ (temps par AG) : : $\sqrt{AD} . \sqrt{AG}$; & $t = \theta \times \frac{\sqrt{AD}}{\sqrt{AG}}$; mais ici par la supposition, ce temps par AD doit être un *minimum* ; donc la difference de $\frac{\sqrt{AD}}{\sqrt{AG}}$ doit être nulle ; donc la corde AG doit être telle, que si l'on mene une autre corde Ag infiniment proche, coupant au point d la donnée de position CM, on ait $\frac{\sqrt{Ad}}{\sqrt{Ag}} = \frac{\sqrt{AD}}{\sqrt{AG}}$; ou $\sqrt{AD} . \sqrt{AG} : : \sqrt{Ad} . \sqrt{AG}$; & par conséquent $AD . AG : : Ad . Ag$; mais cela ne se trouve ainsi que dans un point G, tel que la tangente en ce point soit parallele à la corde FM, & ce point dans le cercle est celui qui partage en deux également l'arc FM ; car il est évident que l'arc infiniment petit Gg se confondant avec la partie infiniment petite Gg de la tangente, & cette tangente étant parallele à la corde FM, on a $AD . AG : : Ad . Ag$. Il ne faut donc pour la construction du Problême, que couper en deux également l'arc FM, & du point A mener au point d'intersection G, la ligne AG qui rencontre en D la donnée de position, le point D sera le point requis, & la droite AD sera celle du plus court tems possible.

* FIG. V.

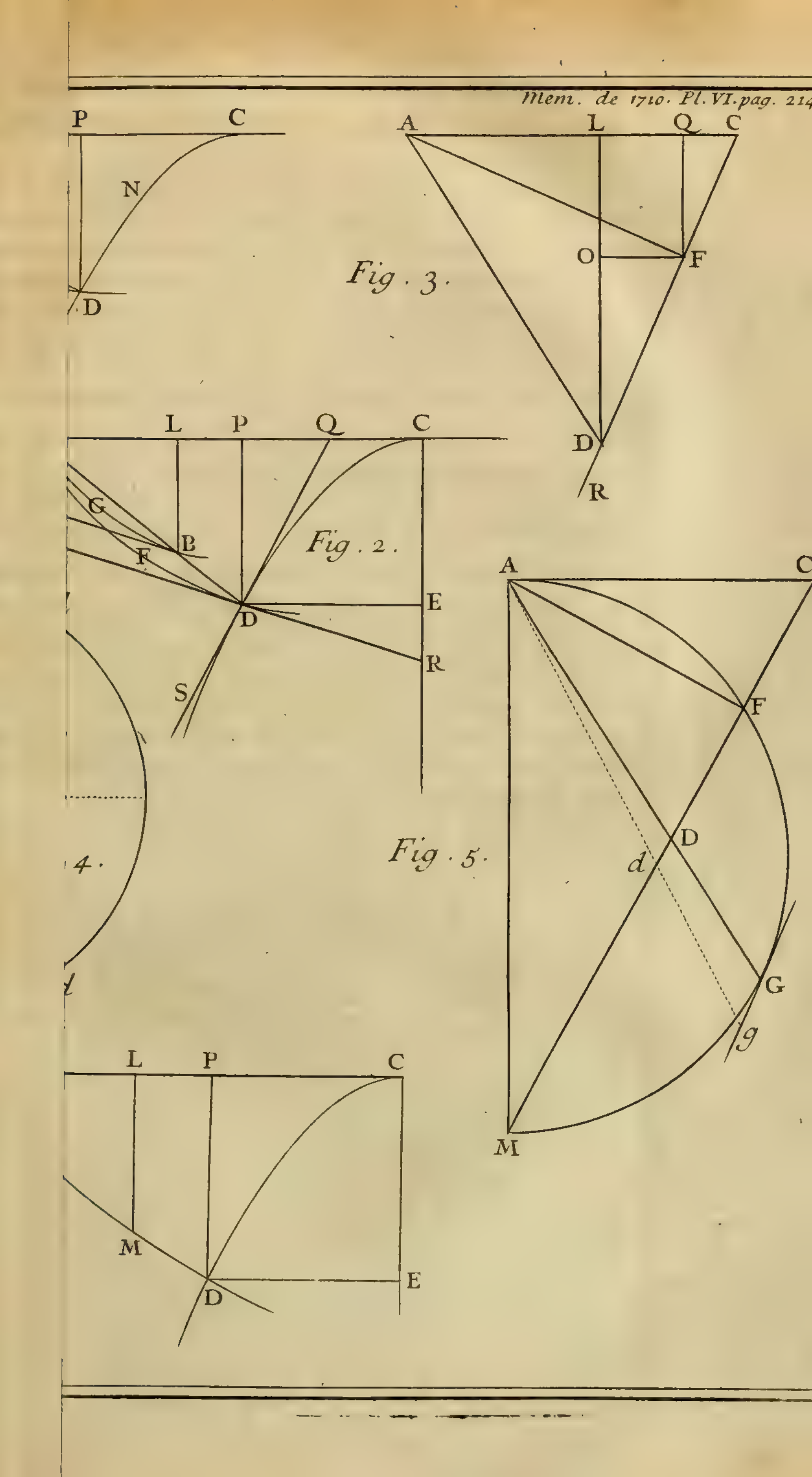
Il est clair que cette construction est donnée par la précedente, & qu'elle la donne réciproquement ; c'est-à-dire, que si AC est égale à CD, le point G partage également en deux l'arc FM ; & réciproquement que l'arc FM étant par-

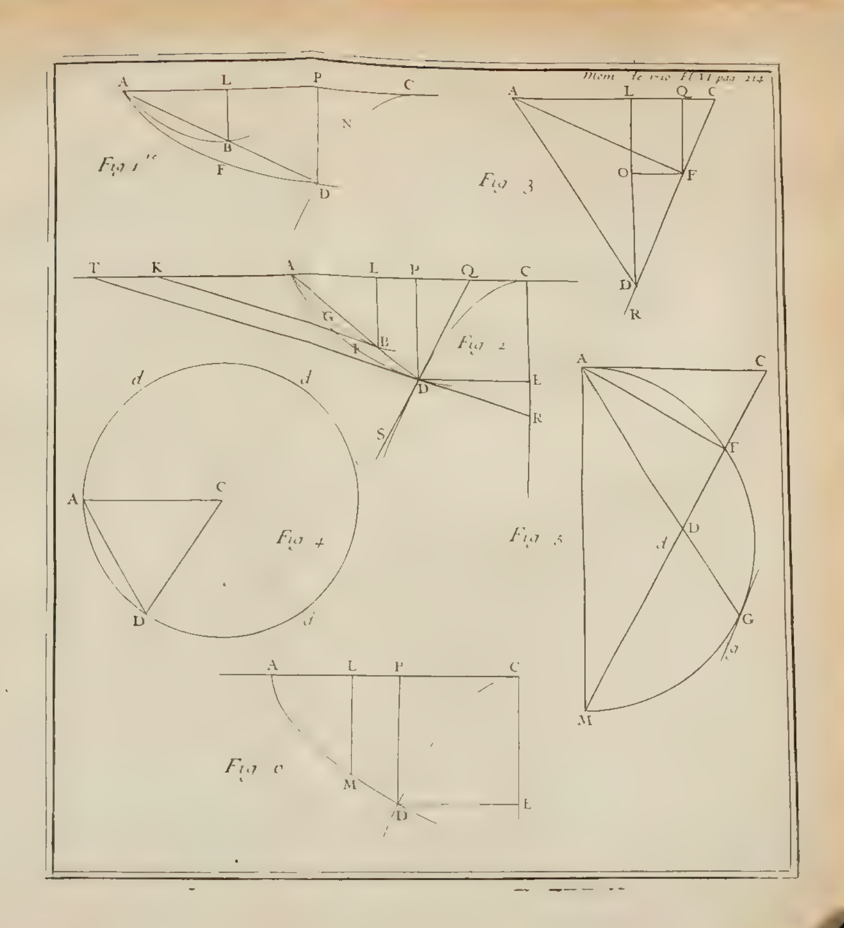
tagé en deux également au point G par la droite AG, CD eſt égale à AC.

Si dans le cas de la chute par des lignes droites la donnée de poſition étoit une Courbe quelconque geometrique CND *, la Solution ſeroit très-facile; car nommant, comme auparavant, AC, c; PC, u; AP, $c-u$; & PD, y; on aura $AD = \sqrt{yy+cc-2cu+uu}$; & t (temps par AD) $= \frac{2AD}{\sqrt{PD}} = \frac{2\sqrt{yy+cc-2cu+uu}}{\sqrt{y}}$. L'équation de la Courbe donnera y en u; ainſi cette Courbe étant une Parabole dont le parametre $=p$; on aura $y = \frac{uu}{p}$; & par conſéquent $\frac{2\sqrt{yy+cc-2cu+uu}}{\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{u^4+ppcc-2ppcu+ppuu}}{u\sqrt{p}}$. En differentiant ſelon la methode, & faiſant les réductions neceſſaires, on viendra à l'égalité $\frac{u^4}{pp} = cc - uu$, qui ſe conſtruit de cette ſorte: Du point A comme ſommet, & ſur l'horizontale AC comme axe, je décris la Parabole dont le Paramêtre eſt égal à la diſtance donnée AC (c); le point D où elle coupe l'autre Parabole CND, eſt le point cherché; car on a par tout $LM^2 = C \times AC - LC$, & par conſéquent au point D, $PD^2 = C \times AC - PC$; ce qui eſt cauſe de la Parabole CND, $\frac{u^4}{pp} = cc - cu$.

* FIG. VI.




P
C
N
D
A
L
Q
C
O
F
Fig. 3.
D
R
L
P
Q
C
G
B
F
Fig. 2.
D
E
R
S
A
C
F
Fig. 5.
D
d
G
g
M
4.
L
P
C
M
D
E


Mem. 1710 Pl. VI pag. 214
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
A
L
P
C
N
B
F
D
Q
O
R
T
K
G
E
S
d
M
g

COMPARAISON DES OBSERVATIONS

De l'Eclipse de Lune du 13. Février 1710.

Faites en differens lieux.

PAR M. MARALDI.

1710. 12. Mars.

NOUS avons comparé les Observations de cette Eclipse faites à Montpellier par Mrs de Plentade & de Clapiez, avec celles qui ont été faites en même tems à Versailles & à Paris; & voici ce qui en résulte.

11h	15′	50″	Tout Grimaldi hors de l'ombre à Montp.
11	9	0	Grimaldi est entierement sorti de l'ombre à Versailles.
	6	50	Difference des Meridiens entre Versailles & Montpellier; mais Versailles est plus Occidental que Paris de 50″ de tems. Donc difference des Meridiens entre Paris & Montpellier, 6′ 0″.
11	23	53	L'Eclipse étoit de 8 doigts à Montpellier.
	19	0	La même phase à Paris.
	4	51	Difference des Meridiens.
11	32	40	L'Eclipse est de 7 doigts à Montpellier.
	28	0	Elle est de 7 doigts à Paris.
	4	40	Difference des Meridiens.
11	29	0	Copernic hors de l'ombre à Montpellier.

11h	22′	0″	L'ombre quitte Copernic à Verſailles.
	7	0	Difference des Meridiens entre Montpellier & Verſailles, & entre Montpellier & Paris, 6′ 10″.
11	42	0	L'ombre au bord de Menelaus à Montpel.
11	36	15	L'ombre à Menelaus.
	5	45	Differ. des Merid. entre Montp. & Paris.
11	47	2	Pline à Montpellier.
10	40	0	Pline commence à ſortir à Verſailles.
	7	2	Difference des Meridiens entre Verſailles & Montpellier, & entre Paris & Montpellier, 6′ 12″ par cette obſervation.
11	47	2	Pline à Montpellier.
11	41	20	L'ombre à Pline obſervée à Paris.
	5	42	Difference des Meridiens.
11	53	18	Tout Tycho hors de l'ombre à Montpel.
11	47	10	L'ombre au ſecond bord de Tycho à Paris.
	6	8	Difference des Meridiens.
12	12	24	L'Eclipſe eſt d'un doigt à Montpellier.
12	8	0	La même phaſe à Paris.
	4	24	Difference des Meridiens.
12	18	10	Fin de l'Eclipſe à Montpellier.
12	12	20	Fin de l'Eclipſe à Paris.
	5	50	Diff. des Merid. entre Paris & Montpell.
12	11	30	Fin de l'Eclipſe à Verſailles.
	6	40	Difference des Meridiens entre Verſailles & Montpellier.

Par

Par la comparaiſon de ces Obſervations, les Taches de Grimaldi, de Copernic, & de Tycho donnent à quelques ſecondes près la même difference des Meridiens entre Verſailles, Paris & Montpellier; Et celle qui réſulte entre Montpellier & Paris de 6′ 10″, s'accorde avec celle qui a été trouvée par les obſervations des Satellites de Jupiter faites de part & d'autre, & par les triangles de la Meridienne. La difference des Meridiens qui reſulte entre Paris & Verſailles par les mêmes obſervations, eſt auſſi la même qu'on a trouvée entre ces deux Villes par des opérations géometriques.

Cette préciſion vient de ce que ces Taches ſont aſſez bien déterminées, & qu'on a marqué de part & d'autre le tems que l'ombre quittoit le ſecond bord de ces Taches. Il n'y a pas la même préciſion dans la difference des Meridiens qui réſulte des Taches de Pline & de Menelaüs obſervées à Paris & à Montpellier, parceque comme ces Taches ont quelque largeur, on ne s'eſt peut-être pas accordé à marquer l'arrivée de l'ombre au même terme de la Tache, comme on a fait dans l'obſervation des Taches précedentes.

La difference des Meridiens qui réſulte de la détermination des doits éclipſez, eſt un peu plus éloignée que celle des Taches; ce qui fait voir qu'on ne doit employer ces ſortes d'obſervations dans la recherche des longitudes, que lorſqu'on n'a point d'obſervations des Taches.

On voit enfin que dans la détermination de la fin de cette Eclipſe tous les Obſervateurs ſont d'accord à une demie minute près, quoiqu'on ne ſoit pas ſi préciſément d'accord dans la détermination des doits éclipſez.



DIVERSES OBSERVATIONS DE LA CONJONCTION DE LA LUNE AVEC LES PLEIADES.

PAR M. MARALDI.

1710. 15. Mars.

L'Orbite de la Lune ſur laquelle ſe fait ſon mouvement propre coupe preſentement l'Ecliptique vers le commencement du ſigne des Poiſſons où eſt ſon nœud aſcendant, & vers le commencement du ſigne de la Vierge où eſt ſon nœud oppoſé ; ainſi le terme de la plus grande latitude Septentrionale, qui eſt toûjours à 90 degrés des nœuds, ſe rencontre au commencement des Jumeaux, & l'autre terme dans le ſigne oppoſé.

Dans cette ſituation de l'Orbite quand la Lune paſſe par ſon mouvement propre par le 27 degré du Taureau, ſon centre eſt éloigné du côté du Septentrion à l'égard de l'Ecliptique d'envion 5 degrés ; & comme la petite conſtellation des Pleïades ſe trouve preſentement dans ce degré de longitude avec une latitude Septentrionale de 4 degrés ou environ, la Lune qui dans nos climats a toûjours une parallaxe de pluſieurs minutes qui la font paroître plus baſſe, cache ces Etoiles & les éclipſe à une grande partie des païs ſituez dans l'hémiſphere Septentrional de la Terre.

Ces interſections de l'Orbite de la Lune avec l'Ecliptique changent comme l'on ſçait de place à l'égard des Etoiles fixes par un mouvement retrograde, ce qui eſt cauſe qu'en peu de tems la Lune paſſe éloignée des Etoiles avec leſquelles elle s'étoit rencontrée proche des interſections ; mais il n'en eſt pas de même à l'égard des Etoiles qui en ſont à une grande diſtance & qui ſe rencon-

trent dans les termes de la plus grande latitude, ou à quelque diſtance de côté & d'autre des termes, parceque dans ces endroits la variation de la latitude qui arrive à la Lune en trois années, n'eſt pas plus grande que celle qui arrive en un an proche des interſections.

Lors donc que les Etoiles des Pleïades ſe trouvent proche de ces termes elles ſont éclipſées, & ces éclipſes durent pendant quelques années de ſuite par rapport au païs ſituez dans nôtre hémiſphere, & cela arrive non-ſeulement à cauſe du peu de variation de la latitude, mais parceque ces Etoiles occupent dans le Ciel un eſpace en latitude qui eſt environ de deux tiers de degré.

Nous avons obſervé depuis deux ans trois differentes conjonctions écliptiques de la Lune avec ces Etoiles. Nous obſervâmes la premiere l'an 1708 le 30 d'Octobre, & pour lors la Lune par ſon bord Oriental éclipſa l'Etoile appellée Atlas à 8 heures 29′ 30″, & elle ſortit du bord Occidental à 8 heures 59′ 35″ comme une de ces pointes claires qu'on voit ſur le bord obſcur de la Lune. Cette Etoile eſt la plus Meridionale des huit Etoiles les plus claires. L'heure de ſon Immerſion étant comparée avec celle de l'Emerſion, le tems de l'Eclipſe de l'Etoile a duré 30′ 0″, & ſa conjonction apparente eſt arrivée à 8 heures 44′ 35″ du 30 Octobre au ſoir.

L'année derniere 1709 on obſerva deux fois en differens mois la conjonction de la Lune avec les Etoiles plus Septentrionales des mêmes Pleïades. On fit la premiere de ces obſervations le 23 de Septembre. Les nuages qui étoient ce jour-là proche de l'horizon empêcherent d'obſerver l'Immerſion des deux Etoiles plus Occidentales, qui ſont Electra & Celeno, dans le bord Oriental de la Lune.

A 8 heures 26′ 20″, la Lune étant dégagée des nuages, on obſerva l'Immerſion de l'Etoile Maïa derriere le bord Oriental de la Lune; à 8h 30′ 21″ on obſerva l'Immerſion de Taigeta; à 8h 49′ 12″ une Etoile qui eſt la plus proche d'Aſterope fut cachée par le bord Septentrional de la

Lune; à 8h 50′ 33″ Celeno étoit ſortie du bord Occidental de la Lune; à 8h 52′ 58″ Taigeta ſortit du même bord; à 9h 13′ 19″ l'Etoile proche d'Aſterope fut découverte; à 9h 15′ 52″ Maïa ſortit entierement de la Lune.

L'Eclipſe de cette Etoile a été plus grande que celles des autres, ayant duré 49′ 12″; celle de Taigeta a duré 22′ 37″, & l'Etoile prochaine d'Aſterope fut cachée l'eſpace de 24′ 7″. Aſterope ne fut point éclipſée dans cette conjonction, mais elle paſſa ſi près du bord Septentrional de la Lune qu'elle n'en fut éloignée que d'une minute de degré. Alcione qui reſta du côté du bord Meridional de la Lune, paſſa auſſi ſans être Eclipſée, & lorſqu'elle en fut plus proche, elle n'en étoit éloignée qu'environ une minute de degré; donc ſon centre apparent paſſa à égale diſtance d'Alcione & d'Aſterope, c'eſt à-dire 5. minutes plus vers le Septentrion que dans la conjonction du 30 Octobre de 1708.

M. Manfredi fit auſſi près de Bologne le 23 Septembre l'obſervation du paſſage de la Lune parmi ces Etoiles. Il obſerva qu'à 8h 24′ 53″ Electra fut cachée par la Lune, que Taigeta le fut à 8h 48′ 54″, & que Maïa s'éclipſa à 8h 51′ 24″. Electra étoit ſortie du bord Occidental de la Lune peu de ſecondes avant 9h 11′ 13″. Celeno ſortit à 9h 19′ 14″. Taigeta ſe découvrit à 9h 26′ 49″, & Maïa à 9h 45′ 31″.

En comparant enſemble les mêmes obſervations faites à Paris & à Bologne, on y trouve des differences qui varient depuis 14′ 12″ qui eſt la plus petite qui ſe trouve dans l'Emerſion de Taigeta, juſqu'à 29′ 39″ qui eſt la plus grande difference, & réſulte de l'Emerſion de Maïa obſervée de part & d'autre.

Les differences & les variations qui s'y rencontrent dépendent de la combinaiſon de trois principes differens. La premiere difference, qui eſt la plus ſenſible, vient de la difference des Meridiens; car Bologne étant plus Oriental que Paris, on y compte dans le même inſtant plus d'heures qu'à Paris: mais comme la conjonction de la Lune avec les Etoiles ſe fait par ſon mouvement pro-

pre d'Occident en Orient, elle eſt vûë plûtôt des parties Occidentales de la Terre que des Orientales ; c'eſt-pourquoi la Lune ayant rencontré plûtôt à Paris la ligne viſuelle qui va de l'œil à l'Etoile qu'elle ne l'a rencontrée à Bologne, la difference qui vient de ce principe diminuë la premiere qui eſt cauſée par la difference des Meridiens.

Le troiſiéme principe d'où dépendent ces variations, vient de ce que la Lune n'a pas rencontré dans ces deux Villes les mêmes Etoiles au même point de ſa circonference ; ce qui peut faire des cas differens ſuivant qu'elles paſſent éloignées du centre apparent de la Lune vers le Septentrion ou vers le Midi plus dans un païs que dans l'autre.

Par la déclinaiſon de la Lune & par la durée des éclipſes qui a été plus grande à Bologne qu'à Paris, il eſt aiſé de voir que les mêmes Etoiles ſont paſſées à Paris plus éloignées du centre apparent de la Lune vers le Septentrion, qu'elles n'ont paru à Bologne où l'Etoile appellée Taigeta a été cachée 37′ 55″, à Paris elle n'a été que 22′ 37″. L'Eclipſe de Maïa a duré à Bologne 54′ 7″, à Paris ſeulement 49′ 32″.

La difference entre la durée de ces Eclipſes eſt un effet de la parallaxe de la Lune de nôtre parallele à l'égard de celui de Bologne, & elle pourroit ſervir à chercher la parallaxe qui convient au diametre entier de la Terre ; mais il eſt plus ſûr de la trouver par pluſieurs obſervations que nous fîmes à Paris, & que nous rapporterons une autre fois.

La ſeconde conjonction de la Lune avec les Pleïades que nous obſervâmes l'année derniere, fut celle qui arriva le 14 Decembre. On obſerva qu'à 5^h 37′ 54″ Celeno fut cachée par le bord Oriental de la Lune, Taigeta ſe couvrit à 5^h 59′ 19″, Maïa fut éclipſée à 6^h 6′ 21″, & à 6^h 28′ 49″ ce fut l'Etoile la plus proche d'Aſterope, & à 6^h 23′ 16″ fut obſervée l'Immerſion d'Aſterope. A 6^h 27′ 52″ Electra étoit ſortie du bord Occidental de la Lune il y

avoit peu de ſecondes ; à $6^h\ 43'\ 16''$ Celeno ſortit du même bord ; à $6^h\ 56'\ 40''$ Taigeta ſe découvrit ; à $7^h\ 13'\ 38''$ Maïa commença de paroître en ſortant derriere la Lune. On fit toutes ces obſervations avec deux differentes Lunetes. On ne put pas obſerver l'Emerſion des autres Etoiles plus petites dont on avoit obſervé l'Immerſion, à cauſe qu'on avoit de la peine à les voir proche du bord éclairé de la Lune.

Dans cette derniere conjonction l'Eclipſe de Maïa a duré $1^h\ 7'\ 17''$, & c'eſt l'étoile qui a été plus long-tems cachée par la Lune. Dans la conjonction de Septembre l'Eclipſe de la même Etoile ne dura à Paris que $49'\ 32''$, de ſorte qu'elle dura 18 minutes de moins que dans le mois de Decembre. Cette difference vient principalement de la variation qu'a fait l'Orbite de la Lune parmi les Etoiles fixes à cauſe du mouvement retrograde des nœuds, ce qui fait que dans la conjonction de Decembre la latitude de la Lune a été plus Septentrionale de 6 minutes que dans la conjonction de Septembre.

Il y aura encore cette année & la ſuivante pluſieurs conjonctions de la Lune avec les Etoiles, à cauſe du peu de changement de latitude qui arrive à la Lune dans cette intervalle de tems.

Nous avons pluſieurs obſervations de la Lune avec les Pleïades faites en differens Siecles, mais principalement dans le dernier. La plus ancienne que nous ayons eſt celle qui fut faite par Timocharis à Alexandrie la 47e année de la premiere periode de Calippus l'année 465 de Nabonaſſar le 29 d'Atir, ce qui convient avec l'année 283 avant l'Epoque de Jeſus-Chriſt le 29. de Janvier. Entre l'obſervation de Timocharis & celle du 23 Septembre de l'année 1709, il y a une intervalle de 1992 années Juliennes & 226 jours, pendant laquelle il y a eu 112 révolutions de la latitude, 546 periodes d'Anomalie, qui eſt la même à peu de degrés dans ces deux obſervations auſſi éloignées, & il y a 26638 retours periodiques de la Lune à l'égard des mêmes Etoiles, qui ſont toutes circonſtances remarquables.

DE LA NECESSITE'

QU'IL Y A DE BIEN CENTRER

le Verre objectif d'une Lunette.

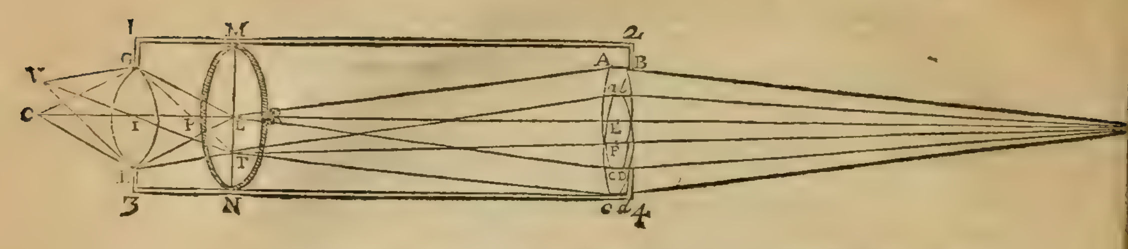
PAR M. CASSINI le Fils.

POur obſerver les diſtances apparentes des Aſtres on ſe ſervoit autrefois de cercles, demi-cercles ou quarts de cercles diviſés en degrés & minutes, & garnis de quatre pinules dont deux étoient fixes, placées l'une au commencement de la diviſion, & l'autre diametralement opposée. Les deux autres étoient portées ſur une regle mobile autour du centre de l'Inſtrument appellée par les Modernes Alidade.

1710. 26. Mars.

Depuis l'invention des Lunettes on a ſubſtitué aux pinules deux Lunettes, dont l'une eſt fixe ſur une ligne parallele au rayon qui paſſe par le commencement de la diviſion, l'autre eſt placée ſur une regle qui tourne autour du centre. L'on place au foyer des Verres objectifs de ces Lunettes, deux fils qui ſe croiſent dans l'axe à angles droits, dont l'un eſt parallele au plan de l'Inſtrument, & l'autre lui eſt perpendiculaire. L'on met l'Oculaire dans un tuyau qui s'enfonce dans celui de la Lunette, de ſorte que les fils qui ſe croiſent ſoient à ſon foyer afin de bien diſtinguer leur interſection.

Ces Lunettes ainſi diſpoſées ont un grand avantage ſur les pinules, à cauſe qu'on diſtingue par leur moyen les objets terreſtres & celeſtes avec beaucoup plus d'évidence, & qu'on obſerve plus exactement leurs diſtances entr'eux en les plaçant exactement dans l'interſection des fils qui ſe croiſent à leur foyer à angles droits ; mais il eſt neceſſaire que les Verres objectifs ſoient bien centrés, c'eſt-à-dire qu'à leur circonference ils ſoient par tout



d'égale épaiſſeur. Car ſoit 1, 2, 3, 4, un tuyau de Lunette qui ait à une de ſes extremités un Verre objectif *ABCD* bien centré, enſorte que le centre *E* de ce Verre ſoit exactement dans l'axe *SEIO* de la Lunette; ſoit à l'autre extremité un Oculaire *GH* dont le centre *I* ſoit auſſi dans l'axe de la Lunette. Soit *S* un objet fort éloigné d'où partent les rayons *SB*, *SD* cenſés paralleles, qui tombant ſur la ſurface du Verre *BD*, ſe rompent & vont ſe réünir dans l'axe en *L*, qui eſt l'interſection de deux fils de ſoye *MN*, *PR* qui ſe coupent à angles droits, & dont *MN* eſt vertical & *PR* horizontal. On ſuppoſe que le point *L* eſt placé au foyer de la Lentille *GH*, en ſorte que les rayons *GL*, *HL* qui partent de ce point & tombent ſur la ſurface de la Lentille *GH*, vont ſe réünir en *O*. L'œil étant en *O* verra l'objet *S* en *L* dans l'axe de la Lunette, & par conſéquent dans ſa ſituation veritable.

Si l'on fait mouvoir le Verre objectif *ABCD* en *abcd*, enſorte que le centre du Verre ſoit par exemple en *F*; alors les rayons qui partent de l'objet *S* iront ſe réünir en *T* à l'extremité de l'axe *SFT* qui paſſe par le centre du Verre *F*, & les rayons qui partent du point *T* & tombent ſur l'Oculaire *GH* iront ſe réünir au point *V*, où l'œil étant placé verra l'objet *S* en *T* dans une ſituation differente de celle où il paroiſſoit lorſque le Verre objectif étoit au centre de la Lunette.

Si l'on ſuppoſe preſentement qu'on veüille obſerver la diſtance entre deux Aſtres avec deux Lunettes, dont l'une ait ſon Verre objectif bien centré, & l'autre mal centré

centré. Si l'on incline l'instrument pour observer la distance apparente des deux Astres, la Lunette bien centrée tournant par ce mouvement autour de son axe, le centre *E* de l'Objectif reste dans l'axe de la Lunette, & son foyer tombe sur le point *L* intersection des fils; mais le centre *F* de l'Objectif mal centré décrira par ce mouvement un petit cercle autour de l'axe *EL* de la Lunette, & le point *T* où se réünissent alors les rayons, décrira aussi un cercle semblable autour du centre *L*; de sorte que la distance apparente entre ces deux Astres, observée avec deux Lunettes dont l'une a son Objectif bien centré & l'autre mal centré, ne sera pas leur distance veritable, & sera sujette à des irrégularités ausquelles on ne peut remedier qu'en centrant exactement les deux Verres objectifs, ou les dirigeant l'un sur l'autre à un même objet, ce qui revient à la même chose.

OBSERVATIONS

SUR LES MATIERES SULPHUREUSES

& sur la facilité de les changer d'une espece de soufre en une autre.

PAR M. HOMBERG.

1710. 22. Avril.

J'Ai appellé dans mes Memoires précedens Matiere sulphureuse ou Soufre, toutes les matieres huileuses ou grasses que nous connoissons. J'en ai usé ainsi pour les distinguer d'avec le Soufre principe. Ensuite j'ai supposé, & crois même avoir en quelque façon prouvé, que ce Soufre principe n'est autre chose que la matiere de la lumiere, qui n'est pas déterminée encore à aucune des especes de Soufres ou de matieres sulphureuses que nous connoissons, mais qui les produit en s'arrêtant en quantité convenable dans les differens corps où elle s'est

introduite ; car quoiqu'avant ce tems elle ne paroisse pas une matiere qui soit évidemment huileuse, elle ne laisse pas d'en donner quelques marques, que j'ai rapportées ailleurs.

J'ai divisé les Matieres sulphureuses en trois classes ; la premiere est, lorsque le Soufre principe s'arrête principalement dans les matieres terreuses, & pour lors il produit un soufre bitumineux sec, comme sont le soufre commun, les charbons de terre, le jayet, l'asphalte, l'ambre jaune & autres. La seconde est, lorsqu'il s'arrête principalement dans une matiere aqueuse, & en ce cas il produit une graisse ou une huile qui est animale, ou vegetale, ou bitumineuse ; selon qu'elle se tire d'une partie animale, ou d'une plante, ou qu'elle sort immédiatement de la terre. Et la troisiéme est, quand il s'arrête principalement dans une matiere mercurielle, & pour lors il produit un soufre métallique.

J'ai supposé aussi que le soufre principe, quoique devenu matiere sulphureuse, de quelque espece qu'elle puisse être, ne change point de nature ; il peut non seulement se dégager des matieres sulphureuses qu'il avoit produites ; & reparoître simplement matiere de la lumiere, mais il peut encore, en restant la même matiere sulphureuse, changer d'état, c'est-à-dire passer d'une espece de soufre en une autre espece, sans se dépoüiller du corps qui l'avoit caracterisé en premier lieu ; ce qu'il fait en s'introduisant simplement dans un autre mixte, qui par quelque accident avoit perdu sa propre matiere sulphureuse.

J'ai commencé dans un Memoire précedent à prouver cette supposition par quelques exemples que j'ai raportés ; j'ai tiré ces exemples des huiles vegetales & des graisses animales que l'on peut faire rentrer dans les matieres minerales & métalliques desséchées par la calcination au point qu'elles ne se fondent plus, ou qu'elles se vitrifient seulement en une matiere scorieuse ; si l'on ajoûte quelque huile que ce soit à ces mineraux ainsi détruits, ils reprennent dans un moment au grand feu la

même forme de mineral ou de métal qu'ils avoient auparavant; la raison est que l'huile du vegetal se met à la place de la matiere huileuse ou sulphureuse du mineral, que le feu de la calcination en avoit fait évaporer; ce qui se voit dans toutes les chaux des moindres métaux, mais plus évidemment dans celle qui se fait de l'étain au verre ardent.

Quand on veut dessécher les métaux, il faut avoir la précaution de les dessécher sur un support qui n'ait en lui aucune matiere huileuse qui puisse s'évaporer avec celle du métal, autrement le métal reprendroit celle du support à la place de la sienne propre à mesure qu'elle la perd, & ainsi le métal ne se dessécheroit point, mais il s'en iroit tout entier en fumée, comme il arrive toûjours à l'étain, au plomb & à tous les mineraux métalliques, comme le bismuth, le regule d'antimoine, le zink & autres quand on les expose sur un charbon au verre ardent; mais quand on desséche l'étain, par exemple sur une coupelle des raffineurs il fume beaucoup dans le commencement, & peu à peu la goute du métal devient herissée, poussant des pointes ou des poils qui s'allongent ou montent de plus en plus, jusques à ce que toute la masse de l'étain soit changée en une houpe, ou en une espece de brosse, d'un blanc sale & d'une matiere brillante, dont les poils du milieu sont les plus longs, & ceux d'alentour s'accourcissent à mesure qu'il s'éloignent du centre de la houpe.

En continuant d'exposer cette matiere sur le même support au foyer parfait du verre ardent, elle ne se fondra jamais, même étant exposée immediatement après ue pluïe, où ce verre fait le plus grand effet qu'il est capable de faire; mais quand on ôte cette houpe ou cet étain calciné, de dessus ce premier support, & qu'on l'expose sur un charbon au même verre ardent, il se fond dans le moment, & reparoît en une goute d'étain; cela arrive parceque l'huile du charbon qui lui sert de support, rentre dans cette chaux, à la place de la partie huileuse

que l'étain avoit perduë dans sa calcination sur un support destitué de toute matiere huileuse, comme sont les cailloux, les pots de grez, la porcelaine des Indes dont ont a ôté l'émail, les coupelles des raffineurs, le cristal de roche &c. Si on continuoit d'exposer cet étain calciné au verre ardent sur quelqu'un de ces derniers supports arides, il ne reprendroit jamais sa premiere forme de métal, à moins qu'on ne mît dessus un peu d'huile ou de graisse, qui y feroit le même effet que nous venons d'observer dans l'huile du charbon.

Cet exemple de la chaux d'étain joint à ceux que j'ai rapportez autrefois, suffira pour prouver que les huiles ou les graisses animales & vegetales rentrent aisement dans les matieres minerales & métalliques qui avoient perdu leurs soufres, & qu'elles sont rétablies par-là dans leur premier état naturel de mineral ou de métal. Pour appuyer davantage cette supposition, je crois qu'il ne sera pas inutile de rapporter quelques exemples qui prouvent, que l'on peut séparer aussi les parties huileuses des métaux, & les introduire dans les esprits très legerement acides des vegetaux & des sels fossiles, qui naturellement ont très peu ou point de matieres sulphureuses; par là ils deviennent non seulement inflammables au de là de la vivacité de l'esprit de vin rectifié, mais encore ils deviennent des huiles grasses & qui nagent sur l'eau, comme sont toutes les vraïes huiles des vegetaux.

En examinant les moindres métaux au verre ardent, j'ai reconnu que le fer est celui qui a le plus de matiere huileuse; car en ne faisant que l'y exposer, on voit d'abord une grande quantité d'huile noire & fort liquide nager par dessus, long-temps avant que la vraye matiere métallique & brillante du fer se mette en fonte, cette huile est absorbée avec une grande avidité par les métaux qui ont peu de matiere sulphureuse, comme est particulierement l'argent, qui en change de couleur & de consistence; au contraire le fer reste tout à fait privé de son huile, & en cet état il résiste à la plus grande chaleur

du verre ardent ſans ſe mettre en fonte, ce qui m'a fait juger que la matiere huileuſe qui ſe trouve naturellement dans le fer, pourroit bien être ce qui lui ſert de fondant, puiſque cette huile étant ſéparée de ſa ſubſtance, il ne ſe fond plus.

Pour ne pas manquer cette expérience, il faut obſerver que l'on doit fondre l'argent le premier, & ſur l'argent fondu il faut coucher un morceau de fer, ſans quitter le foyer du verre ardent, & l'on verra que ſur le morceau de fer il coulera une huile qui paroîtra noire au Soleil, ſans que le morceau de fer ſe fonde, qui paroîtra blanc ſous cette huile, & brillant comme du fer nouvellement limé; à meſure que cette huile touche l'argent fondu ſur quoi nage le morceau de fer, elle entre dans cet argent avec autant de viteſſe que l'eau entre dans le papier brouillard; & le fer qui a ainſi perdu ſon huile, devient caſſant, & ne ſe fond plus au verre ardent.

Ceci arrive lorſqu'on met un morceau de fer ſur l'argent fondu; mais ſi au contraire on met un morceau d'argent ſur du fer fondu, l'argent ſe fondra promptement, & les deux métaux ſe confondront, de maniere que l'on ne pourra pas reconnoître diſtinctement les parties du fer ou celles de l'argent dans le mélange que leur confuſion aura produit; & par conſéquent l'huile de fer reſtera toûjours mêlée avec ſon métal.

Cette obſervation m'a fait voir clairement, que la matiere huileuſe du fer non-ſeulement en peut être ſeparée, mais encore qu'on la peut introduire en un autre corps. J'ai fait pluſieurs tentatives pour retirer de l'argent cette huile de fer qu'il avoit abſorbé, mais inutilement; parceque pour tenir l'argent en fonte il faut un grand feu qui diſſipe cette huile; de ſorte que par la violence du feu je n'en ai ſçû rien tirer, & la ſeule liqueur qui diſſout l'argent, ſçavoir l'eſprit de nitre, eſt un acide très violent, qui d'ailleurs eſt déja ſuffiſamment chargé de ſon propre ſoufre, & il eſt plus propre à déchirer ou à détruire un mixte, qu'à en extraire ou à en conſerver la partie hui-

leuſe, j'ai donc abandonné l'argent abbreuvé de l'huile du fer ; & j'ai tâché d'introduire cette huile dans quelqu'autre métal plus aiſé à traiter, tant par un degré de feu fort doux, que par un diſſolvant tout à fait aqueux, ou trés legerement acide, & qui de lui-même ne contient preſque pas de matiere ſulphureuſe.

Parmi les eſſais que j'en ai fait, j'ai vû que le fer ſe mêle au verre ardent parfaitement bien avec l'étain, que ce mélange fume prodigieuſement, & que la fumée ſe condenſe en l'air en une eſpece de cotton, qui ſelon toutes les apparences eſt l'étain, d'ailleurs métal volatile, rendu encore plus volatile par l'huile du fer, parce que la fumée qui s'eleve de l'étain ſeul ou mêlé avec quelqu'autre métal que ce ſoit, exepté avec le fer, ne vient pas en ſi grande abondance, & ne ſe condenſe pas en une matiere cottoneuſe & maniable, mais ſe diſſipe tout à fait en vapeurs comme il arrive à toute autre ſorte de fumée. J'ai amaſſé un peu de ce cotton, il s'eſt diſſous ſans aucune ébullition dans du vinaigre diſtillé, & a donné une couleur rougeâtre à ſon diſſolvant. Il eſt trés difficile d'amaiſſer au Soleil une quantité ſuffiſante de cette matiere cottoneuſe pour en faire une opération ſenſible, tant parce qu'étant expoſé à l'air libre, le vent l'emporte & la diſſipe, que parce que nous avons trés peu de jours en l'année propres pour travailler au verre ardent. Voici comment j'en ai amaſſé une aſſez grande quantité pour ſuffire à une opération ſenſible.

J'ai fait ſeulement le mélange du fer & de l'étain au verre ardent de cette maniere : J'ai fait fondre ſur un charbon deux gros de pointes de clous de fer, j'ai mis ſur ce fer fondu autant peſant d'étain fin, qui dans le moment s'eſt fondu & confondu avec le fer ; auſſi-tôt que le mélange en a été fait, je l'ai retiré de deſſous le verre ardent, & j'y ai expoſé d'autre fer & d'autre étain, j'ai fait peu à peu de cette maniere environ une demie livre de ce mélange, que j'ai mis fondre dans un creuſet à la forge au feu de charbons, mon mélange s'eſt fondu, &

il a produit du cotton ſemblable à celui qu'il produit par la chaleur du verre ardent, dont une partie s'eſt attachée aux parois du creuſet, & en aſſez grande quantité, pour que j'aye pû le détacher avec une cuilliere de fer & le retirer du creuſet, j'en ai amaſſé environ une once, la matiere qui eſt reſtée au fond du creuſet, a peu à peu ceſſé de fumer, & s'eſt congelée en une matiere fort dure & caſſante, comme eſt ordinairement le fer qui vient d'être fondu.

J'ai verſé ſur ce cotton du vinaigre diſtillé, que j'ai laiſſé en infuſion froide pendant huit jours; le vinaigre a travaillé inſenſiblement ſur ce cotton, & eſt devenu d'une couleur rougeâtre tirant ſur l'orangé, & de fort clair & liquide qu'il étoit, il eſt devenu louche & m'a paru gras ſous les doigts, & avoir plus de conſiſtence qu'auparavant, j'ai vuidé par inclination la liqueur teinte de deſſus le cotton qui reſtoit non diſſous au fond du vaiſſeau, j'ai verſé du nouveau vinaigre diſtillé deſſus, & j'en ai ſéparé la teinture, ce que j'ai réïteré juſques à ce que toute la matiere cottoneuſe fût entierement diſſoute; il faut obſerver ici, que j'ai commencé à faire cette infuſion ou diſſolution ſur l'athanor, c'eſt-à-dire, en une chaleur d'abord moderée, qui n'a pas bien réuſſi, & puis en une plus forte juſques à la faire boüillir, & elle n'a pas mieux réuſſi, le diſſolvant eſt toûjours reſté clair, ſans s'épaiſſir & ſans changer de couleur, mais à froid elle s'eſt faite parfaitement bien; j'ai joint enſemble toutes ces diſſolutions, qui faiſoient environ deux pintes, je les ai diſtillées au bain de ſable dans une grande cornuë de verre à un feu fort doux, il en eſt ſorti une pinte & demie environ de flegme, ſans odeur & ſans goût, après quoi j'ai remarqué au haut & dans le col de la cornuë couler des gouttes épaiſſes comme de l'hüile; alors j'ai changé de recipient, & j'ai augmenté le feu, il m'en eſt venu une once environ d'une liqueur huileuſe, rougeâtre, d'un goût très piquant, & d'une odeur forte & aromatique: elle brûle à l'approche de la flâme avec beaucoup plus de vi-

vacité que l'esprit de vin ; & quand on la verse dans l'eau ; elle nage dessus comme fait une huile essentielle de quelque plante.

Cette opération m'a donné sujet de croire, que j'avois extrait l'huile métallique de cette matiere cottoneuse, & que c'étoit elle qui brûloit comme l'esprit de vin dans la liqueur distillée, & qui se condensoit en une veritable huile en la versant dans l'eau commune ; mais il m'est venu en même tems un scrupule, qui m'a fait douter de la verité de cette conjecture, car je me suis imaginé que ce pourroit bien être un reste de la partie vineuse ou huileuse du vinaigre, qui se seroit manifesté à la fin de la distillation ; & qu'ainsi j'aurois pris une huile vegetale du vin pour une huile métallique du fer & de l'étain. Pour m'en éclaircir, j'ai fait la même opération avec l'esprit de vitriol, qui a produit les mêmes effets que nous venons d'observer dans celle qui a été faite avec le vinaigre distillé.

Il faut observer ici, que l'esprit de vitriol que l'on veut employer à cette opération, doit être affoibli par l'eau commune au point qu'il ne fasse pas d'ébullition avec le cotton, autrement l'opération ne réussiroit pas. Elle m'a confirmé dans l'idée que j'avois euë à la premiere opération, c'est-à-dire, que cette esprit ardent, & son huile qui nage sur l'eau, sont une vraïe substance huileuse tirée du fer & de l'étain, & non pas du vinaigre distillé, dont j'ai eu soin de separer tout ce qu'il pourroit contenir d'esprit vineux, en le distillant à trés petit feu, & en jettant les premieres portions qui en sont venuës, & qui selon toutes les apparences ont emporté ce que le vinaigre pourroit avoir de plus spiritueux.

Nous avons une opération décrite dans nos Memoires de l'année 1710, page 107, rapportée par Monsieur Lemery le Pere, & qui a été faite dans une de nos Assemblées, où la limaille de fer simplement boüillie sur un petit feu dans un mélange de parties à peu prés égales d'esprit de vitriol & d'eau commune, exhale une vapeur qui

qui brûle comme l'esprit de vin quand on l'approche d'une bougie allumée. L'esprit de vitriol n'exhale certainement pas une vapeur inflammable; c'est donc le fer qui la produit, comme dans nôtre opération il a produit un esprit ardent & une vraye huile qui nage sur l'eau, & non pas le vinaigre distillé.

Cette extraction de la partie huileuse du fer & de l'étain, quoique ingenieuse & bonne, m'a paru neanmoins incommode à pratiquer tant à cause de la rareté des grands verres ardents, qu'à cause du petit nombre de jours que l'on a dans une année, où on le peut exposer au Soleil, ou le mettre utilement en œuvre; & comme dans les essais que j'ai faits au verre ardent sur la plûpart des matieres minerales connuës, j'ai vû que le Zink y produit pour le moins une aussi grande quantité de fumées blanches que nôtre mélange de fer & de l'étain, & que ces fumées s'y condensent de même en une matiere cottoneuse, j'ai crû qu'il pourroit bien produire les mêmes effets dans le feu de charbons; je l'y ai mis, & le cotton s'y est fait plus aisement encore, & en plus grande quantité que dans l'opération précedente de nôtre mêlange, j'ai employé ce cotton de la même maniere que celui qui avoit été produit par le fer & l'étain, pour en tirer l'huile & l'esprit inflammable, tant par le moyen du vinaigre distillé & des autres acides des plantes, que par le moyen de l'esprit de vitriol, qui ont également bien réüssi. De sorte que l'on doit être aussi convaincu du passage des matieres huileuses des métaux dans la substance des vegetaux, que du passage des huiles vegetales dans la substance des métaux, c'est à dire, qu'il doit être suffisamment prouvé, que les matieres sulphureuses changent indifféremment d'état, & qu'elles passent d'une espece de soufre en une autre espece, selon que les circonstances en fournissent les occasions.

L'opération que nous venons de voir sur le Zink, qui nous a produit avec autant & plus de facilité les mêmes effets que le fer & l'étain que nous avions mêlé au verre

ardent, ma fait penser que le Zink pourroit bien être un mélange naturel de ces deux métaux, dont la combinaison étant plus intimement faite par la nature que la nôtre ne peut l'être par l'art, & dans des proportions plus convenables pour la production de la matiere cottoneuse, nous en avons tiré plus aisément & en plus grande quantité que de nôtre mélange artificiel.

Les autres raisons qui m'ont confirmé dans cette opinion sont premierement que le Zink se tire d'une matiere minerale, qui est une vraïe terre ferrugineuse, de couleur de roüille de fer, qui donne les mêmes marques que le fer dans les infusions des noix de gales, & qui contient des parties qui sont attirées par la pierre d'aimant. En second lieu, que le Zink donne un certain cris quand on le plie, comme fait l'étain, ce qu'on n'observe en aucun autre métal, on le peut substituer aussi à la place de l'étain dans l'opération commune de l'*aurum musicum*, qui n'est autre chose que l'étain sublimé par le moyen du mercure, & coloré en couleur d'or par le simple degré de feu qui convient à cet opération, pendant que nul autre métal ne s'y sublime de même. Il paroît donc que les premieres raisons que nous venons d'alleguer, authorisent assés l'opinion que le Zink participe du fer, & par les deux dernieres il paroît qu'il contient aussi de l'étain, &qu'ainsi la matiere cottoneuse qu'il rend de même que nôtre mélange artificiel du fer & de l'étain, marque avec beaucoup de vraisemblance, qu'il est un mélange naturel de ces deux métaux.



OBSERVATIONS SUR LE BEZOARD,

& *sur les autres matieres qui en approchent.*

Par M. Geoffroy le Jeune.

17 May 1710.

PArmi les Drogues dont on se sert en Medecine, il y en a beaucoup d'un usage très-commun, & dont on ne sçait point encore bien l'origine. Elles passent quelquefois par tant de mains avant que de venir jusques à nous, qu'il est difficile d'être parfaitement instruit de leur nature, ou de leur composition.

Les Marchands qui en font le commerce n'en connoissent souvent que le nom, & ne se mettent en peine que du débit. Les Voyageurs ne sont pas toûjours au fait de ces connoissances; de sorte qu'ils se laissent souvent tromper par de faux récits, ou qu'ils ne vont pas eux-mêmes à la source. Ainsi sur ces sortes de matieres un bon examen vaut quelquefois mieux que bien des relations. Ce n'est pas qu'il ne faille les consulter, mais il ne faut pas toûjours les croire. Voilà ce qui m'a porté à éxaminer soigneusement les matieres qui portent le nom de Bezoard, nom que l'on donne ordinairement à certaines pierres qui se trouvent dans le corps de quelques animaux. Les uns prétendent que ce nom dérive du mot Persan *Pazar* ou *Pazan*, qui veut dire *Bouc*: & il vient selon quelques autres du mot Hebreu ou Caldéen, *Beluzaar*, qui signifie *Contrevenin.*

Les premieres Pierres connuës sous le nom de Bezoard, ont été apportées d'Orient. Depuis la découverte de l'Amerique il en est venu qui étant à peu près semblables aux premieres pour la structure & pour les vertus, ont aussi porté le même nom, avec cette difference qu'on

appelle Bezoard Oriental celui qui nous vient du Levant, & Bezoard Occidental celui qu'on nous envoye d'Amerique. Il y a encore d'autres ſubſtances pierreuſes tirées des animaux & diſpoſées par couche qui ont été nommées Bezoard, en leur conſervant le nom de l'animal dont on les tiroit. Tels ſont les Pierres que l'on n'omme Bezoard de Singe, & Bezoard de Cayman. Quelques-uns prenant le mot de Bezoard dans la ſignification de Contrevenin, l'ont appliqué indifferemment à toutes les matieres qui pouvoient avoir cette vertu; c'eſt de-là que ce nom a été donné à des compoſitions de Chimie, qui ſont le Bezoard mineral & le Bezoard jovial. D'autres ont nommé Bezoard animal la poudre de cœur & de foye de viperes. On a auſſi donné le nom de Bezoard, ou de Bezoardique, à certaines poudres ou pierres artificielles dans leſquelles on fait entrer du Bezoard. Telles ſont les differentes poudres Bezoardiques, la poudre de la Comteſſe du Kant, les Pierres formées de cette poudre, & la Pierre de Goa.

Sur ce que l'on a obſervé que le Bezoard étoit diſpoſé par couches, on en a donné le nom à une eſpece de pierre figurée de la même maniere, que l'on trouve en Amerique en differens endroits de la terre, & à qui on attribuë auſſi les mêmes vertus. Il ſe trouve de ces Bezoards en Italie, en Sicile, & même en France en differens endroits, & ſur tout en Languedoc.

Voilà en general les differentes matieres que nous connoiſſons ſous le nom de Bezoard. Mais à proprement parler, le Bezoard eſt une ſubſtance pierreuſe tirée de quelque animal, compoſée de pluſieurs couches ou envelopes comme les oignons, & qui a quelque vertu pour réſiſter au venin. Les deux principales eſpeces ſont, comme nous avons dit, l'Oriental & l'Occidental. Nous ne démêlons pas bien qui ſont les animaux qui les produiſent, parce que l'on peut avoir dit de tous les deux ce qui ne convient qu'à un ſeul. Nous ſçavons en general, que cette pierre ſe trouve dans l'eſtomach d'une eſ-

pece de Chévre sauvage qui broute des plantes aromatiques. S'il en faut croire Tavernier, il s'en trouve plusieurs dans le même animal, ce qu'on peut connoître au toucher. Ces pierres sont de figure & de grosseur differentes. Il y en a qui ont la forme d'un rein ou d'une faseole; d'autres sont rondes ou oblongues ou de figure irreguliere. Chaque pierre est composée de plusieurs lames, & formée d'une matiere verdâtre ou olivâtre tachetée de blanc dans leur épaisseur. Ces lames sont attachées les unes aux autres, ensorte qu'en les rompant on observe diverses couches de matieres de differente épaisseur & quelquefois de differente couleur. Il se trouve même en cassant ces pierres, des lames qui s'éclattent & se séparent fort uniment les unes des autres. La même chose arrive lorsqu'on les chauffe un peu vivement. Ce qui occupe le milieu ou le centre de cette pierre, est pour l'ordinaire une masse dure, graveleuse & assez unie. Les couches Bezoardiques qui couvrent cette masse, s'écrasent sous la dent assez facilement, & s'y attachent comme une matiere legerement glutineuse qui teint un peu la salive.

J'en ai brûlé, elles s'enflamment aisément & paroissent contenir du sel volatil & de l'huile. La matiere restante ressemble au *Caput mortuum* qui reste dans la Cornuë après la distillation des matieres animales. Ces Pierres sont fort polies exterieurement, mais quelquefois un peu rudes & en façon de chagrin dans certains contours. Elles sont assez tendres & teignent en couleur jaune, verdâtre, ou olivâtre le papier frotté de craye, de ceruse ou de chaux, quand on les passe dessus un peu rudement, parce qu'elles s'usent & laissent de leurs parties sur la craye, la ceruse, ou la chaux. J'ai fait tremper à froid deux de ces pierres, l'une dans l'eau & l'autre dans l'esprit de vin pendant 12 heures sans qu'elles ayent paru alterées. J'ai laissé dans l'eau pendant quelques jours la même pierre, il ne s'en est détaché que très peu de chose, ce qui n'a fait que troubler l'eau legerement, cependant l'eau & l'esprit de vin les avoient penetré toutes deux.

Dans le grand nombre de Pierres de Bezoard que j'ai ouvertes, j'ai trouvé qu'il y en avoit beaucoup, comme le rapportent quelques Auteurs, qui avoient dans leur milieu des pailles, du poil, des marcaſſites, des cailloux, des matieres graveleuſes unies enſemble & auſſi dures que la pierre. J'y ai auſſi trouvé du talque, du bois, des noyaux preſque ſemblables à ceux des ceriſes, des noyaux de myrabolans, des quartiers de quelques autres noyaux; & enfin des eſpeces de noyaux de caſſe & des faſeoles renfermées dans une tunique ou membrane exterieure durcie par la matiere qui a formé le Bezoard, & dont la membrane propre ſe trouve retirée & ſéchée après avoir été gonflée. Dans d'autres Pierres la premiere enveloppe de la faſeole étant conſumée, les pierres en leur entier ſonnoient comme des pierres d'aigle. J'ai eſſayé de piquer ces pierres avec une aiguille rougie au feu pour voir ſi elles étoient contrefaites, cette aiguille n'y a pû entrer & a ſeulement bruni l'endroit où elle a été appliquée, ce que les Auteurs propoſent comme une des principales marques à quoi l'on peut connoître le bon Bezoard, croyant au contraire, qu'on doit rejetter ceux où l'on trouve de ces faſeoles qu'ils regardent comme une preuve qu'ils ont été falſifiez par les gens du païs.

Ils veulent donc qu'on choiſiſſe le Bezoard en pierres de moyenne groſſeur d'une couleur brune jauniſſant la chaux vive, verdiſſant la craye, ne ſe diſſolvant point dans l'eau; & lorſqu'on le perce d'un fer rouge qu'il ne s'éleve point de bulles autour qui faſſent connoître qu'il eſt mêlé de quelques réſines. Il faut encore que les lames en ſoient fines, diſpoſées par couches, & que ces pierres ayent été tirées des animaux qui vivent ſur les montagnes tels que ſont ceux de Perſe. Après tout il me paroît aſſez difficile de contrefaire le Bezoard, & pour peu qu'on en ait employé, on s'appercevra à la ſimple vûë, de la fourberie s'il y en a, auſſi bien qu'aux marques que je viens de rapporter. Car s'il étoit contrefait avec du plâtre, ou avec quelque matiere ſemblable, il ne changeroit

ni au feu ni à l'eau ; il pourroit colorer la chaux de la teinture qu'on lui auroit donnée, en un mot soûtenir toutes les epreuves quoiqu'il fut contrefait.

Il n'est pas à croire non plus qu'on eût été chercher pour le contrefaire toutes ces differentes matieres, qui servent comme de bâse aux couches dont il est composé, puisque sans tant de façon on n'auroit qu'à le commencer sur une petite boule de la même pâte qui n'est apparemment pas assez rare pour l'épargner.

Je crois que les matieres renfermées dans le Bezoard servent précisément à nous indiquer la maniere dont il se produit, comme l'observe Tavernier, qui dit que ces pierres se forment autour des petits boutons, ou autour des sommitez des petites branches d'une plante. Ces boutons de Tavernier peuvent être les faseoles dont parle Monard, & que j'ai observez. Ces corps solides & indigestes restez dans l'estomach de l'animal, peuvent en irriter les glandes, dont la lympe épaissie avec le levain de l'estomach encore chargé du suc des plantes aromatiques qu'il vient de brouter, aura pû former ces couches polies, unies & exactement liées que l'art auroit bien de la peine à imiter. Je vois même que quelque corps que ce soit qui fasse le centre de cette pierre, les couches en sont finies & si bien contournées, qu'exterieurement la pierre a la figure de la matiere qui est renfermée au dedans.

Si par exemple il s'y rencontre une paille, la pierre sera longue; si c'est un caillou, elle en gardera la figure ; si c'est une faseole, on y remarquera exterieurement la radicule & une raye qui sépare fort distinctement les deux lobes de la faseole; enfin on peut connoître à la forme & à la pesanteur ce qu'elles peuvent contenir. Ainsi comme dans le choix d'une matiere aussi précieuse que le Bezoard, on n'a pas la liberté de tout ouvrir, après s'être assuré d'un certain nombre des plus douteuses sur lesquelles on aura essayé les expériences précedentes, il faudra s'en rapporter à la vûë & au toucher. A la vûë, on examine

d'abord la couleur qui ne doit être ni trop pâle ni trop foncée ; en second lieu, la finesse du grain, le poli & un tissu serré, en sorte que les lames ne se levent point trop aisément les unes de dessus les autres. Il faut encore observer qu'elles ayent une figure reguliere commes celle d'un rein, d'un œuf d'oiseau ou quelque autre approchante. Le toucher peut aussi faire juger de la matiere qui est renfermée intérieurement dans le Bezoard, ce que sa pesanteur ou sa legereté nous détermineront fort bien. Si par exemple la pierre est pesante, la base en sera un caillou, ou quelque autre sorte de matiere qui en occupera la plus grande partie : si au contraire la pierre est legere, elle sera creuse interieurement, ou ne renfermera que quelque matiere legere comme du poil, ou de ces substances vegetales dont j'ai parlé. Les pierres qui donneront quelque son, marqueront un fruit qui s'étant desséché occupe moins de volume, quelquefois même il s'est pourri ou brisé en une poussiere que quelques Auteurs estiment fort.

J'ai encore observé que lorsque les Bezoards sont formez en maniere de reins, acompagnez de legeretez, & qu'ils sonnent, c'est ordinairement une faseole qui en occupe le milieu. Il s'en est trouvé d'autres, qui étoient legers, de figure ronde, un peu applatis. Ces pierres contenoient un fruit rond & plat, à peu près de la figure d'un noyau de casse. Au reste quand même ces pierres renfermeroient un noyau ligneux, comme il s'en est trouvé, ou même des morceaux de bois, la legereté doit toûjours les faire preferer à ceux qui renferment des cailloux, & qui seront beaucoup plus pesans, pourvû cependant que les matieres Bezoardiques soûtiennent les autres épreuves.

Pour l'usage ordinaire qu'on en fait en Medecine, toute la préparation que l'on donne au Bezoard, c'est de le réduire en poudre fine, soit que ce soit pour le prendre en substance, ou pour le faire entrer dans quelques compositions, observant seulement de ne pulveriser que ce qu'il

y a

y a de Bezoardique & de séparer toutes les matieres étrangeres qui se pourront trouver dans le cœur du Bezoard, sur tout lorsqu'il s'y rencontre des cailloux ou d'autres substances qui n'ont aucune vertu du Bezoard.

Les sentimens me paroissent fort partagez sur l'animal qui porte le Bezoard oriental, & sur celui qui porte le Bezoard occidental. Il paroît que l'oriental qui nous est apporté d'Egypte, de la Perse, des Indes & de la Chine, est produit par une espece de Bouc que les Persans nomment *Pazan*, ou par une Chévre sauvage plus grande que l'ordinaire, agile comme le Cerf, & qui a des cornes renversées sur le dos, d'où Clusius la nomme *Capricerva.*

Celui qui est apporté d'Amerique est produit par une espece de Chévre qui n'est point ou qui n'est que très-peu differente de l'autre à l'exception des Cornes.

Les differens sentimens des Auteurs sur le nom & sur la figure de cet animal me font croire, qu'il peut y avoir plusieurs especes d'animaux, dans lesquels on trouve de ces pierres, & que chacun aura décrit celui qu'il aura vû. Cette même raison peut servir à prouver la cause des differentes couleurs du Bezoard.

Le Bezoard occidental est facile à distinguer à sa couleur plus pâle. Il est quelquefois gris-blanc, engendré sur des matieres étrangeres comme le Bezoard oriental. Les lames en sont quelquefois plus épaisses & striées dans leur épaisseur.

Les Bezoards fossiles sont dese spéces de Pierres formées par couches ayant la figure du Bezoard animal. Ils ont ordinairement une couleur grise blanchâtre, les couches en sont assez minces, ils n'ont point d'odeur & s'employent dans les mêmes maladies où on employe les autres Bezoards. L'Amerique, comme je l'ai déja dit, nous fournit beaucoup de ces Bezoards, aussi-bien que l'Italie & plusieurs endroits de France.

Ceux qui ont traité du Bezoard, comme entre autres Gaspard Bohin, ont compris sous ce nom bien des matieres qui n'y ont nul rapport, ce qui ne peut apporter

que de la confusion dans l'histoire naturelle. Si l'on vouloit donc ranger dans un ordre convenable tout ce qui peut participer au nom de Bezoard, je crois qu'il seroit à propos d'en faire cinq classes.

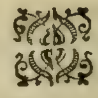
La premiere contiendroit les veritables Bezoards qui sont l'oriental & l'occidental.

On mettroit dans la seconde toutes les pierres tirées des animaux qui approchent du Bezoard par leur structure & par leur vertu comme sont le Bezoard de Singe, celui de Cayman, & même les differentes sortes de Perles & les yeux d'écrevisses.

Dans la 3e, les differentes sortes de Bezoards fossiles.

Dans la 4e classe les matieres figurées comme le Bezoard sans en avoir les vertus; sçavoir la Pierre humaine, tirée de la vessie, celle des reins, celle de la vessicule du fiel, avec celles qui se trouvent dans la vessicule du fiel des bœufs & des autres animaux.

Dans la 5e & derniere les Egagropiles qui sont des espéces de boules de differentes figures assez legeres formées par un amas de poils & de fibres des plantes que les animaux n'ont pû digerer. Ces fibres & ces poils s'ourdissent de maniere qu'ils ne forment plus qu'un corps qui ressemble à une boule de feutre. Il s'en trouve qui sont recouvertes d'une croute Bezoardique fort mince. Elles naissent ordinairement dans le premier ventricule de tous les animaux qui ruminent, ou dans l'estomach de ceux qui ne ruminent point. Tels sont la Pierre de porc-épy sauvage & les autres boules de poil trouvées dans les chévres dans les bœufs, dans les vaches, & dans d'autres animaux.



DES MOUVEMENS

Primitivement variés dans des milieux résistans en raison des sommes faites des vitesses effectives de ces mouvemens, & des quarrés de ces mêmes vitesses.

PAR M. VARIGNON.

1710. 4. Juin.

DAns les Mem. de 1707. 1708. & 1709. après avoir appellé *primitifs* les mouvemens tels qu'ils se feroient dans le vuide ou dans un espace sans résistance ni action, j'ai examiné ce qui arriveroit aux mouvemens primitivement uniformes & aux primitivement variés, tant dans des milieux qui leur résisteroient en raison de leurs vitesses effectives, que dans ceux qui leur résisteroient en raison des quarrés de ces mêmes vitesses. J'ai aussi fait voir dans le Prob. 4. p. 417. des Mem. de 1707. ce qui arriveroit aux mouvemens primitivement uniformes dans des milieux qui leur résisteroient en raison des sommes faites de ces vitesses & de leurs quarrés : hypothêse la plus vrai-semblable des trois, employée par M. Newton dans ses principes Math. Liv. 2. sect. 3. Voici presentement ce qui arriveroit aux mouvemens primitivement variés dans cette même hypothêse : je commence par les primitivement accelerés en raison des tems écoulés, ainsi qu'on le pense d'ordinaire des chutes avec Galilée ; & pour abreger sans renvoyer aux Lem. 1. 2. & à la Remarque 1. des pag. 194. 196. 209. des Mem. de 1709. dont ceci dépend, en voici le sommaire dans le Lemme suivant.

LEMME.

FIG. I. II. III.

I. Dans les fig. 1. 2. 3. des quatre Courbes *ARC*, *HUC*, *KEC*, *FVC*, dans lesquelles figures tous les angles rectilignes sont droits, & où $TU = RV = TV - TR$; on pren-

dra encore ici $AT = t$, pour les tems écoulés depuis le commencement du mouvement; $TV = v$, pour les vitesses primitives du mobile, telles qu'il les auroit euës à la fin de ces tems dans un milieu sans résistance ni action; $TR = r$, pour tout ce que le milieu supposé leur fait de résistance pendant ces tems; dr, pour ce qu'il leur en fait à chaque instant dt; $TU = u$, pour les vitesses actuelles, ou restantes de ces primitives à la fin de ces tems malgré ces résistances; $TE = z$, proportionelles aux résistances instantanées dr; $AF = b$ constante, pour la vitesse initiale quelconque (comme de projection) par où commence le mouvement dans les fig. 2. 3. Et a, pour une autre grandeur aussi constante quelconque. Cela supposé,

II. Le Lem. 1. pag. 194. 195. des Mem. de 1709. donne $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{dv - du}{z}$ pour Regle générale des résistances des milieux.

III. Le Lem. 2. pag. 196. des mêmes Mem. de 1709. donne les aires $ATUH = ARVF = \int udt$ proportionelles aux espaces ou longueurs parcouruës en vertu des vitesses restantes TU (u) pendant les tems AT (t) malgré les résistances supposées; & les $ATVF = \int vdt$ proportionelles aux espaces parcourus pendant ces mêmes tems en vertu des vitesses primitives TV (v).

IV. Suivant la Remarque 1. pag. 209. des Mem. de 1709. ou pag. 126. des Mem. de 1708. la pesanteur constante du mobile, ce que le milieu lui fait de résistance à chaque instant de sa chute, & l'excés ou la difference de force, dont cette pesanteur surpasse cette résistance instantanée, sont entr'eux comme les grandeurs dv, dr, du, qui leur répondent.

PROBLÊME.

FIG. IV. *Trouver les Courbes* ARC *des résistances totales ou des vitesses perduës*, HUC *des vitesses restantes, &c. dans l'hypothése 1°, des résistances instantanées en raison des sommes faites des vitesses restantes ou actuelles du mobile, & des quarrés*

de ces mêmes viteſſes ; 2°, des viteſſes accelerées primitives en raiſon des tems écoulés depuis le commencement du mouvement ; ainſi que dans l'hypothêſe de Galilée touchant les chutes rectilignes des corps qui en vertu de leur ſeule peſanteur conſtante tomberoient dans un milieu ſans réſiſtance ni action, tel qu'on ſuppoſe d'ordinaire le vuide.

SOLUTION.

Suivant le Lem. art. 1. la premiere de ces deux hypothêſes-ci, qui eſt $z = u + \frac{uu}{a} = \frac{au+uu}{a}$, donnera $TE = z = \frac{au+uu}{a} = \frac{AB \times TU + TU \times TU}{AB} = \frac{AB \times RV + RV \times RV}{AB} = \frac{AB \times \overline{TV - TR} + \overline{TV-TR}^2}{AB} = \frac{a \times \overline{v-r} + \overline{v-r}^2}{a}$ en ſuppoſant $AB = a$ conſtante ; & la 2e donnera $v = TV = AT = t$ en y prenant $TV = AT$; d'où réſulte $t - r = v - r = u$, & $dv = dt$. Donc en ſubſtituant ces valeurs de z, v, dv, dans les 2. formules générales $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z}$, $\frac{dt}{a} = \frac{dv - du}{z}$ de l'art. 2. du Lemme, la premiere de ces deux équations ſe changera ici en $\frac{dt}{aa} = \frac{dr}{a \times \overline{t-r} + \overline{t-r}^2} = \frac{dr}{at - ar + tt - 2tr + rr}$ pour la Courbe *ARC* des réſiſtances totales ; & la ſeconde en $\frac{dt}{aa} = \frac{dt - du}{au + uu}$ pour la Courbe *HUC* des viteſſes reſtantes. Quant à *FVC* ſon équation ſuppoſée $t = v$, la fait dégenerer ici en une ligne droite inclinée en *A* de 45. deg. ſur *AT*.

Pour conſtruire les deux Courbes *HUC*, *ARC*, il faut conſiderer que la derniere équation $\frac{dt}{aa} = \frac{dt - du}{au + uu}$ de la Courbe *HUC*, donnant $audt + uudt = aadt - aadu$, ou $aadu = aadt - audt - uudt$, donne auſſi $dt = \frac{aadu}{aa - au - uu}$ pour l'équation de cette Courbe.

Soit préſentement $\frac{5a^3y}{\overline{a+y}^2} = aa - au - uu$: l'on aura $uu + au + \frac{1}{4}aa = \frac{5}{4}aa - \frac{5a^3y}{\overline{a+y}^2} = \frac{5}{4}aa - \frac{5}{4} \times \frac{4a^3y}{\overline{a+y}^2} = \frac{5}{4} \times \frac{a^4 + 2a^3y + aayy - 4a^3y}{\overline{a+y}^2} = \frac{5}{4} \times \frac{a^4 - 2a^3y + aayy}{\overline{a+y}^2}$, dont la racine

quarrée eſt $u + \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{aa - ay}{a + y}$; ce qui donne $u = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{aa - ay}{a + y} - \frac{1}{2}a$, & $du = \frac{\overline{-a-y} \times ady - \overline{aa+ay} \times dy}{\overline{a+y}^2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{-2aady}{\overline{a+y}^2} \times \frac{\sqrt{5}}{2}$ $= - \frac{aady}{\overline{a+y}^2} \times \sqrt{5}$. Donc $\frac{aadu}{aa - au - uu}$ $(dt) = - \frac{a^4 dy \times \sqrt{5}}{5a^3 y} = - \frac{a}{\sqrt{5}} \times \frac{dy}{y}$, c'eſt-à-dire, $dt = - \frac{a}{\sqrt{5}} \times \frac{dy}{y}$, qui eſt une équation à une logarithmique LGC d'une ſoûtangente $= \frac{a}{\sqrt{5}}$ ſur l'aſymptote AT dont elle doit s'approcher à l'infini du côté de C, l'équation précedente $u = \frac{aa - ay}{a + y} \times \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}a$ faiſant voir que les ordonnées y (GT) de cette logarithmique doivent diminuer à meſure que celles u (TU) de la Courbe HUC croiſſent. Cette équation donnant $\overline{a + 2u} \times \overline{a + y} = aa\sqrt{5} - ay\sqrt{5}$, ou $ay + 2uy + ay\sqrt{5} = aa\sqrt{5} - aa - 2au$, d'où réſulte $y = \frac{aa\sqrt{5} - aa - 2au}{a\sqrt{5} + a + 2u}$, fait voir auſſi que u $(TU) = 0$ en A, doit faire paſſer la Courbe HUC par ce point-là, & y rendre $y = \frac{aa\sqrt{5} - aa}{a\sqrt{5} + a} = a \times \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1}$: c'eſt-à-dire qu'en A l'ordonnée AL (y) de la logarithmique LGC, doit être $= a \times \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} = a \times \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ſur AB perpendiculaire à ſon aſymptote ATC.

Il ſuit encore de la précédente équation $u = \frac{aa - ay}{a + y} \times \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}a$, que ſi l'on prend par tout TU $(u) = \frac{aa - ay}{a + y} \times \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}a = \frac{AB - GT}{AB + GT} \times \frac{AB\sqrt{5}}{2} - \frac{AB}{2}$, en prenant $AB = a$; la ligne qui paſſera par tous les points U ainſi trouvés, ſera la Courbe cherchée HUC des viteſſes reſtantes, exprimée par l'équation $dt = \frac{aadu}{aa - au - uu}$. *Ce qu'il falloit premierement trouver.*

Cette Courbe HUC ou AVC étant ainſi conſtruite, il n'y a plus qu'à prendre par tout $UR = TV = AT$; & la ligne ARC, qui paſſera par tous les points R ainſi trouvés, ſera (*Lem. art.* 1.) la Courbe des réſiſtances totales ou des viteſſes perduës, exprimée par l'équation $dt = \frac{aadr}{at - ar + tt - 2tr + rr}$. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

COROLLAIRE I.

Puiſque ſuivant l'équation $u = \frac{aa - ay}{a+y} \times \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} a$ trouvée dans la Solution précedente, les ordonnées u (TU), y (TG), des Courbes AUC, LGC, croiſſent alternativement, il eſt manifeſte que TU (u) n'eſt jamais plus grande que lorſque TG (y) $= 0$. Or en ce cas l'équation précedente donne u $(TU) = \frac{a\sqrt{5} - a}{2} = a \times \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Donc pour lors $TU = AB \times \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \left(\frac{a\sqrt{5} - a}{2}\right)$. Par conſéquent ſi l'on prend $AD = AB \times \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ ſur AB, c'eſt-à-dire, moindre que AB (a), & plus grande que AL $\left(a \times \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$, la droite DC parallele à AT, ſera une aſymptote de la Courbe AUC des viteſſes reſtantes (u). D'où l'on voit que ces viteſſes effectives augmentent ici à l'infini ſans jamais devenir plus grandes que la finie AD $\left(AB \times \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$, laquelle par conſéquent en exprimera la plus grande de toutes, appellée *viteſſe terminale*, en ce qu'elle n'arrive qu'après un tems infini, & qu'alors elle eſt ainſi le terme de toutes les autres.

COROLLAIRE II.

Il ſuit auſſi de l'équation $dt = \frac{aadu}{aa - au - uu}$ de la Courbe HUC, que le commencement A du tems AT (t) réduit à $dt = \frac{aadu}{aa} = du$, en y rendant TU (u) $= 0$, ainſi qu'on l'a vû dans la Solution: il ſuit, dis-je, non-ſeulement que cette Courbe des viteſſes reſtantes (u) paſſera par A; mais encore qu'elle y fera un angle de 45. deg. avec ſon axe ATC.

COROLLAIRE III.

On voit de même que ce point A rendant pareillement AT (t) $= 0 = TR$ (r), & conſéquemment $t - r = 0$: non-ſeulement la Courbe ARC des réſiſtances totales (r) paſſera par A; mais encore ſon équation

$dt = \frac{aadr}{at - ar + tt - 2tr + rr}$ trouvée dans la Solution, se réduisant à $dt = \frac{aadr}{o}$ en ce point A, cette Courbe sera touchée en ce même point A par la droite ATC.

COROLLAIRE IV.

Quant aux espaces parcourus pendant le tems $AT(t)$, on voit (*Lem. art.* 3.) qu'ils doivent être ici entr'eux comme les aires correspondantes $\int udt$ (ATU). Mais la solution précedente donnant $u = \frac{a-y}{a+y} \times \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}a$, & $dt = -\frac{a}{\sqrt{5}} \times \frac{dy}{y}$, l'on aura ici $udt = \frac{-ady + ydy}{ay + yy} \times \frac{aa}{2} + \frac{dy}{y} \times \frac{aa}{2\sqrt{5}}$ (à cause de $\frac{-ady + ydy}{ay + yy} = -\frac{dy}{y} + \frac{2dy}{a+y}$) $= aa \times \frac{dy}{a+y} + \frac{aa - aa\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times \frac{dy}{y}$, dont l'intégrale est $\int udt$ (ATU) $= aa \times \overline{la+y} + \frac{aa - aa\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times ly + q = aa \times \overline{lAB + GT} + \frac{aa - aa\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times lGT + q$. Mais le cas de $ATU = o$, qui (rendant aussi $TU = o$) rend $GT = AL$, réduit cette intégrale à $o = aa \times \overline{lAB + AL} + \frac{aa - aa\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times lAL + q$, d'où résulte $q = -aa \times \overline{lAB + AL} + \frac{aa\sqrt{5} - aa}{2\sqrt{5}} \times lAL$. Donc cette intégrale complette est $ATU = aa \times \overline{lAB + GT} + \frac{aa - aa\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times lGT - aa \times \overline{lAB + AL} + \frac{aa\sqrt{5} - aa}{2\sqrt{5}} \times lAL$.

Or si après avoir pris $B\lambda = AL$ sur AB prolongée vers λ, ou prend par tout de ce côté-là $B\Upsilon = GT$ depuis l'origine B; qu'ensuite on fasse λM, ΥP, BS, parallele à TA, & que des points M, P, S, où elles rencontrent la logarithmique CGL prolongée aussi du côté de M, ou lui fasse les ordonnées MN, PQ, SZ, perpendiculaires en N, Q, Z, sur TA prolongée de ce côté-là : Si de plus on prend AL pour l'unité, l'on aura $lGT = -AT$ $lAL = o$, $\overline{lAB + AL} = lA\lambda = lMN = AN$, & $\overline{lAB + GT} = lA\Upsilon = lPQ = AQ$, outre (*Cor.* 1.) $\frac{a\sqrt{5} - a}{2} = AD$. Donc l'intégrale précedente sera aussi pour lors $ATU = aa \times AQ + \frac{a}{\sqrt{5}} \times AD$

$\times AD \times AT - aa \times AN = \frac{a}{\sqrt{5}} \times AD \times AT - aa \times NQ =$
$= \frac{AB \times AD \times AT}{\sqrt{5}} - AB \times AB \times NQ$: dans laquelle valeur NQ aura ſon origine en N, qui répond à la plus grande $GT = AL = B\lambda$ lorſque $AT = 0$; & ſon terme Z, qui répond à la plus petite $BY = GT = 0$, lorſque AT eſt infinie.

Donc enfin (*Lem. art.* 3.) les eſpaces parcourus pendant les tems AT (t), ſeront ici entr'eux comme les grandeurs $\frac{AB \times AD \times AT}{\sqrt{5}} - AB \times AB \times NQ$ correſpondantes, ou (à cauſe de AB conſtante) comme les correſpondantes $AD \times AT - AB \times NQ \times \sqrt{5}$.

COROLLAIRE V.

Puiſque (*ſolut.*) les viteſſes reſtantes (u) ſont par tout ici aux primitives (v) qu'auroit eu le mobile en pareil tems AT (t) dans un milieu ſans réſiſtance en vertu de ſa peſanteur (*hyp.*) conſtante : : TU. TV. chaque eſpace ici parcouru en vertu de cette peſanteur malgré les réſiſtances ici ſuppoſées, ſera (*Lem. art.* 3.) à ce qu'elle en feroit parcourir au mobile pendant un pareil tems AT dans un milieu ſans réſiſtance : : ATU. ATV (*Corol.* 4.) : : $\frac{AB \times AD \times AT}{\sqrt{5}} - AB \times AB \times NQ$. ATV. Mais les viteſſes TV que la peſanteur du mobile lui donneroit en tombant dans un milieu ſans réſiſtance, étant comme les tems AT qui ſeroient employés à les acquerir ; ſi l'on ſuppoſe $TV = AT$, comme l'on a fait juſqu'ici, l'on aura $ATV = \frac{1}{2} \times AT \times AT$. Donc les eſpaces ici parcourus malgré les réſiſtances ſuppoſées pendant un tems quelconque AT, doivent étre par tout à ce que le mobile en auroit parcouru pendant un pareil tems : : $\frac{AB \times AD \times AT}{\sqrt{5}} - AB \times AB \times NQ$. $\frac{1}{2} \times AT \times AT$. Dans le premier deſquels termes, AT eſt un Logarithme, & conſéquemment un nombre, de même que NQ qui eſt la difference de deux Logarithmes ; au lieu que dans le dernier terme, AT eſt une grandeur géometrique, de même que AD, AB, dans le premier, ce qui fait que ces deux termes ſont homogenes nonobſtant la varieté des dimenſions qui y paroît à l'œil.

COROLLAIRE VI.

Les espaces parcourus pendant les tems AT (t) en vertu des vitesses TU (u) restantes des accelerées primitives TV (v) malgré les résistances supposées, se trouveront encore autrement que dans le Corol. 4. en continuant à l'infini la division de $\frac{aadu}{aa-au-uu}$ (*solut.*) $= udt$. Car cette division donnant $\frac{aadu}{aa-au-uu}$ (udt) $= udu + \frac{uudu}{a} + \frac{2u^3du}{aa} + \frac{3u^4du}{a^3} + \frac{5u^5du}{a^4} + \frac{8u^6du}{a^5} + \frac{13u^7du}{a^6} + \frac{21u^8du}{a^7} +$ &c. Dont l'intégrale est $\int udt$ (ATU) $= \frac{uu}{2} + \frac{u^3}{3a} + \frac{2u^4}{4aa} + \frac{3u^5}{5a^3} + \frac{5u^6}{6a^4} + \frac{8u^7}{7a^5} + \frac{13u^8}{8a^6} + \frac{21u^9}{9a^7} +$ &c. Dans laquelle suite chacun des coëfficiens superieurs est la somme des deux immédiatement précedens; les inférieurs sont les exposans des puissances de u, lesquelles sont en progression géometrique, aussi-bien que les puissances de a, qui les divisent, & qui sont par tout moindres qu'elles de deux degrés. Donc (*Lem. art.* 3.) les espaces ici parcourus pendant les tems AT (t), seront aussi entr'eux comme ces suites correspondantes. De sorte que AT infini devant rendre (*Corol.* 1.) $u = \frac{a\sqrt{5}-a}{2}$ finie & positive, & conséquemment la suite précedente d'une valeur infinie; l'espace ici parcouru pendant ce tems infini, devroit pareillement être infini, ainsi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 4.

AUTRE SOLUTION.

I. Soit présentement $\frac{5}{4} \times \frac{a^4}{xx} = aa - au - uu$. L'on aura $uu + au + \frac{1}{4}aa = \frac{5}{4}aa - \frac{5}{4} \times \frac{a^4}{xx} = \frac{5}{4} \times \frac{aaxx - a^4}{xx}$; & (en tirant la racine quarrée de part & d'autre) $u + \frac{1}{2}a = \frac{a\sqrt{5}}{2x} \times \sqrt{xx-aa}$, ou $u = \frac{a\sqrt{5}}{2x} \times \sqrt{xx-aa} - \frac{1}{2}a$; d'où résulte

$$du = \frac{a\sqrt{5}}{2} \times \frac{-dx\sqrt{xx-aa} + \frac{xxdx}{\sqrt{xx-aa}}}{xx} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \times \frac{-xx+aa+xx}{xx\sqrt{xx-aa}}.$$

$\times dx = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{a^3 dx}{xx\sqrt{xx-aa}}$. Donc $\frac{aadu}{aa-au-uu}$ $(dt) = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{a^5 dx}{xx\sqrt{xx-aa}}$ $\times \frac{4}{5} \times \frac{xx}{a^4} = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times \frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$, c'eſt-à-dire, $dt = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times \frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$; & conſéquemment (en intégrant) $t = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times \int \frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$.

II. Cette intégrale ſe trouvera par le moyen d'une hyperbole équilatere BAO ſur l'axe DC, dont le centre ſoit D, le demi-axe tranſverſe $BD = a$, & les abſciſſes $DQ = x$; ce qui donnant les ordonnées $QP = \sqrt{xx-aa}$, l'on aura le triangle rectangle $DQP = \frac{x}{2}\sqrt{xx-aa}$, dont la difference (en ſuppoſant les droites DP, Dp, infiniment proches l'une de l'autre) eſt $PDp + QPpq = \frac{dx\sqrt{xx-aa}}{2} + \frac{xxdx}{2\sqrt{xx-aa}} = \frac{2xxdx - aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$. Mais le trapêſe $QPpq = dx \times \sqrt{xx-aa} = \frac{2xxdx - 2aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$. Donc le ſecteur hyperbolique $PDp = \frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$. Par conſéquent (en intégrant) $\int \frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}} = BDP + q$. Mais on vient de trouver (*art.* 1.) $t = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times \int \frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$. Donc t $(AT) = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times BDP + q$.

FIG. V.

III. Pour trouver préſentement la valeur conſtante de q, il faut conſiderer que le cas de AT $(t) = 0$, rendant auſſi (*hyp.*) $u = 0$, & qu'ayant trouvé ci-deſſus (*art.* 1.) $u = \frac{a\sqrt{5}}{2x} \times \sqrt{xx-aa} - \frac{1}{2}a$, ce cas doit pareillement rendre $\frac{a\sqrt{5}}{2x} \times \sqrt{xx-aa} - \frac{1}{2}a = 0$; & par conſéquent $\sqrt{5xx-5aa} = x$; d'où réſulte $4xx = 5aa$, ou $x = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Donc ſi après avoir pris $DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, on lui fait ML perpendiculaire laquelle rencontre l'hyperbole BPO & la droite DP en A. N; par le premier deſquels points ſoit la droite DA; ce cas de $t = 0$, réduira la valeur de t (AT) trouvée dans l'art. 2. à $0 = \frac{4}{a\sqrt{5}} BDA + q$, d'où réſulte $q = -\frac{4}{a\sqrt{5}} \times BDA$. Donc cette intégrale juſte & préciſe ſera AT $(t) = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times BDP$

$-\frac{4}{a\sqrt{5}} \times BDA = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times ADP$ (à cauſe de $BD = a$) $= \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{ADP}{BD} = \frac{2 \times ADP}{DM}$. De ſorte que l'arc hyperbolique AB ſera ici inutile, & que le point A ſera l'origine du ſeul arc utile APO: de ſorte auſſi que les tems AT (t) ſeront ici entr'eux comme les ſecteurs hyperboliques ADP correſpondans depuis l'origine AD vers O, les fractions $\frac{4}{a\sqrt{5}}$, $\frac{4}{BD\sqrt{5}}$, $\frac{2}{DM}$, étant conſtantes.

IV. De plus les valeurs précedentes (*art.* 1. 3.) de $DB = a$, $DQ = x$, $DM (x) = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, & de $TU (u) = \frac{a\sqrt{5}}{2x} \times \sqrt{xx - aa} - \frac{1}{2}a$ donneront MA ($\sqrt{\overline{DM}^2 - \overline{DB}^2}$) $= \sqrt{\frac{5aa}{4} - aa} = \sqrt{\frac{aa}{4}} = \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \times DB$, & TU (u) $= \frac{DM}{DQ} \times QP - MA$ $\left(\text{à cauſe de } DQ . DM :: QP . MN = \frac{DM \times QP}{DQ}\right) = MN - MA = AN$.

V. Donc (*art.* 3. 4.) ſi après avoir fait AC parallele à DC, on prend par tout ſur elle $AT = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{ADP}{BD} = \frac{2 \times ADP}{DM}$, & qu'on acheve le rectangle NT; la ligne HUC, qui paſſera par tous les angles U de ce parallelogramme & d'autres ainſi conſtruits à l'infini, ſera la Courbe cherchée des viteſſes reſtantes, dont l'équation étoit (*ſolut.* 1.) $dt = \frac{aadu}{aa - au - uu}$. *Ce qu'il falloit encore premierement trouver.*

VI. La Courbe HUC ainſi conſtruite, il n'y a plus qu'à prendre par tout $UR = TV = TA$, comme dans la Solut. 1. & la ligne ARC, qui paſſera par tous les points R ainſi trouvés, ſera ici (*Lem. art.* 1.) la Courbe des réſiſtances totales ou des viteſſes perduës. *Ce qu'il falloit encore ſecondement trouver.*

COROLLAIRE VII.

Puiſque (*Solut.* 2. *art.* 1.) $du = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{a^3dx}{xx\sqrt{xx - aa}}$, & $dt = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times \frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}} = \frac{2}{aa\sqrt{5}} \times \frac{a^3dx}{\sqrt{xx - aa}}$, l'on aura ici $du . dt :: \frac{\sqrt{5}}{2xx} . \frac{2}{aa\sqrt{5}} :: \frac{5aa}{4xx} . 1 :: \frac{5a^4}{4xx} . aa$ (*Solut.* 2. *art.* 1.) $:: aa - au - uu . aa$. De

forte qu'en A, qui rend TU (u) $=$ o, l'on aura $du \,.\, dt ::$ $aa \,.\, aa$, c'eſt-à-dire $du = dt$. Par conſéquent la courbe HUC doit non-ſeulement paſſer par A, mais encore y faire un angle de 45. deg. avec ſon axe AT, ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 2.

COROLLAIRE VIII.

Puiſque (*Solut.* 2. *art.* 3.) $AT = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{ADP}{BD}$, le cas de AT infinie, doit auſſi rendre le ſecteur hyperbolique ADP infini, la fraction $\frac{4}{BD \times \sqrt{5}}$ (*Solut.* 2. *art.* 2.) étant conſtante finie. Mais ADP infini, rend DQ (x) pareillement infinie, & réduit ainſi à $o = aa - au - uu$ l'équation $\frac{5a^4}{4xx} = aa - au - uu$ ſuppoſée dans la Solut. 2. art. 1. Donc le cas de AT infinie rend auſſi $aa - au - uu = o$, & conſéquemment $uu + au + \frac{1}{4}aa = \frac{5}{4} \times aa$, d'où réſulte $u = -\frac{1}{2}a + \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$. Par conſéquent la plus grande des ordonnées TU (u) de la Courbe AUC, doit être de cette valeur. Par conſéquent ſi l'on prend AL de cette même valeur, c'eſt-à-dire $AL = \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$, & qu'on faſſe LC parallele à AT, cette paralelle LC ſera une aſymptote de la Courbe AUC des viteſſes reſtantes TU (u), dont la plus grande ne pourra jamais ſurpaſſer la finie AL, mais ſeulement lui être égale après un tems infini AT, ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 1.

Il eſt à remarquer, que puiſque l'on a ici $AL = \frac{a\sqrt{5} - a}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}a$, & (*Solut.* 2. *art.* 4.) $MA = \frac{1}{2}a$; l'on y aura $ML = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ (*Solut.* 2. *art.* 3.) $= DM$; & qu'ainſi la droite DLO ſera pareillement une aſymptote de l'hyperbole équilatere BAO. D'où l'on voit auſſi que AL ſera la plus grande encore des AN ici poſſibles : c'eſt-à-dire (*Solut.* 2. *art.* 4.) la plus grande encore des viteſſes u (TU) ici poſſibles.

COROLLAIRE IX.

Pour trouver ici les eſpaces parcourus pendant les tems $AT(t)$, il faut conſiderer que la Solut. 2. art. 1. venant de donner $u = \frac{a\sqrt{5}}{2x}\sqrt{xx-aa} - \frac{1}{2}a$, & $dt = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times \frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$, doit auſſi donner $udt = \frac{aadx}{x} - \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$; dont l'intégrale eſt $\int udt\,(ATV) = aa \times lx - \frac{2}{\sqrt{5}} \times \int \frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}} + q$. Mais (*Solut.* 2. *art.* 2.) $x = DQ$, & $\int \frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}} = BDP$. Donc $ATU - aa \times lDQ - \frac{2}{\sqrt{5}} \times BDP + q$. Mais auſſi le cas de $ATU = 0$, qui rend $u = 0$, rendant (*Solut.* 2. *art.* 3.) $DQ = DM$, $BDP = BDA$, réduit cette intégrale à $0 = aa \times l\,DM - \frac{2}{\sqrt{5}} \times BDA + q$, d'où réſulte $q = -aa \times l\,DM + \frac{2}{\sqrt{5}} \times BDA$. Donc cette intégrale préciſe eſt $ATU = aa \times l\,DQ - aa \times l\,DM - \frac{2}{\sqrt{5}}$. $BDP + \frac{2}{\sqrt{5}} \times BDA = aa \times l\frac{DQ}{DM} - \frac{2}{\sqrt{5}} \times ADP$. Donc enfin (*Lem. art.* 3.) les eſpaces parcourus pendant les tems $AT(t)$ doivent être ici entr'eux comme les grandeurs $aa \times l\frac{DQ}{DM} - \frac{2}{\sqrt{5}} \times ADP$, ou $a \times l\frac{DQ}{DM} - \frac{2}{a\sqrt{5}} \times ADP$ correſpondantes, c'eſt-à-dire (*Solut.* 2, *art.* 3.) comme les correſpondantes $DB \times l\frac{DQ}{DM} - \frac{ADP}{DM}$.

COROLLAIRE X.

Pour exprimer ſans Logarithmes, & par la ſeule hyperbole OAB continuée (pour moins d'embarras) en BFO de l'autre côté de ſon axe DC, les eſpaces ici parcourus, déja exprimés (*Corol.* 4.) en ſeuls Logarithmes; ſoient du centre D par les points M, Q, q, les arcs de cercles $M\beta$, $Q\Pi$, $q\pi$, leſquels rencontrent en β, Π, π, ſon aſymptote $D\beta O$, deſquels points β, Π, π, ſoient élevées perpendiculairement à cette aſymptote les ordonnées $\beta\delta$, $\pi\mu$, $\pi\nu$, qui rencontrent la demi-hyperbole

BFO en δ; μ,ν. Cela fait, si l'on appelle $\pi\mu$, s; ayant déja (*sol.* 2. *art.* 2.3.) $DB=a$, $DM=\frac{a\sqrt{5}}{2}$, $DQ=x$, l'on aura non seulement $D\beta=\frac{a\sqrt{5}}{2}$, & $D\Pi=x$; mais encore $sx=\frac{1}{2}aa$, ou $2s=\frac{aa}{x}$; & par conséquent $\frac{aadx}{x}=2s\,dx=2\times\Pi\mu\nu\pi$. Or (*Corol.* 9.) $udt=\frac{aadx}{x}-\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$. Donc aussi $udt=$ $=2\times\Pi\mu\nu\pi-\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$. Par conséquent $\int udt$ (ATU) $=2\times\Pi DB\mu-\frac{2}{\sqrt{5}}\times\int\frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}+q$ (*la Solut.* 2. *art.* 2.) $=2\times\Pi DB\mu-\frac{2}{\sqrt{5}}\times BDP+q$. Mais le cas de $ATU=0$, rendant (*Corol.* 9.) $DQ=DM$, & conséquemment $D\Pi=D\beta$, réduit cette intégrale à $0=2\times\beta DB\delta-\frac{2}{\sqrt{5}}\times BDA$ $+q$, d'où résulte $q=-2\times\beta DB\delta+\frac{2}{\sqrt{5}}\times DBA$. Donc cette intégrale précise est $ATU=2\times\Pi DB\mu-2\times\beta DB\delta-\frac{2}{\sqrt{5}}\times BDP+\frac{2}{\sqrt{5}}\times BDA=2\times\beta\delta\mu\Pi-\frac{2}{\sqrt{5}}\times ADP$. Donc aussi (*Lem. art.* 3.) les espaces parcourus pendant les tems AT (t), doivent être ici entr'eux comme les grandeurs $2\times\beta\delta\mu\Pi-\frac{2}{\sqrt{5}}\times ADP$ correspondantes, ou comme les correspondantes $\beta\delta\mu\Pi\times\sqrt{5}-ADP$.

COROLLAIRE XI.

Pour trouver encore une autre expression de ce raport d'espaces ici parcourus pendant les tems AT, soit $y=\frac{xx+aa}{2x}$. l'on aura $2xy=xx+aa$, ou $yy-aa=xx-2xy+yy$; d'où résulte $x=y+\sqrt{yy-aa}$, & $dx=dy+\frac{ydy}{\sqrt{yy-aa}}$ $=\frac{y+\sqrt{yy-aa}}{\sqrt{yy-aa}}\times dy$. Donc $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{\sqrt{yy-aa}}$, & $\frac{aadx}{x}=\frac{aady}{\sqrt{yy-aa}}=$ $2\times\frac{aady}{2\sqrt{yy-aa}}$, & (en intégrant) $2\times\int\frac{aady}{2\sqrt{yy-aa}}=aa\times lx$ (*Corol.* 9.) $=aa\times l\frac{DQ}{DM}$.

Or si après avoir pris $DE=y$, l'on fait l'ordonnée EF perpendiculaire à DC, avec la droite DF; on trouvera

$\int \frac{aady}{2\sqrt{yy-aa}} = BDF + q$, de même que l'on a trouvé $\int \frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$ $= BDP + q$. dans la Solut. 2. art. 2. Donc $aa \times l\frac{DQ}{DM} = 2 \times$ $BDF + q$. Mais le cas de DQ en DM, qui rend $aa \times l\frac{DQ}{DM} = aa \times l\frac{DM}{DM} = aa \times l\,1 = 0$, réduira cette intégrale à $0 = 2 \times DBK + q$, ou à $q = -2\,DBK$, en prenant $DZ = \frac{9a}{4\sqrt{5}}$, & en menant l'ordonnée ZK avec la droite DK; puisque ce cas de $DQ = DM$, c'est-à-dire (*Solut.* 2. *art.* 3.) de $x = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, change $x = y + \sqrt{yy-aa}$ trouvée ci-dessus, en $y = \frac{9a}{4\sqrt{5}}$. Donc $aa \times l\frac{DQ}{DM} = 2 \times BDF - 2 \times BDK$ $= 2 \times KDF$ de l'origine K, sera cette intégrale complette.

Donc aussi $2 \times KDF - \frac{2}{\sqrt{5}} ADP = aa \times l\frac{DQ}{DM} - \frac{2}{\sqrt{5}} \times ADP$ (*Corol.* 9.) $= ATU$. Par conséquent (*Lem. art.* 3.) les espaces parcourus pendant les tems AT, lesquels espaces se sont trouvés ci-dessus (*Corol.* 9.) en raison des grandeurs $aa \times l\frac{DQ}{DM} - \frac{2}{\sqrt{5}} ADP$ correspondantes, seront pareillement ici entr'eux en raison des correspondantes $2 \times KDF - \frac{2}{\sqrt{5}} \times ADP$, ou comme les correspondantes $KDF \times \sqrt{5} - ADP$.

COROLLAIRE XII.

Or le cas de x infinie, qui rend aussi $y\left(\frac{xx+aa}{2x}\right)$ infinie, rend pareillement les secteurs ADP, KDF, infinis: de sorte que quand même il rendroit $ADP = 2 \times KDF$, à cause qu'alors $y\left(\frac{xx+aa}{2x}\right) = \frac{x}{2}$, ou $x\,(DQ) = 2y\,(2 \times DE)$, on ne laisseroit pas d'avoir aussi pour lors $KDF \times \sqrt{5} -$ ADP infini; puisque $\sqrt{5} > 2$, rendroit alors la difference de $KDF \times \sqrt{5}$ à $2 \times KDF$, c'est-à-dire ADP, infinie; & par conséquent aussi $KDF \times \sqrt{5} - ADP$ pour lors infinie aussi-bien que le tems AT (*solut.* 2. *art.* 3.) $=$ $= \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{ADP}{BD} = \frac{2 \times ADP}{DM}$. Donc (*Corol.* 11.) l'espace ici parcouru

couru pendant un tems *AT* ou *ATC* infini, feroit pareillement infini.

Voilà ce qui réfulteroit du Corol. 10. quand même on fuppoferoit $ADP = 2 \times KDF$ à une diftance $DQ (x)$ infinie; mais on l'en verra réfulter encore à plus forte raifon fi l'on confidere que cette diftance ou celle de $DE (y)$ infinie, rend même $ADP = KDF$. En effet l'hyperbole *PBF* atteignant l'une & l'autre de fes afymptotes *DO*, *DO*, à chacune des diftances $DQ (x)$ $DE (y)$ infinies, quoiqu'alors $y \left(\frac{xx+aa}{2x}\right) = \frac{1}{2}x$ rende DQ double de DE; il eft manifefte que depuis la premiere ou la moindre de ces diftances infinies, cette hyperbole demeure confonduë par delà à l'infini du côté de *O* avec ces mêmes afymptotes alors en lignes droites chacune avec elle; & qu'ainfi les fecteurs *ADP*, *KDF*, n'augmentent que jufqu'à la moindre de ces diftances infinies, à laquelle conféquemment ils doivent être égaux entr'eux, & pour toutes les autres diftances infinies, même infiniment prolongées par-delà cette premiere d'entr'elles du côté de *C*. Donc alors $KDF \times \sqrt{5} - ADP$ fera infinie, & conféquemment auffi (*Corol.* 10.) les efpaces ici parcourus pendant les tems $AT \left(\frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{ADP}{BD}\right.$, ou $\left.\frac{2 \times ADP}{DM}\right)$ alors infinis, ainfi qu'on l'a déja vû dans les Corol. 4. & 6.

COROLLAIRE XIII.

Il réfulte encore une autre expreffion du rapport des efpaces ici parcourus pendant les tems *AT*, de ce que (*Corol.* 11.) $KDF = \int \frac{aady}{2\sqrt{yy-aa}} = \int \frac{aadx}{2x}$, & (*Corol.* 9.) $ADP = \int \frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$. Car les differentielles (toûjours exprimées par la caractariftique d) en étant $dKDF = \frac{aadx}{2x}$, & $dADP = \frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$; l'on aura $dKDF . dADP :: \frac{aadx}{2x} . \frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}} :: dx\sqrt{xx-aa} . xdx :: mdx\sqrt{xx-aa} . mxdx$. De forte qu'en fuppofant $dKDF = mdx\sqrt{xx-aa}$, quelque nombre que

m doive valoir pour cela, l'on aura aussi $dADP = mxdx$; & (en intégrant) $KDF = m \times \int dx \sqrt{xx - aa} = m \times AMQP$, $ADP = \frac{mxx}{2} + q$ (à cause de $GQ = DQ = x$, en prolongeant QP jusqu'à la rencontre de DL en G) $= m \times AQG + q$ (à cause que DQ en DM, réduisant cette derniere intégrale à $0 = m \times DML + q$, donne $q = - m \times DML$) $= m \times DQG - m \times DML = m \times LMQG$. Donc $KDF\sqrt{5} - ADP = m \times AMQP \times \sqrt{5} - LMQG$. Or on vient de voir (*Corol.* 11.) que les espaces ici parcourus pendant les tems AT, sont entr'eux comme les grandeurs $KDF \times \sqrt{5} - ADP$ correspondantes. Donc ces mêmes espaces sont ici entr'eux comme les correspondantes $m \times AMQP \times \sqrt{5} - m \times LMQG$, ou simplement (à cause du nombre m constant) comme les correspondantes $AMQP \times \sqrt{5} - LMQG$.

COROLLAIRE XIV.

Par conséquent le cas de MQ ou de AT infinie en MC ou en ATC, qui rend les aires $AMQP$, $LMQG$, infinies en $OAMC$, $OLMC$, & même alors égales entr'elles, la Remarque suivante faisant voir que leur difference $OLAO$ se trouve alors nulle par rapport à elles: ce cas (dis-je) rendant aussi pour lors $AMPQ \times \sqrt{5} - LMQG$ infinie en $OAMC \times \sqrt{5} - OLMC$, l'espace ici parcouru pendant un tems infini ATC, devroit (*Corol.* 12.) y être encore infini, comme dans les Corol. 4. 6. & 12.

REMARQUE I.

I. On vient de dire dans le précedent Corol. 14. que le cas de MQ ou de AT infinie en MC ou en ATC, doit rendre la difference $OLAO$ des aires infinies $OLMC$, $OAMC$, nulle par rapport à elles, quoique cette difference soit elle même infinie par rapport aux aires finies $LMQG$, $AMQP$. Pour le voir, après avoir imaginé la droite MP prolongée jusqu'à l'asymptote DLO en S, il n'y a qu'à considerer que $AMQP > PQM$, & qu'au contraire $LAPG < SMD$: car voyant alors $AMQP$ en plus grande raison à $LAPG$ que PQM à SMD, & que le cas de MQ ou de DQ (x) infinie, qui confondant en-

fin *P* en *S*, rend par-là ces deux triangles *PQM*, *SMD*, de même hauteur *PQ*, rend auſſi pour lors *PQM*. *SMD* :: *QM*. *MD*. C'eſt-à-dire alors *PQM* infini par rapport à *SMD*; on verra que l'aire *AMQP*, ainſi changée en *OAMC*, doit auſſi être infinie par rapport à *OLAO*, quoique celle-ci ſoit elle-même infinie par rapport aux finies *AMQP*, *LMQG*; & par conſéquent que cette difference *OLAO* des aires infinies *OLMC*, *OAMC*, doit être nulle par rapport à elles, ainſi qu'on le vient de dire dans le Corol. 14.

II. Ce cas de *MQ* ou de *AT* infinie en *MC* ou en *ATC*, rendant ainſi la grandeur $OAMC \times \sqrt{5} - OLMC$ infinie du premier genre par raport à *OLAO*, & celle-ci pareillement infinie du même genre par raport à la finie $AMPQ \times \sqrt{5} - LMQG$; il eſt viſible que la premiere ſera infinie du ſecond genre par raport à celle-ci; & qu'ainſi (*Corol.* 12.) l'eſpace parcouru dans un tems infini *ATC*, ſeroit ici infiniment infini d'un parcouru dans un tems fini quelconque *AT*.

III. Mais, dira-t-on, eſt-ce que cet eſpace du fini à l'infini du ſecond genre, ſans paſſer par l'infini du premier genre, vû que *AT* ne peut être que fini ou infini? Point du tout : cet eſpace de fini devient infini du premier genre lorſqu'il égale un produit fait d'une grandeur finie par une infinie du premier genre par raport à elle: par exemple, lorſqu'il égale le produit de *b* finie quelconque par *y* infinie du premier genre par raport à *b*; & infini du ſecond genre, lorſqu'il égale le quarré *yy* de cette *y* infinie, ou le produit de deux autres lignes quelconques du même premier genre d'infini par raport à *b* finie; parce que les produits *yy*, *by*, *bb*, de *b*, *y*, telles qu'on les ſuppoſe ici, ſont infinis chacun du premier genre par raport à l'immediatement ſuivant, auquel il eſt :: *y*. *b*. Et conſéquemment le premier (*yy*) de ces trois produits, doit être infini du ſecond genre par raport au troiſiéme (*bb*). Or l'eſpace ou l'aire dont il s'agit ici, doit paſſer de *bb* par *by* avant que d'être à *yy*. Donc il doit paſſer du

fini par l'infini du premier genre, avant que d'arriver à l'infini du ſecond genre.

IV. Mais, peut-être dira-t-on encore; lorſque cet eſpace eſt égal à by infini du premier genre par raport à bb, quelle doit être alors la valeur de l'abſciſſe correſpondante x (DQ)? Elle tient le milieu entre x finie, & x infinie, ſans être ni l'une, ni l'autre. Que ſera-t-elle donc? Elle ſera pour lors auſſi inexprimable que les incommenſurables; par exemple, ſi $xx = by$ infini du premier genre par raport à bb fini, l'on aura $x = \sqrt{by}$ ſans être finie ni infinie: autrement ſon quarré xx ſeroit fini ou infini du ſecond genre, ainſi qu'on le vient de voir dans l'art. 3. Ce qui ſeroit contre l'hypothêſe qu'on fait ici de $xx = by$ infini du premier genre, dans laquelle x eſt moyenne proportionnelle entre b finie, & y infinie du premier genre, ſans être elle finie ni infinie, comme $\sqrt{6}$ eſt moyenne proportionnelle entre 2, 3, ſans être nombre pair ni impair: incomprehenſibilités égales de part & d'autre; leſquelles ceſſant dans le quarré de ces moyennes proportionnelles, ne prouvent que la foibleſſe ou la petiteſſe de nôtre eſprit, ſans nuire à la validité de nos démonſtrations, étant évident que ces quarrés (auſſi concevables que ceux de toutes les autres grandeurs) ont de telles moyennes proportionnelles pour racines.

V. La raiſon pour laquelle les quarrés ou les produits de deux grandeurs infinies chacune du premier genre, ſont du ſecond par rapport à de pareils quarrés ou produits de deux parties finies de ces grandeurs, vient de ce que ces produits de grandeurs infinies par d'infinies, ſe trouvant infinis dans l'un & l'autre ſens de ces grandeurs, le ſont doublement de ceux qui ne ſont faits que de grandeurs finies. Par la même raiſon les cubes ou les produits faits de trois grandeurs infinies chacune du premier genre, ſeroit du troiſiéme par raport à des cubes ou à des produits faits de trois parties finies de ces grandeurs; & ainſi de tant d'autres dimenſions qu'on voudra à l'infini. De ſorte qu'en general un produit quelconque fait de quelque nombre que ce ſoit de grandeurs infinies du premier genre par ra-

port à autant d'autres finies dont un autre produit seroit fait égal en dimensions, seroit toûjours à cet autre produit, comme un infini d'un genre exprimé par le nombre de ces dimensions, seroit au fini, c'est-à-dire infini de ce genre par raport à cet autre produit fini ; & les produits de genres moyens entre ces deux-là, & qui leur seroient homogenes, comme $x^{m-p} b^{m+-p}$, $x^{m-p+-q} b^{m+-p-q}$, entre x^m, b^m, dont x seroit infinie, & b finie, n'ayant pour racines que des grandeurs moyennes entre les leurs ; sçavoir $\sqrt[m]{x^{m-p} b^{m+-p}}$, $\sqrt[m]{x^{m-p+-q} b^{m+-p-q}}$, entre x ; b ; ces racines moyennes, quoique de differens genres, ne seroient ni finies ni infinies par raport à celles-là, de même que les differens genres d'incommensurables moyens à l'infini entre 2. & 3. ne sont ni nombres pairs ni impairs. C'est ainsi que ces incomprehensibilités peuvent s'accumuler à l'infini de part & d'autre, d'une maniere cependant toûjours assez claire pour en faire voir la necessité, & pour nous conduire sans erreur dans les démonstrations où ces sortes de grandeurs se rencontrent. Les preuves qu'on en a pour les incommensurables, serviront pour les grandeurs moyennes entre les finies & les infinies, ou entre deux infinies de genres quelconques.

VI. Il y a encore cette conformité entre ces moyennes grandeurs & les incommensurables, que de même qu'il y a des incommensurables commensurables entr'eux, de même aussi y a-t-il des grandeurs moyennes entre le fini & les infinis de differens genres, lesquelles, quoique d'aucune de ces especes par raport à ces absolument finies ou infinies, ne laissent pas d'en être entr'elles. Par exemple, soient encore b finie, & x infinie du premier genre par raport à b : l'on aura bb, bx, xx, dont les deux derniers produits seront infinis de suite par raport au fini bb : leurs moyens $b\sqrt{bx}$, $x\sqrt{bx}$, ne seront ni finis ni infinis par raport à eux ; cependant le second $x\sqrt{bx}$ sera infini par raport au premier $b\sqrt{bx}$, sçavoir à lui : : x. b. Et ainsi des autres à l'infini.

Voilà une longue digression ; mais elle m'a paru necessaire

par raport au précedent Corol. 14. & pour l'éclairciſſement d'autres cas ſemblables.

COROLLAIRE XV.

FIG. V.

Les eſpaces ici parcourus pendant les tems AT, ou (*Solut. 2. art. 3.*) $\frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{ADP}{BD}$, peuvent encore ſe trouver d'une autre maniere que dans le Corol. 4. 6. 9. 10. 13. ci-deſſus : voici comment. Tout ce qu'on voit de la fig. 5. dans la fig. 6. demeurant le même ici que là, ſoient priſes $AV = DB$, & $AS = \frac{2MA \times AN + \overline{AN}^2}{DB}$, ſur ML prolongée du côté de L. La Solut. 2. art. 2. 4. donnant $DB = a$, $MA = \frac{1}{2}a$; $AN = u$, & conſéquemment $MN = \frac{1}{2}a + u$; l'on aura auſſi $AV = a$, $AS = \frac{au + uu}{a}$; & par conſéquent $VS = \frac{aa - au - uu}{a}$: leſquelles VS diminuant à meſure que les u (TU) augmentent, elles auront leurs élemens $Ss = \frac{adu + 2udu}{a}$. Mais ſi après avoir fait VC parallele à ATC, & pris $AX = \frac{1}{2}DM$ (*Solut. 2. art. 3.*) $= \frac{a\sqrt{5}}{4}$ ſur ATC, ou fait du centre V par X l'hyperbole équilatere XYC entre les aſymptotes orthogonales VC, VM, laquelle ſoit rencontrée en Y, y, par SY, sy, paralleles ATC; cette hyperbole XYC donnera $VS \left(\frac{aa - au - uu}{a}\right) . VA (a) :: AX \left(\frac{a\sqrt{5}}{4}\right) . SY = \frac{a\sqrt{5}}{4} \times \frac{aa}{aa - au - uu}$. Donc $SY \times Ss$ ($SYys$) $= \frac{a\sqrt{5}}{4} \times \frac{aadu + 2audu}{aa - au - uu}$. Or (*Solut. 2. art. 1. 2.*) $\frac{aadu}{aa - au - uu} = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times \frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}} = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times PDp$; & par conſéquent $PDp = \frac{a\sqrt{5}}{4} \times \frac{aadu}{aa - au - uu}$. Donc $SYyS - PDp = \frac{a\sqrt{5}}{4} \times \frac{2audu}{aa - au - uu} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{aaudu}{aa - au - uu}$. Or la Sol. 1. donnant $dt = \frac{aadu}{aa - au - uu}$, donne auſſi $udt = \frac{aaudu}{aa - au - uu}$, & conſéquemment $\frac{\sqrt{5}}{2} \times udt = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{aaudu}{aa - au - uu}$. Donc $\frac{\sqrt{5}}{2} \times udt = SYys - PDp$, & (en intrégrant) $\frac{\sqrt{5}}{2} \times \int udt = \int SYys - \int PDp = ASYX - ADP + q$. Mais le cas de $\int udt$ (ATU) $= 0$, qui rend auſſi u (TU) $= 0$, rendant par-là $AS = \frac{au + uu}{a} = 0$,

& AN $(TU)=o$, doit pareillement rendre $ASTX=o$, $ADP=o$; & ainsi réduire l'intégrale précédente à $o=q$. Donc enfin cette intégrale précise est $\frac{\sqrt{5}}{2}\times\int udt = ASTX - ADP$, & conséquemment $\int udt.(ATU)=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\overline{ASTX-ADP}$. Par conséquent (*Lem. art.* 3.) les espaces ici parcourus pendant les tems AT ou (*Solut.* 2. *art.* 3.) $\frac{4}{\sqrt{5}}\times\frac{ADP}{BD}$ doivent être entr'eux comme les differences $ASTX-ADP$ des aires hyperboliques $ASTX$, ADP, correspondantes, ainsi que M. Newton l'a aussi trouvé à sa maniere dans ses Princ. Math. Liv. 2. Sect. 3. Prop. 14. pag. 280. & 281

COROLLAIRE XVI.

La même chose se peut encore trouver en faisant du centre D par A l'hyperbole équilatere ωAC entre les asymptotes orthogonales DC, $D\omega$. Car si de l'origine D sur DC, on prend les abscisses $DR=\frac{DM^2-MN^2}{DM}$ variables, les art. 3. 4. de la Solut. 2. donnant $DM=\frac{a\sqrt{5}}{2}$, $MA=\frac{1}{2}a$, $AN=u$, & conséquemment $MN=\frac{1}{2}a+u$, donneront aussi les $DR=\frac{\frac{5}{4}aa-\frac{1}{4}aa-au-uu}{\frac{1}{2}a\sqrt{5}}=\frac{2aa-2au-2uu}{a\sqrt{5}}$, qui dans le cas de TU $(u)=o$, au commencement du mouvement qui rend aussi le tems $AT=o$, deviennent $D\varphi=\frac{2aa}{a\sqrt{5}}=\frac{2a}{\sqrt{5}}$; & qui diminuant à mesure que u (TU) augmente, doivent avoir leurs élemens $Rr=\frac{2adu+4udu}{a\sqrt{5}}$. Donc si l'on fait de plus les ordonnées $\varphi\psi$, RZ, rz, paralleles à MA, & qui rencontrent l'hyperbole équilatere ωAC en ψ, Z, z, dont Zz soit un des élemens; cette hyperbole donnant $\varphi\psi=\frac{DM\times MA}{D\varphi}=\frac{aa\sqrt{5}}{4}\times\frac{\sqrt{5}}{2a}=\frac{5}{8}a$, $RZ=\frac{DM\times MA}{DR}=\frac{aa\sqrt{5}}{4}\times\frac{a\sqrt{5}}{2aa-2au-2uu}$, que le cas de $u=o$, doit changer en $\varphi\psi=\frac{5a}{8}$; l'on aura ici $RZ\times Rr$ $(RZzr)=\frac{aa\sqrt{5}}{4}\times\frac{2adu+4udu}{2aa-2au-2uu}=\frac{a\sqrt{5}}{4}\times\frac{aadu+2audu}{aa-au-uu}$. Or (*Solut.* 2. *art.* 1, 2.) $\frac{aadu}{aa-au-uu}=\frac{4}{a\sqrt{5}}\times\frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}=\frac{4}{a\sqrt{5}}\times PDp$; &

par conséquent $PDp = \frac{a\sqrt{5}}{4} \times \frac{aadu}{aa - au - uu}$. Donc $RZzr - PDp = \frac{a\sqrt{5}}{4} \times \frac{2audu}{aa - au - uu} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{aaudu}{aa - au - uu}$. Or la Solut. 1. donnant $dt = \frac{aadu}{aa - au - uu}$, donne aussi $udt = \frac{aaudu}{aa - au - uu}$. Donc $\frac{\sqrt{5}}{2} \times udt = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{aaudu}{aa - au - uu} = RZzr - PDp$; & (en intégrant) $\frac{\sqrt{5}}{2} \times \int udt = \varphi RZ\psi - BDP + q$. Mais le cas de $\int udt$ (ATU) $= 0$, qui rend aussi TU (AN) $= 0$, & conséquemment (ainsi qu'on le vient de voir) $DR = D\varphi$, ou $\varphi R = 0$, rendant par-là $BDP = BDA$, & $\varphi RZ\psi = 0$, réduit cette intégrale à $0 = -BDA + q$, d'où résulte $q = BDA$. Donc cette intégrale précise est $\frac{\sqrt{5}}{2} \times ATU$ $\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \times \int udt\right) = \varphi RZ\psi - BDP + BDA = \varphi RZ\psi - ADP$, ou $ATU = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \overline{\varphi RZ\psi - ADP}$, les origines de ces aires hyperboliques $\varphi RZ\psi$, ADP, étant φ, A. Par conséquent (*Lem. art.* 3.) les espaces ici parcourus pendant les tems AT, ou (*Solut.* 2. *art.* 3.) $\frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{ADP}{BD}$, doivent être entr'eux comme les differences $\varphi RZ\psi - ADP$ de ces aires hyperboliques correspondantes.

Si l'on veut que l'aire $\varphi RZ\psi$, qui commence en φ, commence en B; au lieu de prendre (comme l'on vient de faire) $DR = \frac{\overline{DM}^2 - \overline{MN}^2}{DM}$, qui a donné $D\varphi = \frac{2a}{\sqrt{5}}$ dans le cas de TU (AN) $= 0$, il n'y a qu'à prendre $DR = \frac{\overline{DM}^2 - \overline{MN}^2}{DB}$, qui dans ce cas de TU (AN) $= 0$, donnera $D\varphi = DB$, & $\varphi\psi$ (qui pour lors passera par B) $= \frac{\sqrt{5}}{4} \times BD$: l'hyperbole équilatere, qui entre les asymptotes DC, $D\omega$, passera par le point ψ ainsi trouvé entre A & V, donnera la même chose que lorsqu'elle passoit par A, & sera précisement la même que XYC dans une autre position.

Si l'on veut se donner la peine de comparer entr'elles les deux aires hyperboliques ASYX, ADP, *du Corol.* 15. *on trouvera que le cas de* AT *infinie, les doit rendre non-seulement infinies l'une & l'autre;*

l'autre; mais encore la premiere multiple de la seconde: sçavoir AVCCX *à* OADO *en plus grande raison que* $\sqrt{5}$ *à* 2. *D'où l'on verra que leur difference* ASYX—ADP *seroit aussi pour lors infinie & qu'ainsi l'espace ici parcouru pendant un tems infini* ATC, *seroit pareillement infini. Il en faut dire autant de* $\varphi RZ\psi$ — *ADP dans le Corol.* 16.

COROLLAIRE XVII.

L'on aura ici de plus $PDp . NDn :: \overline{DP}^2 . \overline{DN}^2 :: \overline{DQ}^2 . \overline{DM}^2$. Or $\overline{DQ}^2 . \overline{DM}^2 :: \overline{QP}^2 . \overline{MN}^2$. Et conséquemment $\overline{DQ}^2 . \overline{DM}^2 :: \overline{DQ}^2 - \overline{QP}^2 . \overline{DM}^2 - \overline{MN}^2 :: \overline{DB}^2 . \overline{DM}^2 - \overline{MN}^2 :: DB . \frac{\overline{DM}^2 - \overline{MN}^2}{DB}$. D'ailleurs la Solut. 2. art. 2. 3. 4. donnant $DB = a$, $DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $MN = \frac{1}{2}a + u$, l'on aura $\frac{\overline{DM}^2 - \overline{MN}^2}{DB} = \frac{\frac{5}{4}aa - \frac{1}{4}aa - au - uu}{a} = \frac{aa - au - uu}{a}$ (*Corol.* 15.) $= VS$. Donc $PDp . NDn :: DB . VS$. Donc aussi $VS = \frac{DB \times NDn}{PDp} = \frac{DB \times DM \times Nn}{2 \times PDp}$ (soit PDp constant, & supposé égal à $DB \times m$, dont m soit conséquemment un infiniment petit constant) $= \frac{DM \times Nn}{2m}$; & conséquemment $SY \left(\frac{VA \times AX}{VS}\right) = \frac{VA \times AX \times 2m}{DM \times Nn}$ (le Corol. 15. donnant $VA = a$, $AX = \frac{a\sqrt{5}}{4}$, $DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$) $= \frac{aa\sqrt{5}}{4} \times \frac{2}{a\sqrt{5}} \times \frac{2m}{Nn} = \frac{am}{Nn} = \frac{m \times DB}{Nn}$. Mais on vient de trouver aussi $VS = \frac{\overline{DM}^2 - \overline{MN}^2}{DB}$, de qui la difference est $Ss = \frac{2MN \times Nn}{DB}$. Donc $SY \times Ss$ $(SYys) = 2 \times MN \times m$. Par consequent ayant déja (*hyp.*) $PDp = DB \times m$, l'on aura aussi $SYys - PDp = 2m \times MN - m \times DB$ (la Solut. 2. art. 4. donnant $MA = \frac{1}{2}DB$) $= 2m \times MN - 2m \times MA = 2m \times AN = 2m \times TU$. Donc m étant (*hyp.*) constante, la somme (*Corol.* 15.) $ASYX - ADP$ des $SYys - PDp$, sera par tout ici comme la somme ATU des TU correspondantes, & conséquemment encore (*Lem. art.* 3.) en raison des espaces parcourus pendant les tems AT en vertu de ces vitesses TU restantes malgré les résistances supposées, ainsi que dans le Corol. 15.

Il eſt manifeſte que ſi au lieu de $VS = \frac{\overline{DM}^2 - \text{[illegible]}}{DB}$, l'on employe de même $DR = \frac{\overline{DM}^2 - MN^2}{DB}$ dans le raiſonnement précedent ; on trouvera auſſi les eſpaces ici parcourus pendant les tems AT, en raiſon des differences $\varphi RZ\psi - ADP$ des aires hyperboliques $\varphi RZ\psi$, ADP, correſpondantes, ainſi que dans le Corol. 16.

COROLLAIRE XVIII.

Le Corol. 17. précedent peut encore être démontré plus ſimplement. Car puiſque (*Corol.* 15.) $\frac{\sqrt{5}}{2} \times udt = SYys - PDp$, ſi l'on prend les inſtans dt, ou (*Solut.* 2. *art.* 1.2.) les ſecteurs élémentaires hyperboliques PDp pour conſtans, c'eſt-à-dire, tous égaux entr'eux ; il eſt viſible que les viteſſes u (TU ou AN) ſeront par tout ici en raiſon des differences hyperboliques $SYys - PDp$. Donc auſſi les ſommes de ces viteſſes, ou (*Lem. art.* 3.) les eſpaces ici parcourus pendant les tems AT (t), ſeront encore entr'eux comme les ſommes $ASYX - ADP$ de ces differences $SYys - PDp$.

COROLLAIRE XIX.

Suppoſons préſentement que le mouvement eſt ici directement de haut en bas, & avec Galilée que l'acceleration de la viteſſe primitive (v) en raiſon des tems écoulés (t) eſt ici cauſée par la peſanteur conſtante du mobile.

Cela poſé, puiſque (*Corol.* 15.) $AV = a$, & $AS = \frac{au + uu}{a}$; l'on aura ici $AV . AS :: a . \frac{au+uu}{a} :: aa . au + uu$. Mais la Solut. 1. donne $\frac{dr}{au+uu} = \frac{dt - du}{au+uu} = \frac{dt}{aa} = \frac{dv}{aa}$; ce qui donne de même $dv . dr :: aa . au + uu$. Donc auſſi $AV . AS :: dv . dr$. C'eſt-à-dire (*Lem. art.* 4.) comme la peſanteur du mobile eſt à la réſiſtance actuelle du milieu. D'où l'on voit qu'en prenant la conſtante AV pour la peſanteur du mobile, l'on aura ici chaque AS pour la réſiſtance du milieu que ce mobile aura à ſurmonter à chaque inſtant de ſa chute ; & VS pour l'excès de force dont

cette réſiſtance inſtantanée ſera ſurpaſſée par cette peſanteur, c'eſt-à-dire pour ce qu'il y aura de cette peſanteur employé à produire l'augmentation de viteſſe qui ſurvient au mobile à l'inſtant de cette réſiſtance, ou pour ce qui reſte alors de force motrice à cette peſanteur malgré cette réſiſtance.

COROLLAIRE. XX.

Donc lorſque $VS=0$, la viteſſe du mobile n'augmente plus du tout. Mais ce cas, qui rend $AS=AV$, rendant pareillement (*Corol.* 15.) $\frac{2\times MA\times AN+\overline{AN}^2}{DB}=DB$, ou $2\times MA\times AN+\overline{AN}^2=\overline{DB}^2=\overline{DM}^2-\overline{MA}^2$, donne $\overline{DM}^2=\overline{MA}^2+2\times MA\times AN+\overline{AN}^2=\overline{MN}^2$, ou $MN=DM$ (*Corol.* 8.) ML, & conſéquemment $AN=AL$. Donc auſſi (*Sol.* 2. *art.* 4.) AL ſera encore ici la plus grande des viteſſes AN (TU) que le mobile puiſſe jamais acquerir en vertu de ſa peſanteur malgré les réſiſtances ſuppoſées, même dans un tems infini. Par conſéquent quoique ces viteſſes s'accelerent toûjours, la plus grande d'entr'elles ne peut jamais devenir que finie. Ce qui s'accorde avec les Corol. 1. 8.

COROLLAIRE XXI.

Puiſque (*Corol.* 19.) $dv.dr::AV.AS$ (*Corol.* 15.) $::BD.\frac{2\times MA\times AN+AN^2}{BD}::\overline{DB}^2.2\times MA\times AN+\overline{AN}^2$ (à cauſe de $\overline{DB}^2=\overline{DM}^2-\overline{MA}^2$) $::\overline{DM}^2-\overline{MA}^2.2\times MA\times AN+\overline{AN}^2$. L'on aura auſſi $dv.dv-dr\,(du)::\overline{DM}^2-\overline{MA}^2.\overline{DM}^2-\overline{MA}^2-2\times MA\times AN-\overline{AN}^2::\overline{DM}^2-\overline{MA}^2.\overline{DM}^2-\overline{MN}^2::\overline{DB}^2:\overline{DM}^2-\overline{MN}^2$. C'eſt à-dire (*Lem. art.* 4.) que la peſanteur (dv) du mobile eſt à chaque réſiſtance inſtantanée (dr) du milieu, & à chacun des excès (du) ou ſurplus de force ſur chacune de ces réſiſtances, comme chacune des grandeurs conſtantes $\overline{DB}^2$, $\overline{DM}^2-\overline{MA}^2$, & (la Solut. 2. art. 4. donnant $DB=2\times MA$) $4\times\overline{MA}^2$, eſt aux variables correſpondantes $\overline{2\times MA+AN}\times AN$, $\overline{DM}^2-\overline{MN}^2$; ou aux correſpondantes $\overline{DB+AN}\times AN$, $\overline{DM}^2-\overline{MN}^2$:

C'eſt-à-dire qu'en exprimant la peſanteur du mobile par celle qu'on voudra des trois grandeurs conſtantes $\overline{DB}^2$, $\overline{IM}^2 - \overline{MA}^2$, $4 \times \overline{MA}^2$; chacune de ces deux variables $\overline{2 \times MA + AN} \times AN$, $\overline{DB + AN} \times AN$; exprimera les réſiſtances inſtantanées du milieu; & la variable $\overline{DM}^2 - \overline{MN}^2$ exprimera l'excês dont chacune de ces réſiſtances ſera ſurpaſſée par cette peſanteur. D'où l'on voit que lorſque $MN = DM = DL$, cet excès ou reſte de peſanteur ſera nul, & conſéquemment hors d'état d'augmenter la viteſſe AN; & conſéquemment encore AL ſera la plus grande de toutes les viteſſes ici poſſibles, ainſi qu'on l'a déja vû dans les Corollaires 8. 20.

COROLLAIRE XXII.

On ſçait que les aires hyperboliques $ASYX$ croiſſent ou décroiſſent en progreſſion arithmetique à meſure que leurs abſciſſes VS décroiſſent ou croiſſent en progreſſion géometrique. Mais on vient de voir (*Corol.* 19.) que ces abſciſſes VS ſont ici comme les excès de force dont la peſanteur conſtante du mobile ſurpaſſe à chaque inſtant les réſiſtances inſtantanées du milieu qui s'oppoſe à ſa chute. Donc en prenant ces excès de la peſanteur du mobile par deſſus ces réſiſtances, en progreſſion géometrique, les aires hyperboliques $ASYX$ croîtront arithmetiquement à meſure qee ces excès (*du*) diminueront géometriquement. Par conſéquent les tems écoulés du mouvement, étant ici (*Solut*, 2. *art.* 3.) comme les ſecteurs hyperboliques ADP correſpondans; & (*Corol.* 15. 17.) les eſpaces ici parcourus pendant ces tems, comme les differences $ASYX - ADP$ correſpondantes : ces eſpaces doivent pareillement être ici entr'eux comme des differences d'aires hyperboliques, dont la plus grande ($ASYX$) croiſſe en progreſſion arithmetique à meſure que les excès de la peſanteur du mobile ſur les réſiſtances inſtantanées du milieu diminuent géometriquement, & la moindre (ADP) ſoit en raiſon des tems écoulés du mouvement, ainſi que M. Newton

l'a dit dans la Prop. 14. citée ci-dessus à la fin du Corol. 15.

COROLLAIRE XXIII.

La supposition qu'on fait par tout dans ce Memoire, de $v = t$, donnant aussi par tout $u . v :: u . t$. L'on aura ici (*Solut.* 2. *art.* 3. 4.) $u . v :: AN . \frac{2 \times ADP}{DM} :: \frac{AN \times DM}{2} . ADP$. C'est-à-dire que la vitesse effective ou restante (u) à la fin d'un tems quelconque $\left(t \text{ ou } \frac{2 \times ADP}{DM}\right)$ dans le milieu résistant supposé, seroit à ce que le mobile en auroit à la fin d'un pareil tems dans un milieu sans résistance ni action, comme le triangle rectiligne $ADN \left(\frac{AN \times DM}{2}\right)$ est au secteur hyperboliqde ADP correspondant. D'où l'on voit encore qu'à la fin d'un tems infini AT (t) où la vitesse primitive (v) dans un milieu sans résistance seroit infinie de même que le secteur ADP qui alors seroit $= OADO$; la vitesse (u) restante de celle-là dans le milieu qu'on suppose lui résister, ne seroit que finie, le triangle ADN se trouvant seulement alors $= ADL$. Ce qui s'accorde encore avec les Corol. 1. 8. 20. 21.

COROLLAIRE XXIV.

Suivant le Lem. art. 3. l'espace ici parcouru pendant quelque tems AT (t) ou (*Solut.* 2. *art.* 3.) $\frac{2 \times ADP}{DM}$ que ce soit, malgré les résistances supposées, est à ce que le mobile en auroit parcouru pendant un pareil tems dans un milieu sans résistance ni action $:: \int udt . \int vdt$ (à cause de $v = t$ dans tout ce Memoire) $:: \int udt . \int tdt :: \int udt . \frac{1}{2} tt$ (*Corol.* 15. & *Solut.* 2. *art.* 3.) $:: \frac{2}{\sqrt{5}} \times \overline{ASYX - ADP} . 2 \times \frac{ADP \times ADP}{DM \times DM}$ (les articles 2. 3. de la Solution 2. donnant $DM = \frac{a\sqrt{5}}{2} = DB \times \frac{\sqrt{5}}{2}$) $:: ASYX - ADP . 2 \times \frac{ADP \times ADP}{BD \times DM} :: \frac{BD \times DM}{2} . \frac{ADP \times ADP}{ASYX - ADP}$ (à cause de $MA = \frac{1}{2} DB$ dans l'art. 4. de la Solut. 2.) $:: \frac{MA \times DM}{2} . \frac{1}{2} \times \frac{ADP \times ADP}{ASYX - ADP}$. C'est-à-dire, que l'espace ici parcouru pendant un tems quelconque $\frac{2 \times ADP}{DM}$

malgré les résistances supposées, seroit toûjours au parcouru par le même mobile pendant un pareil tems dans un milieu sans résistance ni action, comme le triangle rectangle constant DMA $\left(\frac{MA \times DM}{2}\right)$ seroit à la fraction $\frac{1}{2} \times \frac{ADP \times ADP}{ASYX - ADP}$ correspondante.

REMARQUE II.

FIG. VII. Si au lieu de prendre $\frac{5}{4} \times \frac{a^4}{xx} = aa - au - uu$, comme l'on a fait dans la Solut. 2. art. 1. l'on y eût pris simplement $\frac{a^4}{xx} = aa - au - uu$, cette seconde supposition auroit donné toutes les mêmes choses que l'autre, excepté que VL auroit passé par le sommet B de l'hyperbole OPB, parallelement à MA qui auroit rencontré cette hyperbole, non-plus en A, mais en F: par lequel point F ayant mené DF qui rencontre VB en E; ensuite par ce point E la droite EC parallele à DC, qui auroit rencontré MF en A sommet de la Courbe AVC des vitesses restantes $TU = EN$, dont la plus grande des possibles, même après un tems infini, auroit été EL: l'on auroit eu $DM = a$, $DB = \frac{2a}{\sqrt{5}}$, $MF = \frac{a}{\sqrt{5}}$, $MA = BE = \frac{2a}{5}$; les secteurs FDP en raison des tems AT (t); les grandeurs $DM \times DM \times l\frac{DQ}{DM} - \frac{2}{\sqrt{5}} FDP$, ou $\frac{\sqrt{5}}{8} \times ESYX - \frac{2}{\sqrt{5}} FDP$, en raison des espaces parcourus pendant ces tems, en prenant ici $ES = \frac{\frac{5}{2} BE \times EN + \overline{EN}^2}{DM}$, $EX = 2DB$, & $EV = DM$; les grandeurs EV, ES, VS, en raison de la pesanteur du mobile, des résistances instantanées du milieu, & des excès dont cette pesanteur surpasse ces résistances à chaque instant: le reste sera pareillement le même à proportion que cy-dessus. Nous n'y avons préferé $\frac{5}{4} \times \frac{a^4}{xx}$ à $\frac{a^4}{xx}$, que parceque la seconde de ces deux fractions, quoique plus simple en soy que la premiere, l'est cependant beaucoup moins qu'elle dans ses conséquences.

REMARQUE III.

Le raport précedent (*Remarq.* 2.) de la pesanteur du mobile aux résistances instantanées que lui fait le milieu supposé, & aux excès de cette pesanteur sur ces résistances, déja trouvé dans les Corol. 19. 21. peut encore se déduire immédiatement des seules hypotheses de ce Problême-ci. Ces hypotheses sont $dt = dv = dr + du$, & $\frac{dr}{au+uu} = \frac{dt-du}{au+uu} = \frac{dt}{aa}$. Cela seul servira, dis-je, à trouver encore ces raports que voici.

1°. Puisque (*hyp.*) $\frac{dr}{au+uu} = \frac{dt}{aa} = \frac{dv}{aa}$; l'on aura $dv . dr :: aa . au + uu$. C'est-à-dire (*Lem. art.* 4.) que la pesanteur du mobile sera ici à la résistance que lui fait le milieu à chaque instant, comme le quarré (aa) d'une vitesse (a) dont la terminale $\left(\frac{a\sqrt{5}-a}{2}\right)$ est un $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, est à la somme faite du produit (au) de cette vitesse (a) par la restante (u) à chaque instant, & du quarré (uu) de cette vitesse restante.

2°. Cette équation $\frac{dr}{au+uu} = \frac{dv}{aa}$ (*Lem. art.* 1. 2.) $= \frac{dr+du}{aa}$, donnant $aadr = audr + uudr + audu + uudu$, ou $aadr - audr - uudr = audu + uudu$; l'on aura pareillement ici $dr . du :: au+uu . aa-au-uu$. C'est-à-dire (*Lem. art.* 4.) que la résistance (dr) du milieu à chaque instant, sera ici à la difference ou excès (du) dont cette résistance est surpassée par la pesanteur du mobile, comme la somme ($au+uu$) faite du produit (au) d'une vitesse (a) dont la terminale $\left(\frac{a\sqrt{5}-a}{2}\right)$ est un $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, par la vitesse (u) restante à cet instant, & du quarré (uu) de cette vitesse restante, sera à la difference ($aa-au-uu$) dont le quarré (aa) de cette autre vitesse (a) surpassera cette somme ($au+uu$).

3°. L'équation $\frac{dt-du}{au+uu} = \frac{dt}{aa}$ donnant (*Solut.* 1.) $\frac{aadu}{aa-au-uu} = dt$ (*Lem. art.* 1.) $= dv$, l'on aura ici $dv . du :: aa . aa - au - uu$. C'est-à-dire (*Lem. art.* 4.) que la pesanteur du mobile sera ici à la difference ou à l'excès de force dont elle surpassera la résistance du milieu à chaque instant,

comme le quarré (aa) d'une vitesse (a) dont la terminale $\left(\frac{a\sqrt{5}-a}{2}\right)$ est un $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, sera à la difference ($aa - au - uu$) dont ce quarré (aa) surpassera la somme ($au + uu$) faite du produit de cette vitesse (a) par la restante (u), & du quarré (uu) de cette vitesse restante.

4°. On voit de tout cela & de l'art. 4. du Lemme, que si l'on prend p pour la pesanteur (dv) du mobile, f pour la difference (du) dont cette pesanteur surpassera chaque résistance instantanée (dr) du milieu supposé, & z (comme ci-dessus) pour cette résistance instantanée; le nomb. 1. donnera $z = \frac{au+uu}{aa} \times p$; le second, $z = \frac{au+uu}{aa-au-uu} \times f$; & le troisiéme, $f = \frac{aa-au-uu}{aa} \times p$. De sorte que de ces cinq choses: *la résistance du milieu en quelque instant que ce soit, la pesanteur constante du corps qu'elle y fait tomber malgré cette résistance, l'excès dont cette pesanteur surpasse cette résistance, la vitesse de ce corps en cet instant, & la plus grande vitesse qu'il puisse jamais acquerir en vertu de sa pesanteur malgré cette même résistance*: de ces cinq choses, dis-je, trois étant données à volonté, l'on aura toûjours les deux autres.

SCHOLIE.

FIG. IV. Pour ce qui est de la Courbe KEC des résistances instantanées de la fig. 4. l'hypothêse de $z = \frac{au+uu}{a}$, qui fait une des conditions de ce Problême-ci, rendant $uu + au = az$, ou $uu + au + \frac{1}{4}aa = az + \frac{1}{4}aa = \frac{4az+aa}{4}$, donnera $u = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{4az+aa}$, & $du = \frac{adz}{\sqrt{4az+aa}}$. De plus la même hypothêse en rendant $uu + au = az$, donne aussi $aa - au - uu = aa - az$. Donc $\frac{aadu}{aa-au-uu} = \frac{aadz}{a-z \times \sqrt{4az+aa}}$. Mais la Sol. 1. donne $dt = \frac{aadu}{aa-au-uu}$. Donc aussi $dt = \frac{aadz}{a-z \times \sqrt{4az+aa}}$ sera l'équation cherchée de la Courbe KEC des résistances instantanées, c'est-à-dire, dont les ordonnées TE (z) seront par tout proportionnelles à ces résistances instantanées

tanées (dr) à la fin de chaque tems *AT* (t). On voit de-là :

1°. Que $z=0$, réduiſant cette équation de la Courbe *KEC*, à $dt=\frac{aadz}{aa}=dz$, cette Courbe paſſera par *A* en faiſant un angle de 45. deg. avec ſon axe *ATC*. Ainſi (*Corol.* 2.) cette Courbe *KEC* & celle *HUC* des viteſſes reſtantes (u) doivent ſe toucher en *A*.

2°. Lorſque $z=a$, la précédente équation $dt=\frac{aadz}{a-z\times\sqrt{az+aa}}$ ſe réduiſant à $dt=\frac{aadz}{0}$, aura dt infinie par raport à dz. Ainſi ſa touchante au point de z (TE) $=a=$ *AB* ſera parallele à ſon axe *ATC* : cette touchante *BC* en ſera même une aſymptote, ce point d'attouchement ſe trouvant à une diſtance infinie de *AB* perpendiculaire en *A* ſur *ATC*.

3°. Cette valeur de $z=a$ ſubſtituée dans la ſeconde $aa-au-uu=aa-az$ des équations qu'on vient de trouver réſulter de l'hypotheſe $z=\frac{au+uu}{a}$ du Problême précedent, rendant $aa-au-uu=0$, ou $uu+au+\frac{1}{4}aa=\frac{5}{4}aa$, donnera auſſi u (TU) $=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}aa}=\frac{a\sqrt{5}-a}{2}=a\times\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$ à cette diſtance infinie de *AB* ; ce qui fait voir (ce que l'on a déja vû dans le Corol. 1.) que ſi l'on prend $AD=\frac{a\sqrt{5}-a}{2}$, la parallele *DC* à *ATC*, ſera de même une aſymptote de la Courbe *AUC* des viteſſes reſtantes (u) : auſſi cette valeur de u (*AD*) ſubſtituée dans l'équation $dt=\frac{aadu}{aa-au-uu}$ de cette Courbe, rend-elle dt infinie par raport à du ; puiſqu'elle rend $aa-au-uu=0$.

4°. D'où l'on voit encore (ainſi que dans les Corol. 1. 8. 20. 21. 23.) que les viteſſes reſtantes *TU* (u) augmenteront à l'infini ſans jamais arriver à l'égalité, c'eſt-à-dire, ſans jamais devenir uniformes, quoiqu'elles ne puiſſent jamais devenir plus grandes que la finie *AD* dans la Fig. 4. qui eſt *AL* dans les Fig. 5. 6. ou *EL* dans la Fig. 7. & qu'elles appro-

chent toûjours de sa valeur, ne pouvant l'égaler qu'après un tems *AT* (*t*) infini.

Voilà pour les mouvemens commencés à zero de vitesse, & primitivement accelerés en raison des tems écoulés, dans des milieux qui leur résisteroient en raison des sommes faites des vitesses actuelles acquises ou restantes à chaque instant, & des quarrés de ces mêmes vitesses. On verra dans un autre Memoire ce qui devroit arriver aussi dans ces milieux à des mouvemens primitivement accelerés de même en raison des tems écoulés, mais commencés par des vitesses quelconques, & non plus à zero de vitesse comme dans ce Memoire-ci: Par exemple, quel seroit le mouvement d'un corps de pesanteur constante, jetté verticalement de haut en bas d'une force ou vitesse quelconque dans un milieu résistant comme ci-dessus: c'est, dis je, ce qu'on verra dans un autre Memoire.

REPONSE A LA CRITIQUE
DE M. DE LA HIRE

Du 20. Mars 1709.

PREMIERE PARTIE.

PAR M. MERY.

1710
14. Juin.

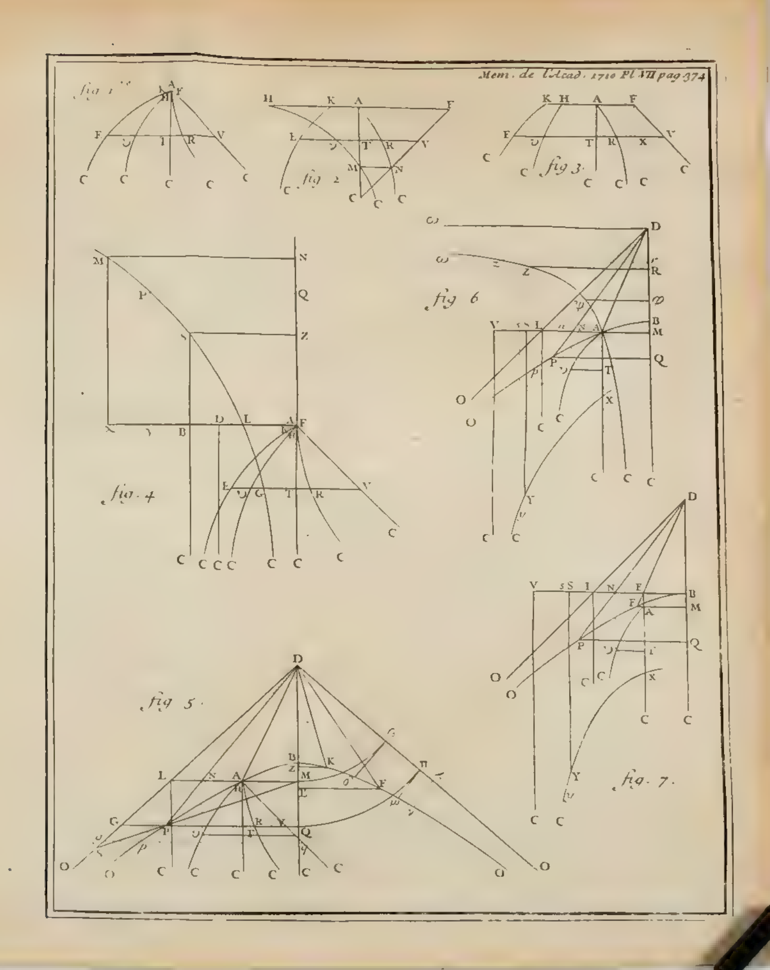
DAns mon Memoire du 12 Novembre 1704, j'ay avancé ces trois Propositions: 1e. Que le raccourcissement des fibres de l'Iris dépend de leur ressort, & leur allongement de l'influence des esprits amimaux. 2e. Que la Choroïde est la partie principale de l'œil, parceque c'est sur cette membrane que se peint l'image des objets. 3e. Qu'il entre beaucoup plus de lumiere dans les yeux, quand ils sont plongez dans l'eau, que lorsqu'ils sont dans l'air exposez à ses raïons.

fig. 2.

fig. 3.

fig. 6.

fig. 7.


fig. 1
fig. 2
fig. 3
fig. 4
fig. 5
fig. 6
fig. 7

M. de la Hire prétend au contraire premierement ; que le reſſort des fibres de l'Iris les allonge, ſans nous dire la cauſe qui les raccourcit. Secondement, que la Rétine eſt l'organe principal de la viſion, parceque c'eſt ſur cette tunique de l'œil que ſe forme la peinture des objets ; ce qu'il ſoûtient dans ſa Diſſertation des differens accidens de la vûë imprimée en 1694. Troiſiémement, qu'il n'entre pas plus de lumiere dans les yeux, quand ils ſont dans l'eau, que lorſqu'ils ſont dans l'air expoſez à ſes raïons.

Je vais répondre à préſent aux objections que ce ſçavant Académicien me fait ſur ma premiere Propoſition. Je donneray la défenſe de la ſeconde & de la troiſiéme en deux autres Memoires ſeparez.

Pour établir mon ſyſtême du raccourciſſement & de l'allongement des fibres de l'Iris, je me ſuis ſervi de ces trois obſervations. 1e. Pendant la goutte ſerene, qui eſt une obſtruction des nerfs optiques, les fibres de l'Iris tiennent toûjours la prunelle dilatée ; elles ſont donc alors raccourcies. 2e. Cet obſtacle levé, elles la reſſerrent, l'œil étant expoſé à la lumiere ; elles s'allongent donc dans ce moment. 3e. Les eſprits animaux étant éteints, la prunelle reſte ouverte entierement, ces fibres demeurent donc raccourcies après la mort. Depuis ce tems-là j'ai obſervé le même effet dans la ſyncope, parce que le mouvement de ces eſprits eſt alors arrêté. Reprennent-ils leurs cours : Les fibres de l'Iris s'allongent après cet accident.

De ces remarques certaines j'ay tiré cette concluſion ; que l'influence des eſprits animaux dans les fibres de l'Iris, qui reſſerrent la prunelle pendant la vie de l'animal, devoit être la cauſe de leur allongement, & que le reſſort devoit être celle de leur raccourciſſement, puiſqu'après la mort & dans la ſyncope, & pendant la goutte ſerene, ces fibres retiennent la prunelle dans ſa dilatation.

M. de la Hire entreprend de détruire ce ſyſtême ; mais

ſans penſer ſeulement à combattre aucune de mes obſervations, & de ſa propre autorité il décide; que le rétréciſſement de la prunelle eſt produit par le reſſort des fibres de l'Iris qui les allonge, & pour ſoûtenir ſon opinion il n'apporte aucune preuve.

Il prétend auſſi que la dilatation de la prunelle eſt cauſée par le raccourciſſement de ces mêmes fibres de l'Iris, ce qu'il ſuppoſe encore ſans nous faire connoître le principe de ce dernier effet; ce qu'on auroit peine à croire, ſans doute d'un Mechanicien auſſi habile que l'eſt M. de la Hire, ſi pour prouver ce que j'avance je ne rapportois mot à mot les termes de ſa Critique: les voici.

Voy. Mem. 1709. p.95 & ſuiv.

Il eſt facile de voir dans la diſſection de l'œil que la membrane Iris eſt un muſcle circulaire, qui peut ſe raccourcir en ſe retirant vers ſa circonference, ce qui augmente alors l'ouverture de la prunelle; mais en ſe relachant ſes parties ſe rapprochent du centre de la prunelle par une vertu élaſtique, & c'eſt ce qui diminuë la prunelle: toutes ſes fibres paroiſſent tendre de la circonference vers le centre où elles n'arrivent pas, car elles ſe terminent au petit cercle qui forme la prunelle.

Tâchons de nous faire jour dans ce ſyſtême malgré toute l'obſcurité où l'Auteur l'a laiſſé. Je poùrrois d'abord lui repréſenter que ce n'eſt pas par la diſſection de l'œil qu'on peut découvrir les differentes cauſes des mouvemens oppoſez de l'Iris, parceque dans un animal mort ſes fibres ſont en repos; ce n'eſt donc que dans le vivant dans lequel elles ſont en action qu'on peut les reconnoître ſans diſſequer l'œil: mais ce n'eſt pas à quoy je m'arrête. Je veux ſeulement faire remarquer que puiſqu'il eſt facile de voir que toutes les fibres du muſcle de l'Iris tendent de ſa circonference externe à ſa circonference interne, comme ſont les raions d'une rouë à ſon moyeu, il eſt évident que chaque fibre priſe ſéparément doit former un petit muſcle droit, qu'ainſi il n'a pas dû prendre l'Iris pour un muſcle circulaire, bien que cette membrane dans l'epaiſſeur de laquelle ces fibres ſont renfermées décrive un cercle.

Quand il ne voudroit pas convenir de cette verité, je pourrois la lui démontrer par ce qu'il nous dit, qu'*on pourroit bien imaginer un autre muſcle couché ſur le premier, dont les fibres ſeroient circulaires.* Le premier de ces deux muſcles doit donc être appellé droit, & le ſecond circulaire par rapport à la diſpoſition differente de leurs fibres. Ceci même eſt encore de peu de conſéquence : mais comme ni lui ni moi ne découvrons dans l'Iris que le muſcle droit, il importe bien plus d'examiner avec ſoin ſi l'explication qu'il nous donne de la dilatation & du rétréciſſement de la prunelle par le moyen, du muſcle droit qui paroît ſeul dans l'Iris, eſt vraie ou fauſſe : après quoi nous verrons ſi la ſuppoſition de ſon muſcle circulaire, que perſonne n'a jamais vû, eſt bien ou mal fondée.

Ce muſcle, dit M. de la Hire en parlant du muſcle droit, *aïant une épaiſſeur aſſez conſiderable vers la tête, ſi ſes fibres s'écartent l'une de l'autre ſuivant l'épaiſſeur du muſcle, où il doit y en avoir une grande quantité, leur extremité qui forme la prunelle doit ſe rapprocher de la tête, & par conſequent dilater la prunelle : mais lorſque l'action du muſcle ceſſera, le reſſort des mêmes fibres peut les remettre dans leur premier état, ou bien il pourroit y avoir dans ce muſcle des fibres à reſſort qui ne ſerviroient que pour cet effet.* Pourquoi nous cacher toûjours la cauſe de leur action ? C'eſt un myſtere que je developeray dans la ſuite de ce Memoire.

Je ne remarque dans toute cette explication que ſuppoſitions entaſſées les unes ſur les autres, ſans qu'aucune ſoit ſoûtenuë de la moindre preuve. Car premierement M. de la Hire ne nous démontre point que les fibres de ce muſcle puiſſent s'écarter les unes des autres quand elles ſe contractent : c'eſt auſſi ce qui eſt impoſſible, parcequ'il eſt certain qu'en ſe raccourciſſant elles doivent ſe gonfler, comme font celles de tous les autres muſcles, & par conſéquent ſe rapprocher de plus près les unes des autres quand elles ſe raccourciſſent, que lorſqu'elles ſe relâchent & deviennent plus menuës. Autrement il fau-

droit, toutes ces fibres étant situées à côté l'une de l'autre comme les rayons d'une rouë, que la circonference externe de l'Iris s'agrandît; ce qui ne peut lui arriver, parcequ'elle est jointe à la cornée, qui ne peut souffrir de dilatation par l'ouverture de la prunelle.

Secondement, si les fibres de ce muscle s'écartoient l'une de l'autre suivant leur direction sans se gonfler; ce qu'on peut inferer de ce que M. de la Hire n'admet point d'esprits animaux par le moïen desquels elles puissent se grossir, il est constant que la queuë de ces fibres ne pourroit pas s'approcher de leur tête par leur action, parce qu'étant placées à côté l'une de l'autre, il faudroit necessairement pour s'écarter qu'elles diminuassent de grosseur; ainsi en devenant plus menuës elles s'allongeroient pendant qu'elles s'éloigneroient l'une de l'autre, de sorte qu'au lieu de dilater la prunelle elles serviroient à la rétrécir par leur action.

Cependant cet habile Mechanicien prétend qu'elles l'élargissent par leur mouvement, ce qu'elles ne peuvent faire certainement sans se raccourcir & se gonfler. Il faut donc qu'il convienne que les fibres de ce muscle doivent s'approcher les unes des autres quand elles agissent, & qu'il reconnoisse que leur queuë ne peut pas s'approcher de leur tête sans se grossir.

Troisiememenr, puisque toutes les fibres de ce muscle qui partent d'une grande circonference viennent s'attacher à une petite, elles doivent (contre sa pensée) former dans celle-cy une plus grande épaisseur que dans l'autre : aussi voit-on qu'elles font au bord de la prunelle où elles se touchent, un tissu plus épais, parcequ'il est plus serré que dans la circonference externe de l'Iris, où ces fibres sont plus écartées les unes des autres. On n'a qu'à regarder l'Iris pour en être convaincu. La même chose paroît proche le col de la vessie, & des deux orifices de l'estomach, où les fibres musculeuses de ces parties se trouvant plus pressées les unes contre les autres, elles y forment un plan plus épais qu'au reste de

leur corps, parcequ'elles y ſont moins ſerrées.

Quatriémement, mais ce que je trouve de plus étrange dans cette explication que nous donne M. de la Hire des mouvemens oppoſez de l'Iris par un ſeul muſcle, c'eſt qu'il y ſuppoſe ſans preuve que les fibres de ce muſcle s'allongent par leur reſſort, & qu'elles ſe raccourciſſent, ſans nous marquer la cauſe de leur contraction. Car peut-il douter de bonne foy qu'au contraire leur reſſort doit les racourcir, & qu'elles ne peuvent s'allonger que par l'influence des eſprits animaux, après les preuves que j'en ai données dans mon Memoire, qui fait le ſujet de ſa Critique? Au cas qu'il n'y ait pas pris garde, j'eſpere l'en convaincre dans celui-cy, s'il veut bien ſe donner la peine de faire avec moi cette remarque à laquelle il auroit dû faire attention, parcequ'elle lui auroit fait éviter une diſpute d'où il n'y a guere d'apparence qu'il puiſſe ſortir avec avantage.

Quand les eſprits animaux ceſſent de couler dans les muſcles, on obſerve toûjours que tout auſſi-tôt leur reſſort les remet dans leur état naturel, qui eſt leur relaxation, diſpoſition dans laquelle ils ne ſont ni allongez ni racourcis au-delà de leur étenduë propre. Leur reſſort les maintient dans cette ſituation juſqu'au retour de ces eſprits, qui les racourciſſent en les remettant en contraction. Mais il faut bien obſerver que quand de deux muſcles antagoniſtes l'un ſe raccourcit, il allonge l'autre bien plus qu'il n'eſt dans la relaxation où l'a mis ſon reſſort, & le ſurmonte.

Ces changemens alternatifs de repos & de mouvement continuënt dans les muſcles pendant la vie de l'animal; après la mort leur reſſort les retient tous dans leur état naturel juſqu'à ce que la pourriture ſe ſoit emparé de leur ſubſtance; ce que je vais prouver par deux obſervations: voici la premiere.

L'on trouve toûjours à un chat mort les dernieres phalanges des doigts relevées entierement, quoique les muſcles qui ſervent à les abaiſſer ſoient beaucoup plus

forts que ceux qui servent à les élever. Deux causes contribuënt à cette effet, l'une le permet, l'autre le produit. Celle qui le permet est une relaxation égale dans tous ces muscles, qui fait qu'ils ne peuvent plus aprés l'extinction des esprits animaux, agir les uns contre les autres. Celle qui produit cet effet immédiatement, consiste dans des fibres à ressort uniquement destinées à relever ces dernieres phalanges.

Ces fibres partent des parties laterales des secondes phalanges des doigts, & viennent s'attacher à la partie superieure des dernieres : elles peuvent être aussi facilement allongées après la mort que pendant la vie, pour peu qu'on les force en abbaissant les dernieres phalanges ; mais si-tôt qu'on cessera de leur faire violence, ces fibres à ressort les releveront, en se raccourcissant d'elles-mêmes par leur vertu élastique, parce qu'alors tous les muscles antagonistes de ces phalanges sont également relâchez.

J'ai fait la seconde observation sur des Moules d'étang. Elles ont au dedans de leurs coquilles deux muscles attachez à l'une & à l'autre proche leur extremitez. Ces muscles servent à fermer leurs coquilles : en dehors elles ont sur leur dos un ressort qui sert à les ouvrir ; ce ressort cede à la contraction de ces muscles, il l'emporte sur eux quand ils sont relâchez.

Lorsque les esprits animaux coulent dans ces muscles, ils se raccourcissent & ferment alors les coquilles ; mais quand ces esprits ne s'y portent plus, ces muscles se relâchent, & alors le ressort des coquilles les ouvre. Delà vient qu'après la mort des Moules, ces esprits étant éteints, leurs coquilles restent toûjours entr'ouvertes. Ces remarques prouvent donc évidemment, & que les parties conservent encore aprés la mort de l'animal leur vertu élastique, & que c'est leur ressort qni retablit pendant la vie les muscles dans leur relaxation, si-tôt que les esprits animaux ne s'y portent plus.

Ainsi s'il étoit vrai que les fibres du muscle droit de l'Iris s'allongeassent par leur ressort, ou qu'il y eût dans ce

ce muſcle des fibres à reſſort qui ſerviſſent à rétrécir la prunelle, comme le prétend M. de la Hire, il eſt certain que ces fibres elles-mêmes, ou ces reſſorts devroient tenir la prunelle reſſerrée pendant la ſyncope, la goutte ſerene, & après la mort. Il eſt viſible au contraire, qu'ils la tiennent dilatée. Donc le racourciſſement des fibres de ce muſcle dépend abſolument de leur vertu élaſtique, & leur allongement de l'influence des eſprits animaux; d'où j'ai conclu dans mon Memoire du 12 Novembre 1704, comme je fais encore dans celui-ci, que ces eſprits produiſent dans les fibres de l'Iris le même effet qu'ils font dans les corps caverneux de la verge, qu'ils allongent quand ils s'y portent, & que le reſſort de ces mêmes fibres les raccourcit, comme fait le reſſort des fibres de la verge les corps caverneux, lorſque ces eſprits ceſſent d'y couler. Toutes mes Obſervations ſont conſtamment vraïes. Donc la premiere explication que nous donne M. de la Hire, des mouvemens de la prunelle par un ſeul muſcle, eſt certainement fauſſe.

J'ai peine à croire qu'il puiſſe rien répondre de plauſible à cet argument, qui me paroît une démonſtration, qui détruit entierement ſon ſiſtême de l'allongement des fibres muſculeuſes de l'Iris par leur reſſort, & de leur racourciſſement par l'influence des eſprits animaux, qu'il reconnoît pour cauſe de leur mouvement dans ſa Diſſertation des accidens de la vûë; mais dont il ſemble nier l'exiſtence dans ſa Critique, puiſqu'il nous y explique la viſion par le ſeul ébranlement des fibres de la rétine, ſans rien dire de ces eſprits, ce que je vais prouver par ſes propres paroles tirées de ſes deux Memoires.

Lorſqu'on fait, dit M. de la Hire dans ſa Diſſertation, *quelqu'effort ou en éternuant avec violence, ou en ſe mouchant fortement, on voit des étincelles de feu qui paroiſſent courir d'un côté & d'autre ſur les objets. On ne peut pas chercher la cauſe de ce phénomene en d'autre endroit que dans la rétine. Cet accident vient de ce que le cours des eſprits étant interrompû dans les nerfs optiques, & coulant enſuite par repriſes*

Page 265.

& secousses dans la rétine, nous fait paroître ces étincelles.

Pouvoit-il s'expliquer d'une maniere plus intelligible pour nous faire comprendre qu'il attribuoit alors la vision à la modification des esprits animaux. Après cela, qui ne sera surpris de lui entendre dire dans sa Critique : *Je ne croyois pas après toutes les raisons que j'ai rapportées dans le Memoire dont j'ai parlé d'abord, qu'il pût rester aucun lieu de douter quelle étoit la partie qui doit être le principal organe de la vision ; cependant un des plus célébres Anatomistes de cette Compagnie ayant examiné le fait, en a rendu raison d'une maniere fort sçavante par le moyen des esprits animaux dans l'œil du chat, & prend parti pour la choroïde contre la rétine ; cependant la choroïde ne peut être considerée que comme un organe moyen qui communique à la rétine l'ébranlement ou le mouvement qu'elle reçoit de la lumiere avec ses differentes modifications. En effet peut-on chercher le principal organe d'un sens autre part que dans les nerfs qui ont communication avec le cerveau, & qui peuvent faire connoître à l'ame sous differentes apparences, ce qui se passe hors du corps par le moyen de leur ebranlement.* D'où il conclut, que toute la difference qu'il y a entre son systême de la vûë & le mien, ne consiste que dans nos explications differentes ; il ne reconnoît donc plus à present d'esprits animaux : quelle contradiction !

Ce Memoire est sa Dissertation même des accidens de la vûë.

Or puisque de son aveu même, j'explique la vision par la modification de ces esprits, & lui par l'ébranlement des fibres de la rétine, prévenu qu'il est aujourd'hui de l'opinion de quelques Philosophes modernes, qui nient l'existence des esprits animaux, & ne considerent les nerfs que comme des cordes tenduës, dont le mouvement peut se communiquer jusqu'au cerveau, quand ils sont ébranlez, il est évident qu'il a changé d'opinion : aussi ne voit-on aucun endroit dans toute sa Critique, où il se soit servi des esprits animaux pour nous expliquer l'action des fibres de l'Iris, il ne lui reste donc plus pour nous rendre raison de leur mouvement, que le ressort, qui ne sert naturellement qu'à les mettre en repos.

Au reste je ne puis m'empêcher de faire connoître, que M. de la Hire ayant formé le dessein de détruire mon systême, devoit s'attacher à mes observations qui lui servent de fondement, & faire voir qu'elles sont fausses, ou du moins prouver, que les conséquences que j'en tire ne sont pas justes. Or comme il n'a entrepris ni l'un ni l'autre, ne donne-t-il pas lieu de penser, qu'ayant bien senti la force de mes raisons, il a mieux aimé, pour ne pas paroître ceder à leur évidence, les éluder par une supposition imaginaire, que d'y répondre? puisque peu satisfait lui-même de sa premiere explication des mouvemens de l'Iris par un seul muscle, il a été obligé de nous en donner une seconde, où il admet un muscle circulaire pour servir d'antagoniste au muscle droit de cette membrane.

Ne pourroit-on pas aussi attribuer cette varieté au plaisir de combattre ce que j'ai voulu établir? Mais quel sera le succès de son entreprise? Car je vais démontrer encore, que sa seconde explication qu'il nous donne des mouvemens opposez de la prunelle par le moyen de ses deux muscles antagonistes, n'est pas plus vraïe que la premiere qu'il nous a donnée par un seul.

Enfin on pourroit bien imaginer, dit M. de la Hire, *un autre muscle de peu d'épaisseur, couché sur le premier, dont les fibres seroient circulaires, & qui lui serviroit d'antagoniste. Car les fibres circulaires de ce muscle venant à s'écarter l'une de l'autre suivant leur plan, fermeroient la prunelle, l'action de l'autre muscle ayant cessé; & c'est ce sentiment qui me paroît le plus naturel, & que je suis plus volontiers.*

Qu'il est à craindre pour cet ingenieux Méchanicien, que ce second sentiment ne paroisse à tout autre qu'à lui, contre nature, & tout aussi contraire à la dilatation & au retrécissement de la prunelle que le premier, pour peu qu'on fasse d'attention aux observations suivantes, qui en vont faire connoître la fausseté.

Pour défendre son second sentiment supposé sans preuves, M. de la Hire, soûtient, qu'*entre deux muscles qui sont*

antagonistes l'un de l'autre, le plus fort emportera toûjours, lorsqu'il n'y aura aucune détermination particuliere ni pour l'un ni pour l'autre; *d'où il suit*, dit-il, *que si celui qui dilate la prunelle est le plus fort, comme il paroît, on jugera que l'état naturel de la prunelle est d'être dilatée.*

Avant que d'examiner, si par le moyen de ces deux muscles antagonistes M. de la Hire nous explique plus solidement les mouvemens contraires de la prunelle, qu'il n'a fait par un seul, montrons-lui auparavant, que l'expérience détruit visiblement sa Proposition, & que la conséquence qu'il en tire, est certainement fausse.

En effet l'expérience nous enseigne, que de deux muscles antagonistes, le plus fort ne peut jamais l'emporter sur le plus foible, lorsqu'il n'y a aucune détermination particuliere ni pour l'un ni pour l'autre; parce qu'ils sont alors sans action, & également relâchez par leur ressort, qui ne fait que les mettre en repos sans les racourcir, ni les allonger au-delà de leur étenduë naturelle; delà vient que les membres demeurent entre la flexion & l'extension parfaites; situation que les Anatomistes appellent par cette raison, figure moïenne, parce qu'en cet état, les muscles ne sont ni étendus, ni racourcis, comme ils sont lorsqu'ils agissent alternativement.

Quand donc il arrive que de deux muscles antagonistes, l'un l'emporte sur l'autre, ce ne peut être que parce que les esprits animaux coulant dans un extenseur, ils le racourcissent en le gonflant, & obligent le fléchisseur dans lequel ils n'entrent pas, à s'allonger en se retrecissant; parce que la puissance de ces esprits l'emporte sur la force du ressort de ces deux muscles, qui se trouve trop foible pour résister à leur impétuosité. Ainsi lorsqu'il n'y a aucune détermination particuliere ni pour l'un ni pour l'autre des deux muscles antagonistes de l'iris, il est constant que le plus fort ne peut point l'emporter sur le plus foible par son ressort; donc la prunelle doit tenir dans son état naturel, le milieu entre son rétrecissement & sa dilatation. D'où je conclus que la Proposition de

M. de la Hire, & la conséquence qu'il en tire, sont très certainement fausses.

Pour démontrer encore cette verité, & la faire entendre à ceux mêmes qui n'ont aucune connoissance d'anatomie, je vais me servir d'un exemple qui peut être conçû de tout le monde. Qu'on prenne deux cordes d'égale longueur; mais dont la grosseur de l'une soit double de celle de l'autre. Si on les attache dans une situation opposée aux extrémitez d'une baguette droite, mais flexible, sans les forcer, ni les étendre l'une plus que l'autre, l'on verra que la plus grosse ne pourra jamais l'emporter sur la plus menuë, tant qu'il n'y aura point de détermination particuliere ni pour l'une ni pour l'autre; mais que la plus petite l'emportera toûjours sur la plus grosse, quand il arrivera à la plus menuë une détermination particuliere. La preuve en est facile à faire.

Qu'on imbibe d'eau la plus foible, l'on verra que cette corde moüillée venant à s'enfler, s'accourcira & fera plier la baguette de son côté, qu'elle emportera sur la plus forte, & la contraindra de s'allonger. Ensuite l'on remarquera que l'eau renfermée dans la plus menuë, se dissipant avec le tems, ces deux cordes reprendront leur premiere longueur, & redeviendront égales par leur vertu élastique, & que la baguette se redressera, sans que la plus grosse corde la fasse plier de son côté, ni l'emporte sur la plus menuë. D'où il suit évidemment, que des deux muscles antagonistes de l'Iris supposez par M. de la Hire, le plus fort ne peut pas l'emporter sur le plus foible par son ressort, tant qu'il n'y a point de détermination particuliere ni pour l'un ni pour l'autre; parce que leur ressort ne peut les remettre l'un & l'autre, que dans leur étenduë propre. Donc la prunelle ne peut pas être dilatée dans son état naturel; c'est ce que je vais lui démontrer par son propre raisonnement. Car s'il étoit vrai que les fibres musculeuses de l'iris s'allongeassent par leur ressort, comme il le croit, il est certain, le muscle droit étant de son aveu même plus fort que son muscle circulaire,

que la prunelle devroit être resserrée dans son état naturel ; puisqu'il soûtient qu'entre deux muscles, qui sont antagonistes l'un de l'autre, le plus fort l'emportera toûjours sur le plus foible par son ressort, lorsqu'il n'y aura aucune détermination particuliere ni pour l'un ni pour l'autre.

Qui auroit pû penser qu'un si habile homme qui a donné au Public un excellent Traité de Mechanique, pût tomber dans un paralogisme si évident, si l'on ne sçavoit que les plus grands esprits ne sont pas incapables d'inadvertance ?

Examinons maintenant, si par le moyen de ces deux muscles antagonistes, M. de la Hire nous explique plus clairement les differens mouvemens de la prunelle qu'il n'a fait par un seul.

Puisque ni dans l'une ni dans l'autre de ses explications il n'établit aucune cause du racourcissement des fibres musculeuses de l'Iris, l'on peut croire, sans crainte de se tromper, qu'il ne reconnoît point les esprits animaux pour principe de leur action, ce que j'ai prouvé par les deux passages de sa critique que j'ai rapportez. Il n'a donc donné à l'Iris un muscle circulaire pour servir d'antagoniste à son muscle droit, qu'afin de nous expliquer la dilatation & le retrecissement de la prunelle par le moyen de ces deux prétendus muscles antagonistes, agissant l'un après l'autre par leur seul ressort, ce qu'il n'a pas pû faire par le seul muscle droit. Mais faisons-lui voir par l'effet naturel du ressort même, que la prunelle ne pourroit jamais se dilater dans cette hypothese, parce qu'outre qu'il est certain que l'effet propre du ressort est de retenir tous les corps en repos, il n'y a point de Mechanicien qui ne sçache que de deux ressorts inégaux en force, agissant l'un contre l'autre, le plus fort l'emporte toûjours sur le plus foible. Donc puisqu'il reconnoît que le muscle droit de l'Iris est plus fort que son muscle circulaire, il doit convenir que le ressort du muscle droit doit en l'allongeant tenir toûjours la pru-

nelle fermée, elle ne pourra donc jamais s'ouvrir dans ce ſyſtême; ainſi il lui étoit inutile d'imaginer un muſcle circulaire pour la fermer, puiſque le reſſort de celui-ci eſt plus foible que celui de l'autre.

Et quand bien même il ſuppoſeroit ces deux muſcles de l'Iris égaux en force, il ne pourroit pas encore par cette ſuppoſition nous expliquer ni la dilatation, ni le retreciſſement de la prunelle par leur vertu élaſtique; car il eſt conſtant que quand deux reſſorts parfaitement égaux en force agiſſent l'un contre l'autre, ils reſtent ſans effet, parcequ'ils ne peuvent pas ſe ſurmonter l'un l'autre: d'où il ſuit que la prunelle reſteroit toûjours ſans mouvement, ſi les reſſorts des muſcles antagoniſtes de l'Iris étoient égaux en force.

Bien plus j'oſe ſoûtenir que ſi malgré l'impoſſibilité, le reſſort des fibres du muſcle droit de l'Iris, que M. de la Hire dit être le plus fort, pouvoit ceder à celui de ſon muſcle circulaire, qui lui paroît le plus foible; j'oſe, dis-je, ſoûtenir qu'en ce cas-là même, ſon muſcle circulaire qu'il deſtine au retreciſſement de la prunelle, devroit tout au contraire ſervir à ſa dilatation: en voici la preuve.

Si les fibres de l'Iris s'allongent par leur reſſort, comme le prétend M. de la Hire, il doit convenir qu'il doit faire le même effet dans toutes; d'où il ſuit évidemment que les fibres circulaires de l'Iris s'allongeant par leur vertu élaſtique, formeront de plus grands cercles qu'elles ne font quand les fibres droites de l'Iris tiennent la prunelle reſſerrée par leur reſſort, parce qu'alors ces fibres circulaires ſont plus proche de ſon centre. Donc ces fibres circulaires en décrivant de plus grands cercles quand elles s'en éloignent, doivent ſervir à ouvrir la prunelle & non pas à la fermer, comme il ſe l'imagine; ainſi ces deux muſcles de l'Iris ſeroient antagoniſtes.

Mais s'il prétend que les fibres circulaires de l'Iris reſſerrent la prunelle pour leur vertu élaſtique, & que les fibres droites s'allongent par leur reſſort, ce qu'il ſoû-

tient positivement ; il est clair que le ressort doit produire dans les deux muscles de l'Iris deux effets tout contraires , qui se termineront neanmoins à une seule & même fin ; car en même tems que les fibres droites seront allongées par leur ressort, les fibres circulaires seront raccourcies par le leur : donc en ce cas-ci ces deux muscles prétendus antagonistes seront congeneres, parceque l'un & l'autre serviront au seul retrecissement de la prunelle : donc son ouverture ne pourra point se dilater. Cependant il est visible que la prunelle s'ouvre si-tôt que l'œil est exposé à l'ombre ? Que M. de la Hire nous fasse donc connoître la cause qui surmonte la résistance du ressort des deux muscles de l'Iris joints ensemble pour fermer la prunelle. Car ce que je trouve de plus surprenant dans les deux explications qu'il nous a données des mouvemens contraires ou opposez de cette membrane, c'est qu'après avoir avancé que les fibres musculeuses de l'Iris sont allongées par leur ressort, il ne s'est nullement expliqué sur la cause de leur raccourcissement. Il faut neanmoins de toute necessité qu'il y en ait une de cet effet, parce qu'autrement les muscles de l'Iris n'auroient jamais d'action, leur ressort ne pouvant servir qu'à les maintenir dans leur relaxation, qui est leur état naturel dans lequel il les retiendroit toûjours , si une cause plus puissante que lui ne les retiroit de leur repos pour les remettre en mouvement. Or M. de la Hire n'ayant point établi de cause de leur raccourcissement dans toute sa Critique, on peut dire que la seconde explication qu'il nous a donnée des mouvemens opposez de l'Iris par le moyen de ces deux muscles antagonistes, agissant par leur ressort, n'est pas moins fausse que la premiere qu'il nous a d'abord proposée par un seul. C'est ce que la suite de ce discours va faire connoître encore plus évidemment.

On me demandera peut-être pourquoi dans sa Critique il ne nous dit point quelle est la cause du raccourcissement des fibres musculeuses de l'Iris, qu'il ne peut pas ignorer. S'il m'est permis de hazarder sur son silence une

une conjecture, voici autant que j'en puis juger la raison la plus vrai-semblable qu'on en puisse rendre : c'est que la connoissance qu'il nous auroit donnée de la cause du raccourcissement des fibres de l'Iris, suivant son systême de leur allongement par leur ressort, auroit rompu les mesures qu'il avoit prises pour détruire mon opinion, & auroit fait voir trop clairement le peu de fondement de sa critique. Car ayant établi pour principe de l'allongement des fibres de l'Iris leur ressort, & ne pouvant pas par ce ressort même nous expliquer leur raccourcissement sans tomber dans une absurdité trop évidente, il auroit fallu pour l'éviter qu'il eût eu necessairement recours aux esprits animaux pour rendre raison de la contraction des fibres de l'Iris. C'est ce qu'il n'a eu garde de faire, parcequ'il sçait bien que ces esprits ne peuvent pas être la cause de leur raccourcissement. C'est ce que je vais prouver par une conséquence tirée directement de deux passages de sa Dissertation sur les differens accidens de la vûë, dans lesquels il reconnoît que les nerfs sont les tuyaux qui portent les esprits aux muscles pour les mettre en action, en les retirant du repos où leur ressort les réduit.

Premier passage. *Il faut*, dit M. de la Hire, *que chacun de ces fibres du nerf optique soit un tuyau qui contienne des esprits, quoique sa grosseur ne soit que de la soixante-quatriéme partie de celle d'un filet de ver à soye.* Pag. 255.

Second passage. *Quand on a*, ajoûte-t'il, *tenu long tems le bras ou la jambe dans une posture contrainte, le pied & la main deviennent engourdis; & si ces parties demeurent long-tems dans une même disposition, on sent dans cet engourdissement des élancemens, comme si on piquoit la chair en differens endroits. Il est facile de juger que ces accidens viennent de ce que le cours des esprits étant interrompu dans les nerfs, & coulant ensuite par reprises & secousses, nous fait sentir dans les chairs ces piqueures violentes.* Pag. 265.

Or puisque M. de la Hire reconnoît que l'interruption du cours des esprits animaux dans les nerfs est la cause

de l'engourdiſſement du pied & de la main qui les prive de mouvement, il faut qu'il convienne que l'action de leurs muſcles dépend de l'influence de ces eſprits, puiſque ſi-tôt qu'ils viennent à recouler par les nerfs dans ces muſcles, ils rentrent en mouvement comme ils faiſoient avant l'interception des eſprits animaux. Donc puiſqu'après l'extinction de ces eſprits les fibres du muſcle droit de l'Iris, qui eſt le ſeul muſcle qu'on puiſſe découvrir dans cette membrane, s'accourciſſent & tiennent la prunelle tout à fait dilatée après la mort, il eſt viſible que leur raccourciſſement dépend de leur vertu élaſtique : leur allongement ne ſçauroit donc dépendre pendant la vie d'autre cauſe que de l'influence des eſprits animaux, ce qu'il n'a pas pû ignorer; car ſuppoſé qu'il eût oublié ces deux paſſages de ſa Diſſertation ſi propres à détruire ſon opinion & à ſoûtenir la mienne, il ſçait bien que mon hypotheſe eſt fondée ſur ces deux obſervations qu'il n'a pû ne pas voir dans mon Memoire, puiſqu'il fait le ſujet de ſa critique : ma conjecture eſt donc fondée ſur une raiſon qui paroît évidente. Si M. de la Hire ne veut pas ſe rendre à cette démonſtration, tâchons de le convaincre par cet autre raiſonnement ſoûtenu de ces deux principes tirez de ſa Diſſertation & de ſa Critique.

Suppoſons avec lui que les deux muſcles antagoniſtes de l'Iris exiſtent, que leurs fibres s'allongent par leur reſſort alternativement, & que tour à tour elles ſe raccourciſſent par l'influence des eſprits animaux, & examinons quels effets pourront produire ces deux muſcles. Pour peu qu'on y faſſe d'attention, il n'y a point de Phyſicien qui ne reconnoiſſe qu'il ſuit évidemment de ces deux ſuppoſitions, que les fibres droites de l'Iris doivent s'allonger par leur reſſort, pendant que ſes fibres circulaires ſeront raccourcies par les eſprits animaux; qu'ainſi les unes & les autres ſerviront en même tems par ces moyens tous differens à reſſerrer la prunelle.

Il en ſera de même pour la dilater; car pendant que

ces fibres droites de l'Iris ſe raccourciront par le moyen des eſprits animaux pour l'élargir, les fibres circulaires s'allongeront par leur reſſort & produiront le même effet, ce qui eſt certainement faux; car il eſt conſtant que la nature ne ſe ſert que d'un ſeul moyen pour chaque action de l'Iris. En voici une preuve convaincante.

Les eſprits animaux s'éteignent en mourant, & la prunelle ſe dilate; ainſi il eſt clair qu'il n'y a que le reſſort ſeul qui en raccourciſſant les fibres droites de l'Iris, puiſſe ſervir à la dilatation de la prunelle: elle ſe reſſerre au contraire pendant la vie, les yeux étant expoſez à la lumiere. Il eſt donc viſible auſſi qu'il n'y a que les ſeuls eſprits animaux qui puiſſent en allongeant ces mêmes fibres être la cauſe de ſon rétréciſſement; donc la nature ne ſe ſert que d'un ſeul moyen pour chacun de ces effets. D'où je conclus enfin que la ſeconde explication que nous donne M. de la Hire des mouvemens oppoſez de l'Iris par ſes deux muſcles antagoniſtes allongez par leur reſſort & raccourcis par les eſprits animaux, eſt tout auſſi peu vraie que la premiere qu'il nous a donnée d'abord par un ſeul muſcle, quoiqu'il nous diſe dans ſa Critique: *C'eſt ce ſentiment qui me paroît le plus naturel, & que je ſuis plus volontiers.*



REMARQUES

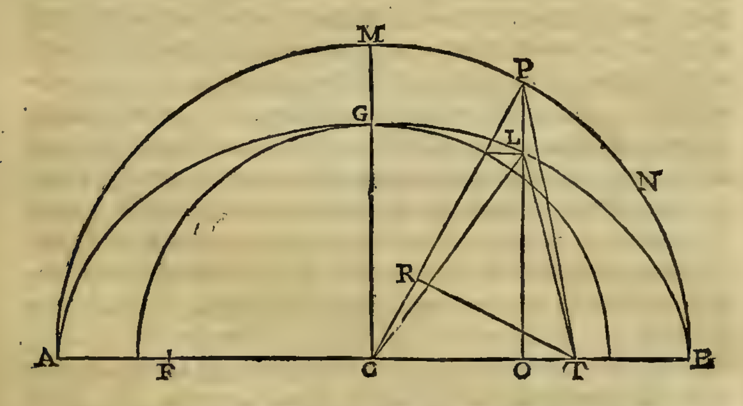
Sur le mouvement des Planetes, & principalement sur celui de la Lune.

PAR M. DE LA HIRE.

1710.
18. Juin.

LA méthode dont Kepler s'eſt ſervi pour déterminer l'Equation du centre des Planetes, comme nous l'appellons, m'a toûjours paru la plus vrai-ſemblable par rapport aux mouvemens des corps dans un liquide. Car il eſt aſſez naturel que ſi un liquide ſe meut autour d'un point fixe, lequel ne ſoit pas au centre de ſon mouvement, ou au centre de l'eſpace dans lequel il eſt renfermé, il doit ſe mouvoir plus vîte dans l'endroit le plus étroit que dans celui qui eſt plus large. C'eſt auſſi ce que nous obſervons dans les Planetes qui vont plus vîte dans leur Perihelie & Perigée que dans leur Aphelie & Apogée. Mais de plus on peut croire par la même raiſon que la matiere liquide parcourt des eſpaces égaux en des tems égaux autour de ce point excentrique à ſon mouvement, puiſqu'elle y eſt emportée d'un mouvement continu & uniforme. C'eſt ſur ce principe que Kepler détermine les mouvemens des Planetes dans des Ellipſes, en conſiderant que le point fixe autour duquel ſe meut le liquide eſt un des foyers de cette Ellipſe, & que les Planetes étant en équilibre dans ce liquide ſont entraînées du même mouvement que le liquide. Il avoit déterminé que la figure de l'orbite des Planetes étoit Elliptique, en faiſant une analyſe exacte des mouvemens de Mars ſur les obſervations de Tycho, comme il le rapporte fort au long dans le Livre qu'il a donné des mouvemens de cette Planete. Je ne conſidere ici le mouvement du liquide que dans un plan qui paſſe par ſon centre, ce qui ſuffit pour mon ſujet.

Si nous ſuppoſons donc qu'en des tems égaux la matiere du liquide parcoure des ſuperficies Elliptiques égales autour de ſon foyer, ces eſpaces égaux meſureront les moyens mouvemens des Planetes; & en commençant ce mouvement au grand axe de l'Ellipſe que Kepler appelle la ligne des *Apſides*, on aura les angles que cet axe fera avec les lignes menées du foyer à la Planete dans ſes differentes poſitions ſur ſon orbite Elliptique, qui meſureront les vrais mouvemens de cette Planete par rapport aux moyens qui ſeront meſurez par les ſuperficies Elliptiques compriſes entre cet axe & les mêmes lignes menées du foyer à la Planete; & enfin la difference entre les angles du vrai mouvement, & les angles qui auront entr'eux même raiſon que les eſpaces Elliptiques par rapport à la demi-Ellipſe, eſt ce que nous appellons *l'Equation du centre* pour les angles du moyen mouvement. Kepler la compoſoit de deux équations ſeparées, l'une Phyſique & l'autre Optique. Voici de quelle maniere on en peut faire facilement le calcul dans cette hypotheſe.



Soit la ligne *ACB* le grand axe de l'Ellipſe *AGLB* & ſon petit axe *CG*, & l'un des foyers ſoit le point *T*. Soit la Planete en *L* ſur ſon orbite Elliptique. Si du centre *C* de l'Ellipſe & pour rayon *CB* on décrit le cercle *APB*,

& que par le point *L* on méne l'ordonnée *PLO* perpendiculaire à l'axe *AB*; & ayant tiré le rayon *CP*, on aura par les proprietés de l'Ellipſe *PO* | *LO* || *CB* ou *CM* | *CG*. Mais auſſi l'on ſçait que le ſegment circulaire *OPB* eſt au ſegment Elliptique *OLB* || *PO* | *LO* ou || *CB* | *CG*; c'eſt pourquoi ſi l'on méne auſſi *PT*, le triangle *TPO* étant au triangle *TLO* || *PO* | *LO*; il s'enſuit que le triligne circulaire *TPB* ſera | triligne Elliptique *TLB* || *PO* | *LO* || *CB* | *CG*.

Enfin il s'enſuit auſſi que le triangle *OCPT* | triangle *CLT* || *PO* | *LO*; & par conſéquent il y aura même raiſon du ſecteur de cercle *CPB* au ſecteur d'Ellipſe *CLB* || *CB* | *CG* ou || *PO* | *LO*, ou enfin || tout le demi-cercle *BMA* | la demi-Ellipſe *BGA*, & par conſéquent auſſi le triligne circulaire *BTP* ſera | demi cercle *BMA* || le triligne Elliptique *TLB* | demi-Ellipſe *BGA*; on pourra donc ſe ſervir du cercle au lieu de l'Ellipſe pour déterminer les moyens mouvemens.

Pour faire donc ce calcul & pour déterminer un triligne *BPT* par rapport à tout le demi-cercle *BMA*, je ſuppoſe d'abord toute la circonference *BMA* diviſée en ſecondes ou en minutes, mais poſons ici en minutes pour cet exemple, laquelle en contiendra 10800′, & cherchant la valeur du rayon *CA* dans ces minutes par le rapport de la circonference au rayon qui eſt 355 à 113, on trouvera le rayon de $3437' \frac{1}{4}$; & poſant un arc *BP* à volonté comme de 45° ou de 2700′, il eſt certain que le produit de 2700′ par les minutes de la moitié du rayon donneront la valeur du ſecteur *BPC* en quarrés de ces minutes; ce qui n'eſt pas neceſſaire de trouver, comme on va voir.

Poſons maintenant l'excentricité *CT* qui eſt la diſtance entre le centre *C* de l'Ellipſe & ſon foyer *T* de $218 \frac{3}{10}$ de ces mêmes minutes comme nous le trouverons dans la ſuite pour la Lune; ſi du point *T* nous abaiſſons la perpendiculaire *TR* ſur *CP*, dans le triangle rectangle *CTR* dont on connoît l'angle *TCR* de 45° comme on l'a don-

né, & le côté *CT*, nous trouverons *TR* en valeur de ces mêmes minutes de 134′$\frac{3}{10}$, lesquelles étant aussi multipliées par la moitié du rayon, donneront la superficie du triangle *CTP* qu'il faut ôter du secteur *BCP*; mais comme ces deux superficies ont une hauteur commune qui est la moitié du rayon, il suffira d'ôter des minutes de l'arc *BP* le nombre des minutes de *TR*, pour avoir un arc comme *BN* dont le secteur *BCN* sera égal au triligne *BTP*; & par consequent aussi l'arc *BN* aura même raison à la circonference *BMA* que le triligne *BTP* a au demi-cercle *BMA*, ou que le triligne *BTL* à la demi-Ellipse *BGA*; cet arc *BN* détermine donc le moyen mouvement l'astre étant en *L* & l'angle *BTL* sera le vrai mouvement ou l'apparent qui lui répond.

Mais il sera facile d'avoir l'angle *BTL*, car on a *CB* | *CG* || *PO* qui est le sinus de l'arc *BP* qu'on a pris d'abord | *LO*: on a aussi *CT* qui est l'excentricité de la Planete, laquelle doit être connuë dans les parties du Rayon & *CO* est le sinus de complement de l'arc *BP*; donc dans le triangle *TOL* rectangle en *O* on trouvera l'angle *OTL* qui peut être l'angle cherché du vrai mouvement ou bien son suplément *BTL* comme dans cette figure.

Appliquons maintenant cette forme de calcul à la Lune. Nous avons par les Observations la distance de la Terre à la Lune dans son Apogée, comme je l'ai marquée dans ma Table, 18 de 6356 centiémes du demi-diametre de la Terre, & dans son Perigée de 5597 des mêmes parties; & par conséquent le grand axe *AB* de l'Ellipse sera de 11953 de ces parties: mais la distance *FT* des foyers doit être de 759 qui est la difference de ces deux nombres, & dont la moitié 379 $\frac{1}{2}$ est l'excentricité *CT*; & le demi-grand axe de l'Ellipse qui est *CB* sera de 5976 $\frac{1}{2}$.

Ensuite puisque *GT* doit être égale à *CB*, on trouvera *CG* de 5964 $\frac{1}{2}$ de ces mêmes parties centiémes dans la résolution du triangle rectangle *CTG*, dont on connoît les deux côtés *CT*, *GT* avec l'angle droit. On trouve aussi par la même résolution l'angle *CGT* de 3° 38′ 27″.

On aura donc le rapport de *CB* ou *CM* à *CG* comme $5976\frac{1}{2}$, à $5964\frac{1}{2}$ lequel doit ſervir pour tous les points de cette Ellipſe. Mais il faut encore connoître *CT* en minutes de la circonference du cercle qui doit auſſi ſervir pour tous les points de l'Ellipſe.

On a déja le rapport de *CB* à *CT* comme $5976\frac{1}{2}$ à $379\frac{1}{2}$; mais on à trouvé *CB* en minutes de $3437'\frac{3}{4}$, on trouvera donc *CT* de $218'\frac{3}{10}$, comme on l'a poſé ci-devant.

C'eſt ſur ces poſitions que nous avons trouvé *TR* pour le point *P* de $134'\frac{3}{10}$, leſquelles étant ôtées des minutes de *BP* qui ſon $2700'$, il nous reſtera *BN* de $2565'\frac{7}{10}$, ou bien $42° 45' 42''$ de moyen mouvement depuis le Perigée en *B*, ou bien $4^s 27° 14' 18''$ d'anomalie moyenne; il ne reſte donc plus qu'à trouver l'angle *CTL* qui eſt le vrai répondant à ce moyen

On a le rayon du cercle | $5976\frac{1}{2}$ || Sinus de l'arc *BP* | *PO* dans les mêmes parties de ce rayon, & || Sinus de complément de l'arc *BP* | *CO* dans ces mêmes parties; on trouve donc pour *PO* 4226, & comme le ſinus de complément de 45° eſt le même que le ſinus droit, on aura auſſi *CO* de 4226.

Mais nous avons trouvé ci-deſſus le rapport de *CM* à *CG*, & celui de *PO* à *LO* eſt le même; d'où l'on aura *LO* de $4217\frac{1}{2}$, mais *CT* eſt $279\frac{1}{2}$, des mêmes parties, & *CO* dans le cas propoſé de 4226, donc *OT* eſt de $3846\frac{1}{2}$.

Et enfin ſi l'on fait comme *OT* | *LO* || rayon | à la tangente de l'angle *OTL* qu'on trouve de $47° 38' 15''$, qui eſt dans ce cas l'angle *BTL* à cauſe que *CO* eſt plus grande que *CT*, & ſon ſupplément l'angle *ATL* ſera $132° 21' 45''$, ou $4^s 12° 21' 45''$ pour le vrai lieu de la Lune ou d'anomalie égalée; & par conſéquent la difference des deux anomalies ſera $4° 52' 33''$ qui eſt l'équation du centre, ce qui eſt très-éloigné de Kepler dans ce point d'anomalie moyenne; car on n'y trouve par ſes Tables que $3° 32'$. Auſſi dans la moyenne diſtance la Lune étant en *G*, l'Equation du centre ſeroit l'angle *TGF*, qui eſt double de l'angle *TGC* que nous avons trouvé ci-deſſus

de

de 3° 38′ 27″, ce qui la feroit de 7° 16′ 54″, laquelle par toutes les obſervations & le conſentement de tous les Aſtronomes & même par Kepler, ne peut être tout au plus que de 5°.

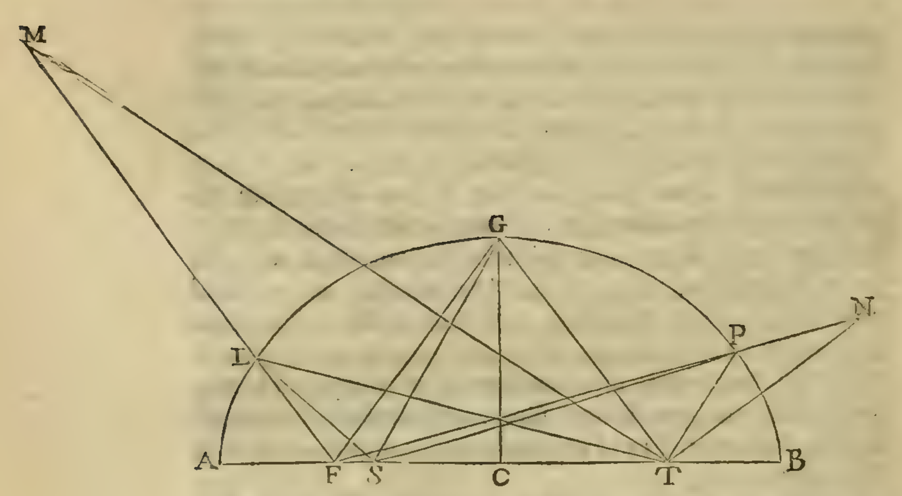
Cette grande difference de 7° 16′ 54″ à 5°, ne vient que de ce que Kepler a fait l'excentricité *CT* de la Lune, de 4362 parties ſeulement dont le rayon de l'orbite elliptique ou la moitié du grand axe eſt de 100000 parties, ce qui étant réduit en centiémes parties du demi-diametre de la Terre qui eſt de 5976 $\frac{1}{2}$ comme les obſervations nous l'ont donné, l'excentricité ne feroit que de 260 $\frac{7}{10}$, au lieu de 379 $\frac{1}{2}$ que nous avons trouvé par les obſervations.

L'hypothêſe de Kepler, quoique très vrai ſemblable, ne peut donc pas ſe ſoûtenir pour la Lune; & il y a grande apparence qu'elle ne conviendroit pas mieux aux autres Planetes, ſi l'on pouvoit déterminer leur excentricité par obſervation comme on a fait celle de la Lune; mais les Aſtronomes ſe ſont contentés de chercher ſur l'axe d'une Ellipſe dans laquelle ils ſuppoſoient que ſe faiſoit leur mouvement, deux points autour de l'un deſquels ſe faiſoit le moyen mouvement, & autour de l'autre le vray; & ils ont ſuppoſé que ces points en étoient les foyers, ils y ont employé au moins trois obſervations, & je donnai autrefois dans les Journaux la Solution de ce Problême d'une maniere très-ſimple, à l'occaſion de ce que l'on avoit publié en Angleterre une maniere de la trouver par la rencontre de deux hyperboles. Cette proprieté de l'Ellipſe eſt inſerée dans mon Traité des Sections Coniques, Livre 8. Propoſition 25.

C'eſt ſur cette hypothêſe des deux foyers d'une Ellipſe, autour deſquels ſe font le moyen & le vrai mouvement des Planetes quoique ſans aucun fondement phyſique, que pluſieurs Aſtronomes modernes ont calculé l'équation du centre des Planetes; mais on n'y trouvera pas mieux ſon compte pour la Lune que par l'hypothêſe de Kepler en poſant la diſtance des foyers telle que l'obſer-

vation nous la donne; & pour en faire une qui s'accorde en quelque façon aux apparences, il faut la poser beaucoup plus petite que celle-là.

Cependant on ne peut pas faire des suppositions contraires à la verité, & il faut necessairement retenir la position du foyer *T* où est la terre sur l'axe de l'Ellipse au lieu où nous l'avons déterminé. Mais comme je ne vois rien qui nous engage à placer l'autre point autour duquel se fait le moyen mouvement, sur l'autre foyer *F*; j'ai pensé que ce point pouvoit être en quelqu'autre endroit sur l'axe comme en *S*, & il sera facile de déterminer la place de ce point *S* si l'on donne la plus grande équation du centre comme de 4° 59′ dans la moyenne distance de la Lune à la Terre.



Car *TG* & *FG* étant égales à *CB*, nous avons trouvé ci-dessus l'angle *TGC* de 3° 38′ 27″ & *CTG* ou *CFG* de 86° 21′ 33″; & puisque nous posons l'angle *TGS* de 4° 59′, nous aurons donc l'angle *TSG* de 88° 39′ 27″. C'est pourquoi dans la résolution du triangle *TGS* nous aurons le côté *TS* de 519 dont *TF* est de 759 des mêmes centiémes du demi-diametre de la Terre, & par conséquent *FS* sera 240 des mêmes parties.

Posons maintenant la Lune en quelque point *L* sur son orbite ; ensorte que l'angle *AFL* soit par exemple de 45° ; si l'on prolonge *FL* jusqu'en *M*, ensorte que *FM* soit égale à *AB*, & ayant mené *TM*, on aura dans le triangle *TMF* les deux côtés *FT*, *FM*, & l'angle compris *TFM* de 135°. Donc par la résolution de ce triangle on aura l'angle *FMT* ou son égal *LTM* à cause de l'Ellipse, de 2° 27′ 36″, & l'angle *TLF* qui en est le double, de 4° 55′ 12″, qui seroit l'équation du centre pour 45°, si le moyen mouvement se faisoit autour de foyer *F*, mais cette équation est beaucoup plus grande qu'il ne faut. On trouve donc aussi l'angle *MTF* de 42° 32′ 24″ ; & par conséquent l'angle *FTL* sera de 40° 4′ 48″ qui est l'angle du vrai mouvement de la Lune en *L* depuis son Apogée en *A*. Mais aussi dans le triangle *TLF* dont on connoît l'angle *FTL* de 40° 4′ 48″, & l'angle *TFL* de 135° : & par conséquent l'angle *TLF* de 4° 55′ 12″ avec le côté *FT* de 759, on trouvera la grandeur *FL* de 5698 ; d'où il suit qu'on aura *TL* de 6255.

Maintenant il faut connoître l'angle *ASL*. Dans le triangle *TLS* on a l'angle *FTL* de 40° 4′ 48″, le côté *TL* de 6255, le côté *TS* de 519, & par la Trigonometrie on trouvera l'angle *TSL* de 136° 39′ 20″, & l'angle *ASL* qui est son Suplement de 43° 20′ 40″, qui est celui du moyen mouvement la Lune étant en *L* ; & par conséquent pour ce moyen mouvement qui est aussi l'Anomalie moyenne de 1s 13° 20′ 40″, sa difference au vrai mouvement sera l'équation du centre de 3° 15′ 52″. Cette équation du centre pour ce degré d'Anomalie moyenne sera de deux minutes environ plus petite que celle de Kepler.

Mais comme c'est dans les Octans que l'équation du centre est la plus sensible suivant les differentes hypothêses, voyons ce que nous donnera ce même calcul, en posant la Lune en *P* sur son orbite, & supposant l'angle *AFP* de 135° ; & par conséquent *TFP* de 45°.

Ayant prolongé *FP* en *N* & *FN* étant égale à *AB*,

on aura auſſi *TP* égale à *P N* par les proprietés de l'Elipſe : c'eſt-pourquoi dans le triangle *FNT* dont on connoît les deux côtés *FN* & *FT* avec l'angle compris *T FN* de 45°, on trouvera l'angle *FNT* de 2° 41′ 30″ ou ſon égal *PTN*, & l'angle *FTN* de 132° 18′ 30″ ; c'eſt-pourquoi on aura l'angle *FTP* de 129° 37′ 0″, qui ſera celui du vrai mouvement, la Lune étant en *P*.

Mais dans le triangle *FPT* dont on aura l'angle *FPT* de 5° 23′ 0″ qui eſt le double de *FNT* avec l'angle *FPT* de 45° ; & par conſéquent l'angle reſtant *FTP* de 129° 37′ 0″ comme on l'a déja trouvé, on trouvera les côtés *TP* de 5720 $\frac{1}{2}$ & *FP* de 6232 $\frac{1}{2}$.

Maintenant dans le triangle *TSP* on connoît le côté *TP* de 5720 $\frac{1}{2}$, le côté *TS* de 519 & l'angle compris *PTS* de 129° 37′ 0″, on trouvera donc l'angle *TSP* de 46° 36′ 12″, & ſon ſupplément l'angle *ASP* de 133° 23′ 48″, ou bien 4^s 13° 23′ 48″ pour l'Anomalie moyenne de la Lune en *P*, dont la difference à l'angle *ATP* du vrai lieu de 129° 37′ 0″ ſera 3° 46′ 48″ pour l'équation du centre répondante au moyen. Kepler donne pour ce degré d'Anomalie moyenne la même équation à quelques ſecondes près.

Si l'on juge que l'équation du centre telle qu'elle eſt dans Kepler, puiſſe ſervir à rendre les apparences de la Lune quoiqu'elle ſoit fondée ſur une fauſſe excentricité, celle que je propoſe ici qui eſt établie ſur la vraye y pourra ſuffire : mais cette excentricité de la Lune ou ſa diſtance à la Terre *T* dont elle eſt tirée dans l'Apogée en *A* & dans le Perigée en *B*, n'eſt pas toûjours la même, & elle n'eſt comme elle a été poſée ci-devant, que lorſque l'Apogée ou le Perigée de la Lune eſt joint au Soleil ; car lorſque le Soleil eſt éloigné de l'Apogée ou du Perigée de trois Signes, la Lune dans ſon Perigée ſe trouve plus éloignée de la Terre de 172 centiémes du demi-diametre de la Terre, qu'elle n'étoit lorſque l'Apogée ou le Perigée ſont en conjonction au Soleil, quoique dans ce cas d'éloignement de trois Signes, elle ſoit toûjours à la même diſtance de la Terre étant dans ſon Apogée que

dans le premier cas, comme on le voit par ma Table 23 : ainſi pour ce cas ou pour cette diſpoſition de l'orbite de la Lune par raport au Soleil, cette orbite doit être differente de celle du premier cas, & elle doit changer peu à peu à proportion que ſon Apogée ou ſon Perigée ſe rapproche de la conjonction au Soleil.

Dans ce cas du plus grand éloignement de la Lune à la Terre dans ſon Perigée, tout l'axe entier *AB* de ſon orbite Elliptique ſera donc de 12125 centiémes du demi-diametre de la Terre ; mais *TB* ſera de 5769 & l'excentricité *CT* de 293 $\frac{1}{2}$.

Si l'on poſe maintenant pour ce cas l'angle *AFL* de 45°, & par conſéquent *TFM* ſera de 135°, on aura dans le triangle *FMT* les deux côtés, *MF* de 12125 & *FT* de 587 avec l'angle compris *TFM* de 135°, on trouvera par la réſolution de ce triangle l'angle *FMT* ou ſon égal *MFL* de 1° 53′ 43″, & l'angle *MTF* de 43° 6′ 17″. Mais l'angle *FLT* de 3° 47′ 26″ qui eſt double de *FMT*, ſera l'équation du centre pour le moyen *AFL* de 45° ; & l'angle du vrai ſera *ATL* de 41° 12′ 34″. Cette équation du centre eſt plus grande que celle de Kepler de plus de 23′, ce qui ne peut pas ſervir.

Auſſi ſi l'on cherche l'angle *TGF* dans la moyenne diſtance la Lune étant en *G* dans ce cas ; on aura dans le triangle rectangle *CTG* le côté *TG* de 6062 $\frac{1}{2}$ & le côté *CT* qui eſt l'excentricité, de 293 $\frac{1}{2}$, d'où l'on trouvera l'angle *TGC* de 2° 46′ 30″ & ſon double *TGF* feroit l'équation du centre dans ce point. Mais cette équation eſt trop grande & elle ne peut être tout au plus que de 4° 59′ 0″ comme on l'a poſée cy-devant, mais Kepler la fait de 5° ; il faudroit donc chercher auſſi dans ce cas un point *S* autour duquel ſe feroit le moyen mouvement, comme nous avons fait pour l'autre cas que nous avons examiné d'abord.

Pour trouver ce point *S* nous aurons dans le triangle *TGS*, l'angle *TGS* de 4° 59′ 0″. Nous aurons auſſi l'angle *GTS* de 37° 13′ 30″ qui eſt le complement de l'angle *TGC*

que nous avons trouvé ci-devant de 2° 46' 30"; & par conséquent l'angle *TSG* suplément de ces deux angles sera aussi connu de 87° 47' 30"; & de plus nous avons le côté *TG* de 6062 $\frac{1}{2}$, c'est pourquoi nous trouverons *TS* de 527 & *FS* sera de 60.

Si nous posons donc maintenant la Lune en *L* & l'angle *AFL* de 45° comme nous avons fait d'abord, nous trouverons de même l'angle *FLT* de 3° 47' 26". Mais dans le triangle *TLF* dont on a le côté *TF* de 587 avec l'angle *TLF* de 3° 47' 26", & de plus l'angle *TFL* de 135; & par conséquent aussi leur suplément l'angle *FTL* de 41° 12' 34". D'où nous trouverons le côté *FL* de 5850 & par conséquent *TL* à cause de l'Ellipse de 6275.

Mais dans le triangle *TLS* on a le côté *TS* de 527, l'angle *STL* de 41° 12' 34", & le côté *TL* de 6275, c'est pourquoi on trouvera l'angle *TSL* de 135° 24' 37" dont le suplément 44° 35' 23" sera l'angle *ASL* du moyen mouvement, ou 1ˢ 14° 35' 23" d'Anomalie moyenne & l'angle *ATL* du vrai de 41° 12' 34", ou 1ˢ 11° 12' 34", & leur difference *SLT* de 3° 22' 49" sera l'équation du centre pour ce degré d'Anomalie moyenne; cette équation s'accorde avec Kepler, quoique sa plus grande équation soit de 5° & celle sur laquelle nous venons de calculer ne soit que de 4° 59', mais la difference de 1' ne peut faire qu'environ 40" dans ce point.

Maintenant si l'on pose aussi la Lune en *P*, & que l'angle *AFP* soit de 135° ou *TFP* de 45°; dans le triangle *FNT* on a le côté *FN* égal à *AB* de 12125, le côté *FT* de 587 & l'angle compris *TFN* de 45°; on trouvera l'angle *FTN* de 132° 58' 12", & l'angle *TNF* de 2° 1' 48" & son double l'angle *FPT* de 4° 3' 36", & aussi l'angle *FTP* de 130° 56' 24" du vrai mouvement.

De plus dans le triangle *FTP* on a l'angle *FPT* de 4° 3' 36", le côté *TF* de 587 & l'angle *TFP* de 45°, on trouvera donc le côté *TP* de 5862 $\frac{1}{2}$.

Enfin dans le triangle *TPS* on a le côté *TP* de 5862 $\frac{1}{2}$, le côté *TS* de 527 & l'angle compris *FTP* de 130° 56' 24".

On trouvera donc l'angle *TSP* de 44° 23′ 28″, & ſon ſuplément l'angle *ASP* de 135° 36′ 32″, ou l'Anomalie moyenne 4^s 15° 36′ 32″, la Lune étant en *P* dont l'équation de Kepler dans ce point eſt de 2′ plus petite quoiqu'elle dût être un peu plus grande.

On voit par ces calculs qu'il n'y auroit pas grande difference entre l'équation du centre de la Lune de Kepler, & celle qu'on trouveroit par la méthode que je propoſe, qui eſt fondée ſur ſon excentricité obſervée, ſuppoſé que ſon orbite fût Elliptique, ce qui ne peut pas être fort éloigné de la verité; & ſi l'on faiſoit deux Tables pour les deux cas extrêmes d'excentricité dont nous venons de parler, on pourroit prendre une équation par parties proportionelles entre deux ſuivant la diſtance de l'Apogée ou du Perigée de la Lune au Soleil, ou bien au moins en faire une de correction à l'équation du centre trouvée dans le premier cas où l'Apogée ou bien le Perigée de la Lune eſt joint au Soleil. Cette Table de correction d'équation du centre conviendroit à ma Table 23 de correction des diametres &c. de la Lune, ce qui me ſembleroit plus commode. Mais enfin quand on aura pris toutes ces précautions on ne peut point encore s'aſſurer de la verité, puiſqu'on connoît que les mouvemens de la Lune ſont ſi compliqués & qu'il y a tant de cauſes qui y concourrent, qu'on ne pourra pas facilement les démêler les unes d'avec les autres pour les réduire en regle. Ceux qui ne connoiſſent pas toutes ces difficultés, ſont ſurpris de voir que les calculs des Eclipſes s'écartent quelquefois de l'obſervation de pluſieurs minutes; mais ils dévroient plûtôt admirer qu'on ſoit parvenu à des prédictions ſi juſtes, puiſque 4 ou 5 minutes de degré d'erreur dans la poſition de la Lune, en peuvent faire aſſez ſouvent une de 10 ou 12 minutes de tems dans les Eclipſes, & une ſeule minute de difference dans la latitude en peut apporter une beaucoup plus grande à proportion & principalement dans les petites Eclipſes, ſans y faire en-

trer des causes physiques fort irregulieres qui peuvent avoir grande part dans les Eclipses de Lune.

Pour ce qui est des Planetes, leurs mouvemens ne peuvent jamais être si composés que ceux de la Lune, puisqu'ils dépendent seulement du Soleil autour duquel ils se meuvent. On doit penser qu'il en sera de même des Satellites de Jupiter & de Saturne comme de la Lune, lesquels tournent autour de ces Planetes comme la Lune autour de la terre; mais à cause que ces Planetes sont beaucoup plus éloignées du Soleil que la Terre, les alterations de ces Satellites, seront moins grandes & moins sensibles que dans la Lune; ensorte que si dans quelqu'aspect de la Lune au Soleil on doit lui faire une correction de plusieurs minutes, il n'en faudra peut-être qu'une dans un Satellite par la même cause; cependant quelle que soit cette correction, elle doit paroître vûë de la Terre, dans leurs Eclipses faites par l'ombre de leur Planete à très peu près comme si nous étions dans ces Planetes.



INSECTE

INSECTE DES LIMAÇONS.

Par M. De Reaumur.

1710. 9. Juillet.

On peut réduire à d'eux genres toutes les eſpeces d'animaux dont on a parlé juſques'ici, auſquels un autre animal ſert de monde : Ou ces Inſectes vivent ſur la ſurface exterieure du corps de quelque animal, tels ſont les poux que l'on voit ſur les quadrupedes, les oiſeaux, & même ſur diverſes autres eſpeces d'inſectes, comme ſur les mouches, frelons, ſcarabés &c. ou ces inſectes vivent dans le corps de quelqu'autre animal, & l'on peut ranger ſous ce dernier genre toutes les eſpeces de vers, que la diſection a fait découvrir dans les corps de diverſes ſortes d'animaux.

Le nouvel Inſecte que j'ai obſervé ſur les Limaçons, ne peut être compris ſous aucun de ces deux genres, parce qu'il a quelque choſe de commun à l'un & à l'autre: car tantôt il habite la ſurface exterieure d'une des parties du corps du Limaçon, tantôt il va ſe cacher dans les inteſtins de cette animal.

On ſcait, que l'on entend par collier du Limaçon, cette partie qui entoure ſon cou ; que ce collier a beaucoup d'épaiſſeur, & que c'eſt preſque la ſeule épaiſſeur de ce collier que l'on apperçoit, lorſque le Limaçon s'eſt tellement retiré dans ſa coquille, qu'il ne laiſſe voir ni ſa tête ni ſon empâtement ; & c'eſt dequoy la figure 1re peut retracer l'idée. L'eſpace triangulaire marqué par *B*, ſitué au milieu de l'ouverture de la coquille, eſt un reſte de l'empâtement de l'animal ; qui eſt entouré de tous côtez par l'épaiſſeur du collier. C'eſt ſur cette partie du collier que l'on voit les Inſectes dont je parle. Ils ſont mar-

qués dans la même figure par les lettres *CCCC* &c. ou plûtôt par les lignes ponctuées, qui partant de ces lettres vont se terminer à ces petits animaux. Ils ne sont jamais plus aisé à observer, que lorsque le Limaçon est ainsi entierement renfermé dans sa coquille, quoiqu'on puisse les remarquer dans diverses autres circonstances. Les yeux seuls, sans être aidés du secours du microscope, les apperçoivent d'une maniere trés sensible. Mais il ne les voïent gueres en repos, il marchent presque continuellement, & avec une extrême vitesse, ce qui leur est assez particulier, car le mouvement de ces sortes d'Insectes est ordinairement lent.

Quelque petits que soient ces animaux, il ne leur est pas possible d'aller sur la surface superieure du corps du Limaçon, la coquille est trop exactement appliquée dessus. Mais en revanche ils ont bien d'autres païs où ils peuvent voïager. Le Limaçon leur en permet l'entrée toutes les fois qu'il ouvre son anus. Cet anus est aussi placé dans l'épaisseur du collier, la lettre *A* va le marquer dans la figure 1re par une ligne ponctuée; cette figure le represente fermé: mais il n'arrive gueres que le Limaçon sorte de sa coquille sans l'ouvrir, & il l'ouvre même souvent dans d'autres circonstances. On le peut voir ouvert, cet anus dans la figure 2e. il y est aussi marqué par la lettre *A*. Il semble que ces petits Insectes attendent avec impatience ce moment favorable qui leur donne une vaste entrée dans les intestins du Limaçon. Du moins ne sont-ils pas long tems à profiter de l'occasion qui se présente d'y aller. Ils s'approchent du bord du trou, & s'enfoncent aussi-tôt dedans, en marchant le long de ses parois. De sorte qu'on ne voit plus au bout de quelques instants sur le collier aucuns des petits animaux qu'on y observoit. La lettre *D* marque dans la figure 2e quelques-uns de ces poux prêts à entrer dans l'intestin par l'ouverture de l'anus.

L'empressement qu'ils ont à aller dans les intestins du Limaçon, semble indiquer que c'est-là le séjour qu'il aiment le mieux. Comment les voit-on donc sur le collier?

peut-être n'y font-ils jamais que contre leur gré, les mouvemens continuels qu'ils se donnent alors en paroissent une preuve. Mais le Limaçon les oblige d'aller s'y loger toutes les fois qu'il fait sortir ses excremens ; car ces excremens occupant à peu prés toute la largeur de l'intestin, chassent en avançant tout ce qui se présente en leur chemin. De sorte que lorsqu'ils arrivent au bord de l'anus, les petits insectes sont contraints d'aller sur le collier ; & comme cette opération du Limaçon dure quelque tems, ils se promenent pendant ce tems-là sur le collier, d'où ils ne peuvent pas rentrer quand il leur plaît dans les intestins, parce que le Limaçon leur en a souvent fermé la porte, pendant qu'ils parcouroient le collier.

Au reste on peut observer tout ce que je viens de dire sur toutes les especes de Limaçons, quoique plus communément sur les gros Limaçons des jardins qui sont representez dans les fig. 1re & 2e ; mais il est assez singulier, qu'il y ait certaines especes de Limaçons, chez lesquelles on peut découvrir ces Insectes jusqu'au milieu même de leurs intestins. Telle est surtout la petite espece de Limaçon qu'on voit ici dans les fig. 3e & 4e. Ce qui caracterise cette espece, est un couvercle marqué *O*, d'une matiere aussi solide que celle de la coquille, par le moyen duquel l'animal se renferme de tous côtez, quand il le veut, cemme font les Limaçons de mer ; au lieu que le collier des Limaçons terrestres ordinaires est découvert, comme dans les fig. 1re & 2e, excepté dans l'hyver & dans certains tems secs, où ils bouchent l'ouverture de leur coquille avec une bave qui prend en séchant quelque consistence ; mais ce couvercle n'est jamais adherant au corps de l'animal comme celui dont je parle, & ne lui est pas comparable aussi par sa solidité. Si l'on casse la coquille d'un de ces petits Limaçons autour de l'endroit marqué *E* fig. 3e, & qu'on laisse ainsi à découvert la peau de l'animal, comme elle l'est dans la fig. 4e. On a souvent le plaisir d'appercevoir ces insectes dans le corps même du Limaçon, la transparence de ses peaux en donne la facilité ;

de ſorte qu'on diſtingue ces poux alors, ſoit qu'ils ſoient en repos, ſoit qu'ils courrent, comme ſi on les regardoit au travers d'une glace. La lettre *C* marque deux Inſectes vûs aux travers des peaux de ce Limaçon.

Quoiqu'on trouve ces Inſectes ſur toutes les eſpeces de Limaçons, il ne faut pas les y chercher indifferemment en tous tems, on en découvre rarement pendant les tems pluvieux; de ſorte que pour ne ſe point donner la peine d'obſerver inutilement, il ne faut examiner les Limaçons qu'aprés une ſechereſſe, apparemment qu'elle eſt propre à faire éclore ces inſectes, ou peut être auſſi qu'elle empêche la deſtruction de ceux qui ſont déja formez. Lorſque la terre eſt fort humide le corps du Limaçon eſt abreuvé d'une grande quantité d'eau, qui s'échape enſuite beaucoup plus viſqueuſe au travers du collier & de l'empâtement du Limaçon, ſur leſquels elle compoſe differentes goutes de liqueurs, Or il n'eſt pas une de ces goutes qui ne ſuffiſe pour faire perir pluſieurs de ces Inſectes. Ce n'eſt pas qu'ils ayent à craindre d'être ſubmergez dedans comme dans une eſpece de petite mer, cette liqueur eſt pour eux un corps veritablement ſolide, mais chaque goute peut-être à leur égard ce que la ruine d'un bâtiment eſt au nôtre, je veux dire qu'elle peut les accabler par ſon poids lorſque les mouvemens du Limaçon font couler une de ces goutes d'un endroit à un autre.

Mais quoiqu'il en ſoit, il eſt certain comme je viens de le dire, que la ſechereſſe contribuë fort à leur formation. Il n'en faut d'autres preuves que le fait ſuivant que j'ai repeté un grand nombre de fois. Ayant amaſſé des Limaçons dans des tems humides, & aprés un examen exact n'ayant pû découvrir chez eux aucun de ces Inſectes, je les ai mis dans des vaſes, dans leſquels ils ne pouvoient reparer la perte de l'humeur aqueuſe qui s'évapore continuellement. Au bout de quelque tems j'ai regardé de nouveau les mêmes Limaçons, ſur leſquels j'ai toûjours vû pluſieurs de ces Inſectes. J'en pouvois quelquefois compter plus de vingt ſur le même animal. On

ne sçauroit aureste déterminer précisement le tems qu'il faut pour les appercevoir ainsi. J'en ai quelquefois vû au bout de 5 à 6 jours, mais je ne les ai jamais gardé trois semaines sans qu'il en eussent une grande quantité.

Le corps seul du Limaçon est un terrain convenable à ces Insectes. On ne les voit jamais sur sa coquille; & si on use de force pour les obliger d'y aller, ils ne sont pas long-tems aprés qu'on leur a rendu la liberté, sans regagner le collier dont on les a chassés.

A la vuë simple, ils paroissoient communément d'une couleur trés blanche; quelques-uns des plus gros cependant paroissent d'un blanc sale, & quelques-autres d'un blanc dans lequel on auroit mêlé une trés-legere teinture de rouge.

Un bon microscope est necessaire pour appercevoir nettement leurs differentes parties. Il les fait voir telles qu'elles sont representées dans les fig. 5e & 6e, dans la 1re desquelles ils sont dessinés vûs par dessus, & dans l'autre vûs par dessous. La lettre *T* marque leur trompe, dans l'une & l'autre fig. Il n'en paroît pourtant qu'une partie dans la 5e, mais on y peut observer comment elle se recourbe en dessous. Ils s'en servent apparemment à succer le Limaçon. Elle est placée cette trompe au milieu de deux petites cornes *CC*, trés mobiles non seulement de haut en bas, de droit à gauche, comme celles de la plûpart des Insectes, mais encore en elle-même en s'allongeant & se raccourcissant comme celle des Limaçons; aussi arrive-t-il qu'on considere souvent ce petit animal sans appercevoir ces cornes.

Son corps est divisé en six anneaux, & la partie anterieure à laquelle sont jointes la trompe & les cornes. Il a quatre jambes de chaque côté; les deux premieres de chaque côté sont articulées à la partie anterieure, & les deux autres au premier anneau. La 2e & la 3e sont attachées plus loin l'une de l'autre que la 1re ne l'est de la seconde, & la troisiéme de la quatriéme. Ces jambes sont garnies de grands poils, elles paroissent terminées par

trois ou quatre pointes, à peu prés comme le feroient les jambes de diverfes efpeces de fcarabés, aufquelles on auroit ôté la derniere articulation, qui eft terminée par deux petits crochets.

Leur dos eft élevé par raport aux côtez, mais arrondi; les côtez le font auffi; ils ont chacun trois ou quatre grands poils. Leur anus eft auffi entouré de quatre à cinq poils d'une pareille longueur, mais on n'en voit point fur le ventre.

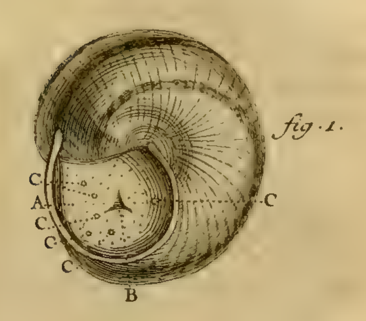
OBSERVATION DU PASSAGE DE JUPITER

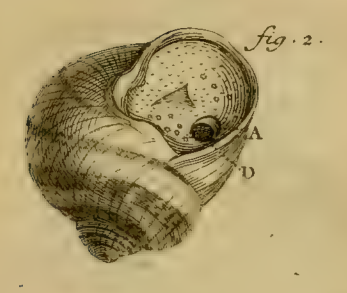
Proche de l'Etoile qui eft dans le front du Scorpion, comparée avec une femblable Obfervation faite en 1627.

PAR M. MARALDI.

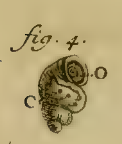
1710. 5. Juillet.

LES Etoiles fixes ont toûjours été d'un grand ufage pour déterminer la fituation des Planetes. Les anciens Aftronomes qui n'avoient pas de moïens faciles pour comparer les planetes à l'Ecliptique qui n'eft point vifible, obfervoient la trace qu'elles décrivoient par leur mouvement propre à l'égard des Etoiles fixes, & étoient attentifs à remarquer leur paffage proche de quelques-uns de ces termes vifibles. Nous avons plufieurs de ces Obfervations avec le nom des Etoiles proche defquelles diverfes Planetes ont été obfervées, auffi-bien que les circonftances des temps dont les plus anciennes font de prés de deux mille ans. Cette méthode de déterminer la fituation des planetes eft fimple & facile, & elle peut avoir fervi à découvrir les regles de leurs mouvemens, leurs directions & leur retrogradations avant l'invention des inftrumens. Elle eft auffi exacte étant exempte des













P. I. Giffart sculp.


Mem. Acad. 1710 Pl.VIII p.310









erreurs ausquelles sont sujettes les déterminations faites par le moïen des armilles qui étoient en usage parmi les Anciens, à cause des difficultez qu'il y avoit non-seulement à les construire exactement, mais à les poser dans leur veritable situation, & du mouvement qu'il falloit leur donner afin qu'elles suivissent celui du premier mobile.

C'est donc avec raison que les Modernes dans le besoin qu'ils ont des observations anciennes pour trouver les regles des mouvemens des Planetes, se fondent sur ces sortes de déterminations & les préferent à toutes les autres faites par d'autres méthodes. Elles ont encore cet avantage, qu'on peut rectifier par des observations modernes la situation des Etoiles fixes, & connoître par ce moïen la situation des Planetes à l'égard de l'Ecliptique avec plus de précision que celle qu'on avoit par les observations anciennes; ce qui ne se peut pas faire à l'égard des observations faites par d'autres manieres.

Quoique l'Astronomie moderne ait des méthodes de trouver exactement le lieu des Planetes à l'égard de l'Ecliptique sans le secours des Etoiles fixes, nous ne laissons pas de les emploïer dans cette détermination toutes les fois qu'il s'en presente l'occasion, à cause des commoditez & des avantages que nous y trouvons, & que nous avons indiqué en partie dans les Memoires de l'Academie de 1704.

Vers la fin d'Avril & le commencement de May de cette année 1710, Jupiter aïant passé proche de l'Etoile de la seconde grandeur qui est dans le front du Scorpion, nous avons observé ce passage autant que le temps l'a pû permettre.

Nous commençâmes ces observations le 23 du mois d'Avril lorsque Jupiter étoit environ un demi-degré plus oriental que l'Etoile, proche laquelle il devoit se trouver quatre jours aprés avec une fort petite difference de latitude Septentrionale; mais les nuages ne nous permirent de le voir que le 29 Avril, quand par son mouvement retrograde il étoit déja plus occidental, & que la

difference de leurs Ascensions droites étoit de 9 minutes & demi, avec une difference de déclinaison septentrionale de presque quatre minutes. Nonobstant cette distance qu'on détermina par les observations faites par le moyen des fils qui sont au foyer de la lunette, l'Etoile se confondoit encore dans les rayons de Jupiter; de sorte qu'on avoit de la peine à la distinguer à la vûë simple un peu plus à l'Orient; ce qui fait voir avec quel degré de précision on peut avoir ces conjonctions observées à la vûë simple avant l'invention de la lunette. Cette Etoile qui à la vûë paroît simple, étant regardée avec la lunette est composée de deux Etoiles inégales entr'elles & éloignées l'une de l'autre de deux diametres de la plus grande.

Depuis le 29 Avril nous avons continué pendant plusieurs jours les observations en déterminant les differences d'Ascension droite & de déclinaison entre l'Etoile & la Planete, par le moïen des fils qui se croisent à angles de 45 degrez au foyer d'une lunette de 8 pieds montée sur la machine parallatique. Voici le détail d'une de ces observations.

Le 23 Avril l'Etoile fixe qui étoit plus occidentale parcourant un fil, arriva à $11^h\ 13'\ 28''$ à la commune intersection de ce fil avec un autre qui lui étoit perpendiculaire, & à $11^h\ 15'\ 28''$ Jupiter par son mouvement à l'Occident arriva à ce même fil perpendiculaire; de sorte que la difference du passage entre une Etoile & l'autre fut de 2 minutes de temps, qui donnent $30'$ de difference d'ascension droite, dont Jupiter étoit plus oriental. L'ascension droite de l'Etoile pour cette année est $337°\ 11'\ 40''$, donc celle de Jupiter sera $337°\ 41'\ 40''$. La difference du passage de l'Etoile entre le fil perpendiculaire & un des obliques fut de $17''$ de temps qui à cette déclinaison donnent $3'\ 50''$ d'un grand cercle pour la difference de déclinaison, donc Jupiter étoit plus meridional. La déclinaison meridionale de l'Etoile pour cette année est $18^d\ 59'\ 5''$; donc la déclinaison meridionale de Jupiter étoit de $19^d\ 2'\ 55''$.

Par

Par la même méthode nous avons déterminé les differences d'ascension droite & de déclinaison, & calculé le lieu de Jupiter par rapport à l'Equinoxial & à l'Ecliptique, comme dans la Table suivante.

		Differences d'Asc. dr.	de Declin.	Ascension droite.	Declinais. merid.		Longitud.	Latitude Sept.
Le 23 Avril à	11h 15	30 0	3 50	237 41 40	19 2 55	m	29 34 20	1 4 20
Le 29	10 7	9 30	3 50	237 2 10	18 55 1	m	29 1 0	1 4 40
Le 30	10 24	16 30	5 20	236 55 10	18 53 45	m	28 54 10	1 5 0
Le 1 May	10 18	23 48	7 10	236 47 50	18 51 55	m	28 47 0	1 5 10
Le 3 May	11 22	37 40	10 0	236 34 0	18 49 5	m	28 33 40	1 5 0
Le 4 May	9 57	45 20	11 40	236 26 20	18 47 25	m	28 26 10	1 5 5
Le 5 May	10 16	52 30	13 5	236 19 10	18 46 0	m	28 19 10	1 5 0

En comparant la longitude de Jupiter du 29 Avril avec celle de l'Etoile, qui suivant nos observations est pour cette année en 29° 10′ 20″ du Scorpion, on trouve que sa conjonction avec Jupiter est arrivée le 27 Avril, Jupiter ayant 1d 4′ 35″ de latitude septentrionale, & étant une minute & demi plus septentrional que l'Etoile, qui suivant nos observations a 1° 3′ 5″ de latitude septentrionale.

Nous avons une Observation de Jupiter avec la même Etoile faite l'an 1627 par deux differens Astronomes. Maria Cunitia dans son Livre d'Astronomie, intitulé *Urania propitia*, rapporte celle qui fut faite par Elias à Leonibus son mari le 3 & le 6 de Mai de l'an 1627. Le 3 de Mai Gregorien à 3h 22′ du matin il trouva Jupiter 18 minutes plus oriental que l'Etoile, & la latitude de Jupiter si approchante de celle de l'Etoile, qu'elle sembloit devoir être cachée dans leurs conjonctions. Après deux jours de tems couvert, le 6 May nouveau stile, à une heure du matin le même Observateur trouva Jupiter plus occidental que l'Etoile du quart de l'ouverture de la lunette avec laquelle il observoit. Cet intervalle donne 3 minutes & demie de difference de longitude, dont celle de Jupiter étoit plus petite. En supposant le lieu de l'Etoile en 27° 58′ $\frac{1}{2}$ du Scorpion avec une latitude septentrionale de 1d 5′, il trouva le lieu de Jupiter en 27d 55′ 0″ avec une latitude septentrionale de 1° 3′. La même observation

fut faite à Leide par Hortensius le 25 Avril vieux stile à onze heures du soir, lequel trouva Jupiter plus occidental que l'étoile de 5 minutes; de sorte que la difference de longitude déterminée par ces deux Observateurs s'accorde à une minute & demie prés.

Entre la conjonction de 1627 & celle de cette année, il y a un intervalle de 83 ans moins huit jours. En 83 années le mouvement des Etoiles fixes a été un dégré & dix minutes vers l'Orient; c'est-pourquoi la conjonction de cette année qui est arrivée par le mouvement retrograde de Jupiter, a anticipé d'autant le lieu du Zodiaque où arriva la conjonction de 1627.

Jupiter est retourné cette année à peu de minutes prés dans le même degré de longitude & dans la même configuration avec le Soleil, que celle qui arriva en pareil jour 5e May 1627. Voici le fondement de ce retour, avec la maniere facile de connoître la conformité ou la difference des hypothêses avec les observations.

Entre le 5e May 1627 & le 5e du même mois 1710 il y a un intervalle de 83 années, parmi lesquelles il y a 20 bissextiles. En 83 années, dont 20 sont bissextiles, le Soleil par son moyen mouvement retourne au même point de l'Ecliptique où il s'étoit trouvé dans l'époque, ayant fait un nombre entier de révolutions moins $5' 35''$; Mais à cause du mouvement de l'Apogée qui en 83 ans est de $1^d 25' 25''$, l'équation du Soleil étant plus grande de deux minutes dans l'observation de cette année, que dans celle de 1627, on aura le vrai lieu du Soleil plus avancé que le moyen de ces deux minutes; les ayant ôtés de $5' 35''$, retardement du Soleil à l'égard du même point, on aura $3' 35''$, dont le vrai lieu du Soleil sera moins avancé dans l'Ecliptique le 5e May de cette année qu'il étoit en pareil jour & pareille heure de l'année 1627.

Pour ce qui est de Jupiter. En 83 années dont 20 sont bissextiles, le moyen mouvement de cet astre outre un nombre de révolutions entieres, est de $4' 20''$, dont il est plus avancé qu'en 1627, mais le mouvement de l'Apo-

gée qui en 83 années eſt de deux degrez ſelon la ſuite des Signes, fait une variation dans les équations, qui étant de 10′ 30″, fait anticiper d'autant ſon vrai lieu à l'égard du moïen; les ayant ajoûtez aux 4′ 20″ qui eſt l'anticipation du moyen mouvement, on aura 14′ 50″, anticipation totale du lieu de Jupiter dans l'obſervation de cette année à l'égard du lieu qu'il avoit dans le même jour de l'année 1627.

Dans l'obſervation du 5e May 1627 à 10h heures du ſoir, le lieu de Jupiter étoit en 27° 58′ 10″ du Scorpion, & en pareil jour & heure de cette année 1710 nous l'avons déterminé en 28 19′ 10″ du Scorpion; par les obſervations l'anticipation eſt donc dans cet intervalle de 20′, à cinq minutes près de ce que donnent les hypothêſes. Ce qui fait voir, qu'entre les hypothêſes & les obſervations il y a autant de conformité que l'exactitude des obſervations le peuvent permettre.

Pour ce qui eſt de la latitude de Jupiter, celle qui réſulte des obſervations de cette année eſt aſſez bien repreſentée par la ſituation des nœuds & par l'inclinaiſon que nous avons établie dans les Memoires de l'Académie de 1706: il n'en eſt pas de même de la variation qui réſulte de la comparaiſon de ces deux obſervations.

La latitude Septentrionale de l'Etoile, à l'égard de laquelle on détermina la ſituation de Jupiter, eſt ſuppoſée d'un degré & 5 minutes; mais par nos obſervations cette latitude ſe trouva ſeulement d'un degré & 3 minutes. Suivant le rapport de Maria Cunitia, Jupiter vû avec la Lunette étoit éloigné de l'étoile le 3e May de 18 minutes vers l'Orient, & inſenſiblement plus bas; de ſorte qu'elle paroiſſoit devoir être cachée par Jupiter. Après deux jours de tems couvert, c'eſt-à-dire le matin du 6 May, lorſque Jupiter avoit paſſé la conjonction & n'étoit éloigné de l'Etoile vers l'Occident que de 3 minutes, il eſt remarqué que Jupiter étoit un peu plus bas que l'étoile. Cependant dans le calcul que cette Sçavante donne de cette obſervation, elle dit que la diſtance de l'Etoile & de Jupiter

fut trouvée de 3 minutes & demi. Si nous nous arrêtons à la premiere détermination en ſuppoſant nôtre latitude de 1^{d} 3′, la latitude de Jupiter réſultera de 1^{d} & un peu moins de trois minutes; mais ſi nous ſuppoſons la ſeconde détermination, la latitude de Jupiter réſulte un peu moins d'un degré.

De quelle de ces deux manieres differentes qu'on prenne la latitude de Jupiter, elle ne ſçauroit être repreſentée exactement par les hypothêſes ordinaires du mouvement des nœuds; car en ſuppoſant la premiere détermination qui lui eſt plus conforme, il y a entre la détermination & les hypothêſes une difference de latitude de plus de deux minutes, leſquels demanderoient dans l'intervalle de 83 ans un mouvement des nœuds de 1^{d} 53′; ce qui ſeroit un degré & un tiers plus grand que celui que nous ſuppoſons. Mais il vaut mieux ſe tenir au mouvement des nœuds établi dans les Memoires de l'Academie de 1706, que de le tirer des obſervations éloignées ſeulement de 83 ans, parce qu'une petite erreur dans la latitude dans un ſi petit intervalle de tems, peut faire une grande difference dans le mouvement des nœuds.

Nous avons comparé par la même méthode deux autres obſervations faites dans le même degré du Zodiaque & éloignées entr'elles d'un intervalle de 83 années. La premiere eſt celle que fit Longomontan l'an 1607 le 27 Septembre à 11^{h} 10′ aïant trouvé Jupiter en 4° 10′ d'Aries. La ſeconde eſt celle que nous fîmes l'an 1690 le 26 Septembre, ayant déterminé le lieu de Jupiter en 4° 5′ du même Signe. La difference entre ces deux obſervations n'étant que de 5′, dont le lieu de Jupiter retarde dans la derniere obſervation à l'égard de la premiere. Entre une obſervation & l'autre il y a 83 années moins un jour, parmi leſquelles il y a 21 biſſextiles, ce qui fait la même choſe que s'il y avoit 83 années préciſes, dont 20 ſeroient biſſextilles; par conſéquent l'anticipation du moyen mouvement eſt 4′ 16″; mais à cauſe du mouvement de l'Aphelie de Jupiter la variation de l'Equation

dans ces deux observations étant soustrative de 12 minutes, fera retarder de 8 minutes le vrai lieu de Jupiter à l'égard de celui qu'il avoit dans l'observation de 1607. Par les observations ce retardement est de 5 minutes, la difference n'est donc que de 3 minutes; ce qui confirme l'accord des hypothêses avec les observations. Nous avons trouvé à peu près le même accord dans la comparaison que nous avons faite de quelques autres observations de Longomontan avec les nôtres. Mais nous avons trouvé une plus grande difference dans l'observation de la Conjonction de Jupiter avec le cœur du Lion faite par M. Boüillaud l'an 1623, & comparée avec une autre que nous fîmes l'an 1706. Par le moïen des fils qui se croisent au foyer de la Lunette le 17 Octobre à trois heures du matin, nous déterminâmes leur difference d'ascension droite & de déclinaison, d'où nous trouvâmes leur conjonction en longitude à deux heures après midi du 17 Octobre, Jupiter étant en $25^d\ 46'\ 30''$ du Lion, avec une latitude septentrionale de $0^d\ 44'\ 55''$.

Par ces observations & par d'autres faites avant cette conjonction, nous trouvons le lieu de Jupiter pour le 12 Octobre à 3^h aprés la minuit suivante, en $25^d\ 4'\frac{1}{4}$ du Lion. M. Boüillaud l'avoit trouvé l'an 1623 le 12 Octobre à 17 heures après midi en $24^d\ 39'\ 35''$: la difference est de 24 minutes, au lieu de 9 que donnent les hypothêses. Ce qui donne lieu de croire que l'observation du siécle passé a été faite à la vûë simple, les rayons de Jupiter dont le cœur du Lion étoit proche ayant pû causer cette variation. Il y a des observations exactes, il y en a d'autres qui n'ont pas la même précision. Il ne faut pas prétendre de les representer toutes également bien par les hypothêses; c'est à la prudence de ceux qui doivent les employer, de distinguer les unes des autres, & faire un choix des meilleures. Outre la facilité qu'il y a dans cette méthode de comparer les observations avec les hypothêses, elle peut servir utilement à diriger ceux qui calculent des Ephemerides.

Au reste ce n'est pas sans sujet qu'on examine avec tant de soin & en tant de manieres differentes les mouvemens des Planetes, & principalement ceux de Jupiter. Outre les connoissances plus précises qu'on tire des mouvemens des Planetes, & qui meritent d'être sçûës, on est encore engagé dans cette recherche par l'utilité qui en résulte; car il n'est pas possible de perfectionner la théorie des Satellites de Jupiter, qui sont d'un si grand usage dans la Geographie & dans la Navigation, sans connoître avec précision le mouvement de Jupiter, d'où dépend celui de ses Satellites.

REFLEXIONS

Sur les Observations du Flux & du Reflux de la Mer, faites à Dunquerque par M. Baert Professeur d'Hydrographie, pendant les années 1701 *&* 1702.

PAR M. CASSINI le fils.

1710. 12. Juillet.

LEs observations du Flux & du Reflux de la Mer étant d'une grande importance pour la sûreté de la Navigation, & pour choisir les tems les plus propres pour entrer dans les Ports de l'Ocean ou pour en sortir; étant d'ailleurs avantageux aux Sciences de connoître si elles ont quelque liaison avec les mouvemens de la Lune, & si on peut trouver quelques regles des variations ausquelles elles sont sujettes. L'Académie Royale des Sciences présenta un Mémoire à Monsieur le Comte de Pontchartrain, pour qu'il lui plût ordonner qu'on fît dans quelques Ports de la France un Journal exact de ces sortes d'observations.

Ce Ministre qui est toûjours attentif à ce qui peut contribuer à la perfection des Sciences, donna ordre aux Professeurs d'Hydrographie entretenus par le Roy dans les Ports de l'Ocean, d'observer chacun dans leur départ-

tement le flux & le reflux de la Mer. M. Baert Professeur d'Hydrographie à Dunquerque y fut chargé de ce soin; ce qu'il a executé avec toute l'attention & l'exactitude que l'on pouvoit souhaiter.

Il choisit pour faire ces observations un lieu dans le Parc de la Marine, où la Mer n'a d'autre mouvement remarquable que celui du flux & du reflux. Il fit construire à cet endroit une petite guerite, tant pour être à couvert des injures du temps, que pour n'être point détourné dans ses observations; & il y plaça un tuyau quarré fixe *EFGH*, perpendiculaire à la surface de la Mer, composé de quatre planches, ouvert par le bas en *GH*, afin que l'eau y pût entrer librement & se mettre de niveau avec la Mer, & fermé par le haut en *EF* par un couvercle *EAF* percé en *A* d'un trou de 14 lignes de diametre ou environ, par où passoit librement une regle de bois *TK* qui avoit à son extrémité inférieure une planchette *LM*, quarrée & un peu arrondie par les bords pour éviter le frottement. On avoit attaché sous cette planchette un liege de quatre pouces d'épaisseur qui nageoit sur la surface de l'eau, & faisoit élever ou abaisser la regle de bois *TK* à mesure que la marée montoit ou descendoit. Cette verge étoit divisée en pieds & en pouces, afin de pouvoir observer aisément l'accroissement ou la diminution de la marée qui faisoit hausser ou baisser la verge *TK* d'une égale quantité au dessus, ou au dessous du couvercle *EF*. On

obmet dans la deſcription de cette Machine diverſes circonſtances qui font voir la préciſion des obſervations de M. Baert & qui ſont rapportées au long dans une lettre qu'il a écrite au R. P. Gouye.

Il eſt propos de remarquer, que toutes les meſures de la hauteur de la Mer ont été priſes à l'égard d'un point fixe qui eſt *de niveau avec le deſſus des Tablettes qui bordent le Quay proche l'Ecluſe du Baſſin, directement à la Montée du côté de la Citadelle qui eſt un endroit du Quay que la Mer ne ſurmonte jamais.* Il faut auſſi remarquer que l'alignement du Canal de Dunquerque eſt tourné au Nord-Oueſt quart de Nord; que ſa longueur depuis les Têtes des jettées proche la Rade juſqu'au lieu de l'obſervation, eſt de 1435 toiſes; que ſa largeur eſt de 36 toiſes à ſon embouchure, & de 16 toiſes à ſon plus étroit; & non obſtant cette grande diſtance, on n'a trouvé aucune difference remarquable entre le tems de la haute Mer dans le Parc, & celui de la haute Mer vis-à-vis le Risbanc, ce qu'on a eſſaïé par cinq fois differentes aux plus beaux jours de l'Eté par des horloges à minutes. Pour l'intelligence de ce que l'on dira dans la ſuite, il eſt à propos d'avertir qu'on appelle haute Mer lorſque le flux eſt monté à ſa plus grande hauteur, & baſſe Mer lorſque le reflux eſt deſcendu à ſa plus petite hauteur. On appelle auſſi les plus grandes Marées, celles où la haute Mer eſt le plus haut qu'il ſoit poſſible, & les plus petites Marées celles où la haute Mer eſt le plus bas qu'il ſoit poſſible.

Le Journal des Obſervations de la Marée de M. Baert commence au 24 Mars 1701, & finit au 31 May 1702. Il y a marqué preſque tous les jours dans le tems de la haute Mer & quelques heures avant & après, la hauteur de la Mer à l'égard du point fixe dont on a parlé ci-deſſus, *augmentant en nombre vers le bas, afin de trouver le rapport de toutes les hauteurs des Marées qu'il devoit obſerver.* Pour avoir le tems précis, il avoit tracé avec beaucoup de circonſpection une ligne meridienne pour regler de tems en tems les Horloges à minutes dont il ſe ſervoit.

voit. Il obſervoit à divers tems les heures & minutes auſquelles la Mer ſe trouvoit aux mêmes hauteurs tant en montant qu'en deſcendant; & il prenoit pour l'heure de la haute Mer le milieu entre le tems qui réſulte de deux obſervations faites à la même hauteur le plus proche de la haute Mer, l'une avant & l'autre après; ce qu'il a jugé plus à propos de faire qu'à des diſtances plus éloignées, ayant remarqué par toutes les expériences, que la Mer deſcend avec un peu plus de lenteur qu'elle ne monte. Il a marqué auſſi les vents & la temperature de l'air à chaque jour de ſes obſervations.

A l'égard de l'irregularité de la progreſſion qu'on remarque dans la hauteur de la Marée, lorſqu'elle monte auſſi bien que lorſqu'elle deſcend, M. Baert n'oſe déterminer, ſi les vents en ſont la cauſe, ou ſi l'on peut ſuppoſer que la Mer eſt mûë par des vagues très-éloignées entr'elles, & par d'autres qui s'entreſuivent de près. Pour ce qui eſt de ſon balancement de haut en bas & de bas en haut qu'on remarque à chaque haute Mer, il en croit la cauſe très naturelle: car comme la Mer en s'avançant vers la Côte la trouve pour obſtacle, elle peut ſurmonter un peu ſon niveau qui l'oblige après de retourner & faire ainſi des vibrations lentes près du lieu où elle trouve quelque obſtacle, qui ne peuvent être quelquefois apperçûës à cauſe des vents qui ſont contraires.

Pour pouvoir comparer enſemble les obſervations de la haute Mer, & voir ſi on pourroit compoſer quelque regle plus certaine de leur irrégularité qu'on n'a eu juſqu'à preſent, M. Baert a dreſſé une Table où il a marqué jour par jour depuis le 24. Mars 1701 juſqu'au dernier May 1702, dans la 1re & 2e colomne la ſituation de la Lune en longitude & en latitude pour tous les jours à midy depuis le 24 Mars 1701 juſqu'au dernier May 1702. Dans la 3e, l'âge de la Lune au tems de la haute Mer. Dans la 4e, le tems de la haute Mer. Dans la 5e, la hauteur de l'eau ſous le point fixe. Dans la 6e, le paſſage de la Lune par le Meridien: & dans la 7e & 8e, la ſituation du

vent, sa force & la disposition du tems.

En considerant d'abord les tems de la haute Mer observés à Dunquerque, on trouve que le jour des pleines Lunes la haute Mer y arrive vers le midy ; ce qui n'est pas si exact qu'il ne s'y trouve quelquefois une difference d'une heure entiere, comme on le remarque par 15 observations consécutives qui en ont été faites ; la haute Mer qui a le plus acceleré ayant été observée le 19 Juillet jour de la pleine Lune à $11^h\ 24'$ du matin, & celle qui a le plus retardé étant arrivée le 17 Septembre à $0^h\ 24'$ du soir, ce qui donne une variation d'une heure dans les tems des Marées pour le jour de la pleine Lune. Cette variation étant partagée en deux, on aura le tems moyen de la haute Mer à Dunquerque à $11^h\ 54'$ du matin, c'est à dire, un peu avant midy.

Pour établir quelque regle de cette variation du tems des Marées aux jours des pleines Lunes, il faut considerer que les retardemens de la Marée d'un jour à l'autre, ont quelque analogie avec le mouvement de la Lune, dont le passage par le Meridien retarde de 49 minutes ou environ d'un jour à l'autre. Suivant cette hypothêse, lorsque l'heure de la pleine Lune concourt avec l'heure de la haute Mer, il ne doit y avoir aucune anticipation ni retardement dans l'heure de la haute Mer. Mais lorsque la pleine Lune arrive le matin avant la haute Mer, alors le passage de la Lune par un cercle horaire retarde de deux minutes par heure à l'égard du Soleil ; il doit donc y avoir un pareil retardement dans l'heure de la haute Mer observée ; au contraire lorsque la pleine Lune arrive le soir après la haute Mer, alors la pleine Lune n'est pas encore dans son plein dans le tems de la haute Mer, il doit donc y avoir quelque acceleration dans l'heure de la haute Mer observée.

En supposant cette acceleration ou retardement de 2 minutes par heure. On trouvera une regle pour déterminer à peu près la variation des Marées aux jours des pleines Lunes.

Par exemple, le 19 Juillet de l'année 1701 la haute Mer eſt arrivée à 11^h 24$'$ du matin, qui eſt la plus grande acceleration que M. Baert ait obſervée, & la pleine Lune eſt marquée pour ce jour-là dans la Connoiſſance des Temps à 11^h 50$'$ du ſoir. La haute Mer a donc dû avancer d'environ 24 minutes qui étant retranchées de 11^h 54$'$ tems moyen des Marées à Dunquerque, donnent 11^h 30$'$ pour le tems de la haute Mer à 6 minutes près de celle que l'on y a obſervée.

De même le 17 Septembre 1701, jour auquel on a obſervé le plus grand retardement de la Marée, la haute Mer eſt arrivée à 12^h 24$'$ & la pleine Lune à 5^h 56$'$ du matin. La haute Mer ſuivant la regle marquée ci-deſſus, a donc dû retarder de 12 minutes, qui étant ajoûtées à 11^h 54$'$ donnent 12^h 6$'$ pour le tems de la haute Mer à 18 minutes près de celle qui a été obſervée.

Il eſt à remarquer, qu'au lieu que dans l'obſervation du 19 Juillet le vent étoit Nord un quart de Nord-Eſt petit vent, il étoit le 17 Septembre Sud beau frais dans le tems de la haute Mer, ce qui a pû contribuer au retardement de la Marée. Car les vagues de la Mer étant pouſſées par la Marée à le Côte de Dunquerque du Nord vers le Midi, leur mouvement a pû être retardé par le vent du Sud qui venant de la Terre faiſoit un effort contraire à celui de la Marée. Ayant conjecturé de cette obſervation, que les vents peuvent ſuivant leurs differentes directions cauſer quelques accelerations ou retardemens à la Marée; on a examiné l'obſervation qui a été faite à Dunquerque le 15 Novembre 1701 jour de la pleine Lune, le vent étant Sud eſt beau frais. Suivant la regle marquée ci-deſſus la pleine Lune étant arrivée à 5^h 4$'$ du ſoir, il faut retrancher 10 minutes de 11^h 54$'$ pour avoir le tems de la haute Mer à 11^h 44$'$ du matin, ſeize minutes plûtôt que ſuivant l'obſervation qui a été faite à 12^h 0$'$. Il y a donc eu dans cette obſervation, de même que dans celle du mois de Septembre, un retardement dans la Marée qu'on peut attribuer auſſi au vent

de Sud-Eſt qui eſt oppoſé au mouvement de la Marée. Au contraire dans la haute Mer du 12 Avril 1702 la pleine Lune arriva à 0^h $13'$ du ſoir, & la haute Mer fut obſervée à 11^h $54'$ du matin le vent étant Nord quart au Nord-Oueſt beau frais. Suivant la regle la haute Mer devoit arriver à 11^h $54'$, c'eſt-à-dire 9 minutes plus tard qu'elle n'a été obſervée. Il y a donc eu dans cette obſervation une acceleration qu'on peut attribuer au vent de Nord quart au Nord-Oueſt, qui étant directement oppoſé à la Côte concouroit avec la Marée pour la faire avancer plûtôt qu'elle n'auroit fait, ſi elle eût été privée de ce ſecours.

Dans les autres Marées qui ont été obſervées par M. Baert dans les pleines Lunes, les vents étoient ou foibles ou diſpoſez de ſorte qu'ils ne pouvoient contribuer ou s'oppoſer directement au mouvement de la Marée; ainſi on n'a pas eu égard à l'effet qu'ils ont pû produire ſur les Marées.

Si l'on compare de même les obſervations de la haute Mer faite à Dunquerque par M. Baert en 15 nouvelles Lunes conſécutives depuis le 8 Avril 1701 juſqu'au 26 May 1702. On trouvera que celle qui a le plus acceleré eſt arrivée le 29 Novembre 1701 à 11^h $20'\frac{1}{2}$ du matin, la nouvelle Lune étant marquée ce jour-là à 10^h $11'$ du ſoir, & que celle qui a le plus retardé a été obſervée le 27 Avril 1702 à 0^h $47'$ du ſoir, la nouvelle Lune étant arrivée ce jour-là à 3^h $54'$ du matin. La difference entre le tems de ces deux Marées étant partagée en deux, on aura le tems moyen de la haute Mer à Dunquerque à 12^h $4'$ qui ne differe que de dix minutes du tems moyen des Marées dans les pleines Lunes.

Comme cette difference n'eſt pas ſenſible, on peut ſuppoſer que la haute Mer arrivée à Dunquerque dans les nouvelles de même que dans les pleines Lunes à 11^h $54'$ du matin; & ſe ſervant de la regle que l'on a preſcrite ci-deſſus pour déterminer la variation des Marées les jours des pleines Lunes, on aura l'heure de la haute Mer le 8 May

1701 à $12^h 15'$, à 20 minutes près de celle qui a été observée, & l'heure de la haute Mer le 27 Avril 1701 à $12^h 30'$, à 37 minutes près de l'observation ; ce qui concilie en partie ces deux observations qui étoient éloignées l'une de l'autre de 1 heure & 26 minutes.

A l'égard des vents qui sont marquez dans le tems de l'observation de la haute Mer dans les nouvelles Lunes, il ne paroît pas qu'ils contribuent à faire avancer ou retarder la haute Mer aussi regulierement qu'on l'a remarqué dans les pleines Lunes, ce qui peut venir de ce qu'il y a plusieurs causes compliquées ensemble qui contribuent au mouvement de la Marée, dont il y en a peut-être quelques-unes qui ne nous sont point assez connuës ; outre qu'il est difficile de s'assurer de l'heure précise des Marées ; le tems que la Mer étale, c'est-à-dire, qu'elle reste dans sa plus grande hauteur sans hausser ou baisser sensiblement, étant à ce que remarque M. Baert, quelquefois de 12, 15, 20 ou 30 minutes.

Il est à remarquer que les Marées qui s'observent aux jours des nouvelles & pleines Lunes, ne sont point les plus hautes Marées, mais qu'elles arrivent un, deux ou trois jours après, comme on le remarque par 30 observations qui en ont été faites, dont il n'y en a que deux où la plus haute Marée soit arrivée un jour avant la nouvelle Lune. Ainsi en prenant un milieu on peut supposer que la plus haute Marée arrive à Dunquerque deux jours après la nouvelle ou pleine Lune, comme M. Baert l'a remarqué.

On suppose ordinairement, que les plus grandes Marées arrivent dans les nouvelles & dans les pleines Lunes qui sont près des Equinoxes. Cependant par la comparaison des observations faites à Dunquerque, on voit que les plus grandes Marées sont arrivées le 30 Novembre 1701, où la hauteur du point fixe a été observée un jour après la nouvelle Lune de 3 pieds 2 pouces ; & le 27 & 28 Février 1702 où on l'a trouvée de 3 pieds 3 pouces.

Il est vrai que l'on peut attribuer la grande hauteur de

ces deux Marées à quelque cauſe extraordinaire ; car le 29 Novembre 1701 jour de la nouvelle Lune, la haute Mer fut obſervée de 6 pieds 8 pouces au deſſous du point fixe qui eſt une des plus baſſes Marées qui ait été obſervée, & le jour ſuivant on la trouva de 3 pieds 2 pouces, qui eſt comme on l'a remarqué ci deſſus la plus haute Marée qui ait été obſervée à Dunquerque. Il faiſoit ce jour-là & le précedent un très-grand vent Sud-Oueſt qui pourroit avoir refoulé le 29 Novembre jour de la nouvelle Lune les eaux de la Mer, & les empêcher de monter à leur hauteur ordinaire ; après quoi ces eaux revenant avec plus d'impetuoſité, auroient ſurmonté le jour ſuivant 30 Novembre leur état naturel, & fait pour ainſi dire, une eſpece de vibration ou balancement ; en effet on a remarqué, que le 1 Decembre la haute Mer fut obſervée de 4 pieds 2 pouces au deſſous du point fixe plus baſſe d'un pied que le jour précedent, & le 2 Decembre on l'on l'obſerva de 3 pieds 11 pouces plus haute que le 1 Decembre, au lieu que ſuivant la regle ordinaire elle auroit dû toûjours diminuer de hauteur ; de ſorte qu'on peut ſuppoſer que cette eſpece de balancement alternatif cauſé par un vent violent du Sud-Oueſt a duré quatre jours.

On a remarqué à peu près le même balancement dans l'obſervation du 27 & 28 Février 1702 où la hauteur du point fixe au deſſus de la Mer fut obſervée de 3 pieds 3 pouces peu differente de celle du 29 Novembre 1701. Le 26 Février jour de la nouvelle Lune la haute Mer fut obſervée 5 pieds 6 pouces au deſſous du point fixe par un grand vent Nord-Oueſt. Le 27 au matin le vent étoit Sud-Oueſt, & à 10^{h} il ſe mit au Nord-Oueſt, la haute Mer fut obſervée ce jour-là 3 pieds 3 pouces au deſſous du point fixe, plus haute de 2 pieds 3 pouces que le jour précedent. Elle fut obſervée le 28 à la même hauteur. Le 1 Mars la haute Mer fut trouvée plus baſſe de 2 pieds 7 pouces que le 28 Février, & le 2 Mars elle fut obſervée plus haute que le 1 Mars d'environ un pied quoiqu'elle dût diminuer de hauteur ; ainſi il y a eu encore une eſpece de balan-

cement, à la réserve qu'il n'y a point eu de variation entre la hauteur obſervée le 27 & le 28 Février, ce qui peut venir de ce que le vent changea le 27 au matin de ſituation, ayant paſſé aſſez ſubitement du Sud-Eſt au Nord-Oueſt.

On peut donc ſuppoſer avec aſſez de fondement, que les vents contribuent à augmenter ou diminuer la hauteur des Marées, de même qu'on a fait voir qu'ils peuvent y cauſer quelque acceleration ou retardement ; & il y a apparence que la diſpoſition du lit de la Mer & la ſituation des Côtes concourent auſſi à produire les variations qu'on y remarque dont il eſt trés difficile de donner des regles exactes.

Les plus grandes Marées qui ſuivent les nouvelles & pleines Lunes n'arrivant pas toûjours à Dunquerque vers les Equinoxes, on a conſideré s'il n'y auroit pas quelque autre cauſe qui pût contribuer à les faire augmenter ou baiſſer, comme par exemple les diverſes diſtances de la Lune à la Terre. Car ſi l'on ſuppoſe, comme il y a beaucoup d'apparence que la cauſe du flux & du reflux de la Mer vient de la preſſion de la Lune ſur la matiere qui eſt entre la Lune & la Terre, il ſuit de-là que plus la Lune eſt éloignée de la Terre, moins cette preſſion eſt grande & la Marée par conſéquent doit être plus baſſe. Au contraire plus la Lune eſt près de la Terre plus la preſſion eſt grande & plus la Marée doit être élevée.

Suivant nôtre Théorie de la Lune qui repreſente aſſez exactement le mouvement de cette Planete & ſes diverſes diſtances à la Terre, telles qu'on les obſerve par la variation apparente de ſon diametre, on ſuppoſe qne lorſque le lieu du Soleil concourt avec le lieu de l'Apogée de la Lune, alors la Lune étant en conjonction eſt dans ſa plus grande diſtance de la Terre, & au contraire dans ſa plus petite diſtance lorſqu'elle eſt en oppoſition. Six mois après ou environ lorſque le Soleil eſt dans le Perigée de la Lune, alors la Lune eſt dans ſa plus petite diſtance à la Terre dans les conjonctions, & dans ſa plus

grande dans les oppoſitions ; & lorſque le Soleil eſt de côté & d'autre éloigné de 3 Signes de l'Apogée ou du Perigée de la Lune, alors la Lune eſt à égale diſtance de la Terre, ſoit qu'elle ſoit en conjonction ou en oppoſition.

Si l'on compare preſentement les obſervations de M. Baert qui ont été faites lorſque le Soleil étoit près de l'Apogée & du Perigée de la Lune ou vers les moyennes diſtances, on trouve que les grandes & petites Marées tant dans les nouvelles & pleines Lunes s'accordent aux diverſes diſtances de la Lune à la Terre, & que lorſque le Soleil eſt dans les moyennes diſtances, alors la hauteur des Marées eſt à peu près égale dans les conjonctions ou oppoſitions qui ſe ſuivent immédiatement.

Par exemple dans la pleine Lune qui eſt arrivée le 21 Mars 1701, le Soleil étoit près de l'Apogée de la Lune ; ſa diſtance à l'Apogée étant de $0^{s}\ 17^{d}\ 16'$. La Lune qui étoit alors en oppoſition étoit donc ſuivant nôtre Théorie près de la Terre, & par conſéquent la Marée devoit être haute. En effet on obſerva le 26 Mars deux jours après la pleine Lune la hauteur du point fixe ſur le niveau de la Mer de 4 pieds 3 pouces qui eſt une des plus grandes marées qui aïent été obſervées.

Dans la nouvelle Lune ſuivante qui arriva le 8 Avril, la diſtance du Soleil à l'Apogée de la Lune étant de $1^{s}\ 0^{d}\ 21'$, la Lune étoit alors plus éloignée de la Terre que dans l'oppoſition précedente; d'où il ſuit que la Marée devoit être plus baſſe comme on l'obſerva en effet, la hauteur du point fixe ſur le niveau de la Mer ayant été trouvée le 10 Avril de 5 pieds 8 pouces. Il eſt vrai que ſuivant l'opinion commune, par laquelle on ſuppoſe que les plus grandes Marées arrivent près des Equinoxes, la hauteur de la Marée devoit être plus grande le 26 Mars que le 10 Avril, mais par la même raiſon dans la pleine Lune ſuivante du 22 Avril la diſtance de l'Equinoxe étant plus grande la Marée auroit dû être plus petite que le 10 Avril, au lieu qu'elle fut obſervée le 24 Avril plus haute de

de 1 pied 1 pouce que le 10 Avril, ce qui s'accorde à la ſituation de la Lune qui étoit plus éloignée de la Terre le 8 Avril que le 22. D'où l'on voit que les plus grandes & les plus petites Marées ont un plus grand rapport à l'éloignement de la Lune à la Terre, qu'aux diſtances du Soleil aux Equinoxes.

Pour faire cette comparaiſon avec plus de facilité, on a dreſſé la Table ſuivante, où l'on a marqué dans la premiere colonne les jours & heures des nouvelles & pleines Lunes; dans la 2ᵉ, le tems de la haute Mer obſervé à Dunquerque le jour des nouvelles & pleines Lunes; dans la 3ᵉ, le tems de la haute Mer calculé ſuivant la regle preſcrite ci-deſſus; dans la 4ᵉ, la hauteur du point fixe ſur le niveau de la Mer dans le tems de la haute Mer. Dans la 5ᵉ, la diſtance du Soleil à l'Apogée de la Lune; dans la 6ᵉ, la diſtance de la Lune à la Terre dans les nouvelles & pleines Lunes par rapport à la diſtance moyenne que l'on ſuppoſe de 100000 parties; dans la 7ᵉ, le jour de la plus haute Marée; & dans la 8ᵉ, la hauteur du point fixe ſur le niveau de la Mer.

On obſervera dans cette Table, que lorſque la diſtance du Soleil à l'Apogée de la Lune, eſt d'environ 3 ou 9 Signes; alors la hauteur de la Mer au jour de la plus haute Marée eſt à peu près égale tant dans les conjonctions que dans les oppoſitions.

A l'égard des plus petites Marées hors des nouvelles & pleines Lunes, elles n'arrivent pas ordinairement dans les quartiers de la Lune, mais un, deux, ou trois jours après; de ſorte qu'on peut ſuppoſer qu'elles arrivent deux jours après le premier & le dernier quartier, de même que l'on a obſervé que les plus grandes Marées arrivent pour l'ordinaire deux jours après la nouvelle ou pleine Lune.

La plus petite Marée eſt arrivée le 8 Février 1702, la haute Mer étant alors 10 pieds 2 pouces au deſſous du point fixe, & la plus grande Marée a été obſervée comme l'on a dit ci-deſſus le 30 Novembre 1701, la haute Mer étant 3 pieds 2 pouces au deſſous de ce point. Il y a donc

TABLE

DU TEMPS ET DE LA HAUTEUR DES MARÉES

dans les Nouvelles & Pleines Lunes à Dunquerque.

JOURS ET HEURES des Nouvelles & Pleines Lunes.	Temps de la haute Mer observé.		Temps de la haute Mer calculé.		Hauteur du point fixe.			Distance du Soleil à l'Apogée de la Lune.			Distance de la Lune à la terre dans les Conj. & Opp.	Jour de la plus haute Marée	Hauteur de la Mer.		
1701.	H.	M.	H.	M.	Pies.	Pou.	L.	S.	D.	M.			Piés.	Pou.	L.
☉ Le 24 Mars à 8h 36′ m.	11	45	12	1	4	11		0	17	16	93778	26 Mars.	4	3	
● Le 8 Avril à 10 54 m.	12	21	11	56	5	11		1	0	21	105589	10 Avril.	5	8	
☉ Le 22 Avril à 5 16 so.	11	44	11	43	5	3						24 Avril.	4	7	
● Le 8 May à 1 42 m.	12	35	12	15	6	2						11 May.	6	1	
☉ Le 22 May à 2 18 m.	12	8	12	13	5	3						23 May.	5	1	
● Le 6 Juin à 2 28 so.	11	50	11	49	6	6						7 Juin.	6	0	
☉ Le 20 Juin à 0 26 so.	11	43	11	53	6	2		3	2	33	99713	21 Juin.	5	7	6
● Le 6 Juillet à 0 58 m.	12	9	12	16	5	10		3	16	2	98372	7 Juillet.	5	5	6
☉ Le 19 Juillet à 11 50 so.	11	24	11	30	6	6						22 Juillet.	5	10	
● Le 4 Aoust à 10 15 m.	11	48	11	57½	5	7	6					6 Aoust.	4	9	6
☉ Le 18 Aoust à 2 6 so	12	2	11	50	5	10						22 Aoust.	5	1	6
● Le 2 Septemb. à 6 5 so.	11	37	11	42	5	7	6					6 Sept.	3	10	6
☉ Le 17 Septemb. à 5 56 m.	12	24	12	6	6	1		5	18	10	106340	19 Sept.	5	3	
● Le 2 Octobre à 2 20 m.	11	46	12	13	3	11		6	1	13	93460	2 Oct.	3	11	
☉ Le 16 Octobre à 11 24 so.	11	42	11	31	6	5						17 Octob.	4	0	
● Le 31 Octobre à 11 24 m.	11	39	11	55	4	6	4					30 Octob.	3	10	6
☉ Le 15 Novemb à 5 4 so	12	0	11	44	5	10						16 Nov.	5	6	
● Le 29 Novemb. à 10 11 so.	11	20½	11	33½	6	8						30 Nov.	3	2	
☉ Le 15 Decemb. à 10 16 m.	11	55	11	57	6	11						17 & 18 D.	6	3	
● Le 29 Decemb. à 10 47 m.	11	51½	11	56	5	0						30 Dec.	3	7	
1702.												1702.			
☉ Le 14 Janvier à 1 12 m.	12	9	12	16	5	6		9	4	37	100013	14 Janv.	5	6	
● Le 28 Janvier à 1 38 m.	11	46	12	15	5	9		9	17	19	100477	30 Janv.	5	6	
☉ Le 12 Fevrier à 3 2 so	11	32	11	48	6	2						13 Fev.	4	6	
● Le 26 Fevrier à 6 15 so.	11	57	11	41	5	6						27 & 28 F.	3	3	
☉ Le 14 Mars à 1 48 m.	12	13½	12	14	5	6						15 Mars.	4	6	
● Le 28 Mars à 11 7 m.	12	10½	11	56	5	10						30 Mars.	5	2	
☉ Le 12 Avril à 0 13 so.	11	45	11	53	4	3		11	22	55	83519	15 Avril.	3	10½	
● Le 27 Avril à 3 49 m.	12	47	12	10	5	11		0	5	52	106496	26 Avril.	5	4	
☉ Le 11 May à 4 59 so	11	36	11	44	5	6						13 May.	4	4	
● Le 26 May à 8 27 so	11	47	11	37	6	10						29 May.	6	4	

eu à Dunquerque une difference de 7 pieds entre les plus grandes & les plus petites Marées qui ont été obſervées dans le tems de la haute Mer. Mais ce qu'il y a de remarquable, eſt que la hauteur des Marées qui arrive dans les quartiers de la Lune, paroît dépendre auſſi des diverſes diſtances de la Lune à la Terre; car l'on obſerve que la haute Mer eſt plus élevée lorſque la Lune eſt proche de la Terre, qu'elle eſt plus baſſe au contraire lorſqu'elle en eſt plus éloignée; & qu'elle eſt à peu près à la même hauteur dans le premier & dernier quartier lorſque la Lune ſe trouve à l'égale diſtance de la Terre.

Suivant la Théorie de la Lune, lorſque le Soleil eſt éloigné de 3 Signes de l'Apogée de la Lune ou environ, alors la Lune dans ſon premier quartier eſt dans le Perigée; & dans ſon dernier quartier dans l'Apogée; par conſéquent la haute Mer doit être plus grande dans le premier quartier & plus baſſe dans le dernier quartier. Au contraire lorſque le Soleil eſt éloigné de l'Apogée de la Lune d'environ 9 Signes, alors la Lune dans ſon premier quartier eſt dans l'Apogée; & dans ſon dernier quartier dans le Perigée, par conſéquent la haute Mer doit être plus baſſe dans le premier que dans le dernier quartier. Et lorſque le Soleil eſt dans l'Apogée ou dans le Perigée de la Lune, alors la Lune eſt à égale diſtance de la Terre, tant dans le premier que dans le dernier quartier; & par conſéquent les Marées doivent être égales de part & d'autre.

On remarquera avec plus de facilité l'accord qu'il y a entre la hauteur des Marées dans les quadratures & les diverſes diſtances de la Lune à la Terre, par le moyen de la Table ſuivante du tems & de la hauteur des Marées dans les Quadratures à Dunquerque.



TABLE

DU TEMPS ET DES HAUTEURS DES MARE'ES dans les Quadratures à Dunquerque.

Jours et Heures des Quadratures.	Temps de la haute Mer observé		Temps de la haute Mer calculé.		Hauteur du point fixe.			Distance du Soleil à l'Apogée de la Lune.			Distance de la Lune à la Terre dans les Quadrat.	Jour de la plus petite Marée.	Hauteur de la Mer.		
1701.	H.	M.	H.	M.	Piés.	Pou.	L.	S.	D.	M.			Piés.	Pou.	L.
3. □ Le 31 Mars à 6h 32′m.	5	36	5	27	8	6						2 & 3 Avr.	9	2	
1. □ Le 16 Avril à 2 8 m.	5	40	5	36	9	3	6					17 Avril.	9	5	
3. □ Le 29 Avril à 10 25 so.	4	44	4	55	8	1	6					1 May.	9	10	
1. □ Le 15 May à 9 6 m.	5	30	5	22	8	4	6					16 May.	8	8	
3. □ Le 29 May à 3 38 so.	5	26	5	9	8	7						30 May	9	4	
1. □ Le 13 Juin à 2 26 so.	5	7 ½	5	11 ½	7	7	4	2	26	40	97915	14 Juin.	7	11	2
3. □ Le 28 Juin à 9 14 m.	5	16 m.	5	22	8	7	4	3	9	17	106250	30 Juin.	9	3	
1. □ Le 12 Juillet à 7 17 so.	4	48 ½	5	2	6	6	6					15 Juillet.	8	1	6
3 □ Le 28 Juillet à 2 23 m.	5	20 ½	5	36	8	8	2					29 Juillet.	9	0	
1. □ Le 11 Aoust à 1 14 m.	5	23	5	38	7	0	6					15 Aoust.	8	6	
3. □ Le 26 Aoust à 6 6 so.	4	21	5	4	8	0	8					29 Aoust.	9	3	
1. □ Le 9 Sept. à 9 20 m.	5	39	5	22	5	7	6					11 Sept.	8	7	
3 □ Le 25 Sept. à 7 58 m.	5	18	5	24	9	2	6	5	25	8	102165	27 Sept.	10	1	
1. □ Le 8 Octob. à 8 47 so.	4	51	4	59	7	0		6	6	30	102275	11 Octob.	9	7	
3. □ Le 24 Octob. à 7 50 so.	4	43	5	1	8	5	6					26 Octob.	9	5	
1. □ Le 7 Novem. à 0 17 so.	5	34	5	16	6	11						9 Nov.	9	1	
3. □ Le 23 Novem. à 6 0 m	5	24 ½	5	28	7	5						26 Nov.	8	4	6
1 □ Le 7 Decem. à 7 31 m	5	58	5	25	7	5						8 Dec.	9	6	6
3. □ Le 22 Decem à 8 48 so.	5	15 ½	4	59	7	6	8					23 Dec.	7	11	
1702.															
1. □ Le 6 Janvier à 5 47 m.	5	51	5	29	8	4	6	8	28	20	106425	5 Janv.	8	5	
3 □ Le 20 Janvier à 10 41 so.	4	49	4	55	7	8		9	10	2	97717	20 Janv.	7	8	
1. □ Le 5 Fevrier à 2 34 m.	5	18	5	35 ½	7	8						8 Fevr.	10	2	
3. □ Le 19 Fevrier à 6 33 m.	5	23	5	27	6	2						21 Fevr.	8	7	
1. □ Le 6 Mars à 10 24 so.	4	33 ½	4	55	9	2						8 Mars.	10	1	
3. □ Le 20 Mars à 3 47 so.	4	35	5	9	7	10						22 Mars.	9	7	
1. □ Le 5 Avril à 2 9 so.	4	57	5	12	5	2						8 Avril.	8	10	
3 □ Le 19 Avril à 3 39 m.	5	27 ½	5	33	8	2		11	28	56	101725	20 Avril.	9	3	
1. □ Le 5 May à 1 59 m.	5	45 ½	5	36 ½	9	3	3	0	12	40	100856	5 May.	9	3	3
3. □ Le 18 May à 4 4 so.	5	17	5	10	8	4						19 May.	9	1	3

Si l'on confidere prefentement le retardement des Marées d'un jour à l'autre, on trouvera qu'il eft fujet à beaucoup d'irrégularités, y ayant du 2 au 3 Avril 1701 un retardement dans la Marée du $1^h 54'$, & du 15 au 16 Octobre une anticipation de $30'$ au lieu de quelque retardement qu'on y auroit dû obferver. Ainfi il feroit difficile de donner des regles pour trouver à quelques minutes près le tems de la haute Mer à Dunquerque pour tous les jours donnés, de même qu'on l'a fait pour les jours de la nouvelle & pleine Lune.

On a d'abord examiné, fi ces irrégularités avoient quelque analogie avec celles du mouvement vrai de la Lune, qui anticipe ou retarde à l'égard du moyen mouvement; mais ayant trouvé qu'elles étoient fouvent d'un fens contraire, on a cherché ailleurs les caufes de ces variations.

Pour cet effet nous avons comparé enfemble le tems de la haute Mer obfervé les jours des Quadratures & nous avons trouvé que le jour du premier & du dernier quartier de la Lune la haute Mer arrive à Dunquerque à peu près à la même heure du jour, de même que l'on obferve que la haute Mer arrive à peu près à la même heure dans les nouvelles & pleines Lunes.

Entre 29 obfervations qui ont été faites dans les Quadratures, celle où la haute Mer a le plus acceleré eft arrivée le 26 Aouft 1701 à $4^h 31'$, & celle qui a le plus retardé eft arrivé le 7 Decembre 1701 à $5^h 58'$. Ainfi il y a une variation dans le tems de la haute Mer au jour des Quadratures de $1^h 27'$, plus grande feulement d'une minute que celle que l'on a obfervée dans les nouvelles & pleines Lunes que l'on a trouvé ci-deffus de $1^h 26'$.

Pour donner quelque regle de cette variation on fuppofe que le tems moyen de la haute Mer dans les Quadratures arrive à Dunquerque à $5^h 6'$ du foir, & on ajoûte ou ôte de ce tems 2 minutes pour toutes les heures que le tems de la Quadrature marqué dans quelques Ephemerides anticipe ou fuit ce tems moyen de la haute Mer.

Par exemple le 31 Mars 1701 jour de la Quadrature, la haute Mer a été obſervée à Dunquerque à $5^h\ 36'$ du ſoir. Le dernier quartier de la Lune eſt marqué ce jour là dans la Connoiſſance des Temps à $6^h\ 32'$ du matin. La difference entre $6^h\ 32'$ du matin & $5^h\ 6'$ du ſoir temps moyen de la haute Mer dans les Quadratures eſt de $10^h\ 34'$, auxquels il répond à raiſon de 2 minutes par heure 21 minutes, qui étant ajoûtées à $5^h\ 6'$ donnent $5^h\ 27'$ pour le tems de la haute Mer du 31 Mars 1701 à 9 minutes près du tems qui a été obſervé.

Le tems moyen de la haute Mer arrivant à Dunquerque dans les nouvelles & pleines Lunes à $11^h\ 54'$ du matin, & dans les Quadratures à $5^h\ 6'$, on a $5^h\ 12'$ pour l'intervalle entre le tems des Marées depuis les nouvelles & pleines Lunes juſqu'aux Quadratures, qui eſt beaucoup plus court que depuis les Quadratures juſqu'aux nouvelles & pleines Lunes. Auſſi on remarque un plus grand retardement d'un jour à l'autre dans les Marées qui ſuivent les Quadratures, que dans celles qui ſuivent les nouvelles & pleines Lunes, dont on peut attribuer la cauſe à ce que les Marées étant plus baſſes vers les Quadratures que vers les pleines Lunes, il faut que la Mer, qui augmente de hauteur d'un jour à l'autre à meſure qu'on s'approche de la nouvelle ou pleine Lune, employe plus de tems pour ſurmonter la hauteur du jour précedent; au lieu que depuis les nouvelles & pleines Lunes juſqu'aux Quadratures, la Mer ne trouvant aucun obſtacle & aidée par ſon propre poids, deſcend avec plus de viteſſe, & rend par conſéquent les intervalles entre les Marées plus courts.

Après avoir établi le tems de la haute Mer dans les nouvelles & pleines Lunes & dans les Quadratures; on a conſideré toutes les obſervations des Marées faites à Dunquerque pendant l'eſpace de plus de 14 mois, & l'on a déterminé le tems moyen de la haute Mer pour tous les jours tant après les nouvelles & pleines Lunes qu'après les Quadratures.

On a auſſi dreſſé des regles des variations auſquelles elles ſont ſujettes, ayant égard au tems des nouvelles & pleines Lunes & des Quadratures qui précedent le jour donné.

Suivant ces regles, entre 434 obſervations qui ſont rapportées par M. Baert, il n'y en a que deux ou le tems de la haute Mer déterminé par la regle, ſoit éloigné de 54 minutes d'heure de celui qui a été obſervé. Cette difference ne doit pas paroître trop grande ſi l'on conſidere toutes les irrégularités qui peuvent ſe rencontrer dans les obſervations; car l'on peut douter quelquefois d'une heure entiere dans la détermination du tems de la haute Mer, comme on le remarque par l'obſervation du 27 Février 1702 où la haute Mer fut obſervée d'abord à $0^h\ 8'$ du ſoir. La Mer baiſſa enſuite de quelques pouces, & revint à $0^h\ 57'$ à la même hauteur où elle avoit eté 49 minutes auparavant; elle y reſta juſqu'à $1^h\ 10'$ du ſoir, & M. Baert détermina ce jour la haute Mer à $1^h\ 7'\frac{1}{2}$.

Pour trouver avec facilité le tems de la haute Mer pour tous les jours donnés, on a dreſſé la Table ſuivante du retardement des Marées tant après les nouvelles & pleines Lunes qu'après les Quadratures. On a marqué dans cette Table les Marées de douze heures en douze heures, afin de pouvoir trouver les Marées du matin & du ſoir.

On trouvera par le moyen de cette Table & des Regles ſuivantes, le vrai tems de la haute Mer à Dunquerque pour tous les jours donnés, dont les Pilotes pourront ſe ſervir pour choiſir les tems les plus propres pour entrer dans le Port de Dunquerque ou pour en ſortir.

11h 54′ Temps moyen de la haute Mer à Dunquerque le jour des nouvelles & pleines Lunes.	*5h 6′ Temps moyen de la haute Mer à Dunquerque le jour des Quadratures.*

TABLE DU RETARDEMENT des Marées.

Jours & heures aprés la nouvelle ou pleine Lune,		Retardement des Marées.		Diff.	Jours & heures aprés le premier ou dern. quart.		Retardement des Marées.		Diff.
Jou.	Heu	Heur.	Min.	Min.	Jou.	Heur	Heur.	Min.	Min.
0	0	0	0		0	0	0	0	
	12	0	26	26		12	0	32	32
1	0	0	50	24	1	0	1	8	36
	12	1	11	21		12	1	49	41
2	0	1	30	19	2	0	2	32	43
	12	1	48	18		12	3	11	39
3	0	2	6	18	3	0	3	44	33
	12	2	24	14		12	4	14	30
4	0	2	42	18	4	0	4	40	26
	12	3	1	19		12	5	4	24
5	0	3	21	20	5	0	5	28	24
	12	3	41	20		12	5	50	22
6	0	4	2	21	6	0	6	12	22
	12	4	21	19		12	6	34	22
7	0	4	39	18	7	0	6	54	20

PREMIERE REGLE.

Trouver à Dunquerque le temps de la haute Mer pour les jours de la nouvelle & pleine Lune & des Quadratures.

Cherchez dans quelques Ephemerides, comme la Connoiſſance des Temps, l'heure de la nouvelle ou pleine Lune & des Quadratures, & prenez la difference entre cette heure & le temps moyen de la haute Mer marqué à Dunquerque pour le jour de la phaſe. Doublez cette difference, & vous aurez le nombre des minutes qu'il faut ajoûter au temps moyen de la haute Mer, ſi l'heure de la phaſe anticipe le temps moyen de la haute Mer; & qu'il

qu'il faut retrancher au contraire, si cette heure suit le tems de la haute mer : & vous aurez le vrai tems de la haute mer pour le jour de la nouvelle ou pleine Lune ou des Quadratures.

I. EXEMPLE.

On cherche le tems de la haute mer le jour de la pleine Lune d'Avril de l'année 1701.

On trouvera dans la Connoissance des Tems, que la pleine Lune est arrivée le 22 Avril à 5^h 16′ du soir. La difference entre 5^h 16′ du soir, heure de la pleine Lune, & 11^h 54′ du matin, tems moyen de la haute mer dans les nouvelles & pleines Lunes à Dunquerque marqué dans la Table, est de 5^h 22′, dont le double qui est 10′ 44″. ou 11′ est le nombre des minutes qu'il faut retrancher de 11^h 54′ à cause que l'heure de la pleine Lune suit le temps de la haute mer, & on aura le vrai temps de la haute mer du 22 Avril à 11^h 43′ du matin. M. Baert l'a observé ce jour-là à 11^h 44′.

II. EXEMPLE.

On cherche le temps de la haute mer le jour du premier quartier de la Lune du mois d'Avril 1701.

On trouvera dans la Connoissance des Tems, que le premier quartier de la Lune est arrivé le 16 Avril à 2^h 8′ du matin. La difference entre cette heure & 5^h 6′ du soir, tems moyen de la haute mer à Dunquerque dans les Quadratures, est 14^h 58′ dont le double qui est 30 est le nombre des minutes qu'il faut ajoûter à 5^h 6′, à cause que l'heure de la Quadrature anticipe le tems moyen de la haute mer, & on aura le vrai Tems de la haute mer du 16 Avril à 5^h 36′ du soir.

M. Baert l'a observé ce jour-là à 5^h 40′.

SECONDE REGLE.

Trouver à Dunquerque le tems de la haute Mer pour tous les jours donnés.

Cherchez d'abord par la premiere Regle le tems de la haute mer pour le jour de la nouvelle ou pleine Lune,

ou de l'une des Quadratures, qui précede immédiatement le jour donné. Ajoûtez-y le retardement des marées qui convient à la difference entre le jour donné & le jour de la phase précédente, & vous aurez le tems de la haute mer pour le jour cherché. Pour trouver le temps de la haute mer, qui précede ou qui suit immédiatement celle qu'on a trouvée, il faudra retrancher ou ajoûter la difference qui convient à 12 heures.

I. EXEMPLE.

On cherche l'heure de la haute mer le 26 Mars de l'année 1701.

On trouve dans la Connoissance des Tems que la phase qui a précedé immédiatement le 26 Mars est la pleine Lune qui est arrivée le 24 Mars à $8^h\ 36'$ du matin. La difference entre $8^h\ 36'$ du matin, & $11^h\ 54'$ tems moyen de la haute mer à Dunquerque est $3'\ 18''$, dont le double $6'\ 36''$ étant ajoûté à $11^h\ 54'$ donne le tems de la haute mer à Dunquerque le 24 Mars jour de la pleine Lune à $12^h\ 1'$. Ajoûtez-y $1^h\ 30''$ qui est le retardement des marées qui convient à deux jours après la pleine Lune, & vous aurez le tems de la haute mer le 26 Mars 1701 à $1^h\ 31'$ du soir précisément, de même qu'il a été observé par M. Baert.

Pour trouver le tems de la haute mer qui est arrivée le matin, prenez la difference entre $1^h\ 30'$ & $1^h\ 14'$ qui est $19'$, qui étant retranchée de $1^h\ 31'$ temps de la haute mer le 26 Mars au soir, donne $1^h\ 12'$ pour le vrai tems de la haute mer le matin du 26 Mars.

II. EXEMPLE.

On cherche l'heure de la haute mer le 6 Avril de l'année 1701.

On trouve dans la Connoissance des Tems que le 3e quartier de la Lune, qui est la phase qui précede immédiatement le jour donné, est arrivé le 31 Mars 1701 à $6^h\ 32'$ du matin.

La difference entre $6^h\ 32'$ du matin, tems du dernier quartier, & $5^h\ 6'$ du soir temps moyen de la haute mer

à Dunquerque dans les quadratures eſt 10^{h} 34′, dont le double 21′ 8″ étant ajoûté à 5^{h} 6′ à cauſe que l'heure du 3e quartier eſt avant 5^{h} 6′; on aura le temps de la haute mer à Dunquerque le 31 Mars 1701 jour du dernier quartier à 5^{h} 27′ du ſoir. Prenez la difference entre le 31 Mars jour du 3e quartier & le 6 Avril, qui eſt de 6 jours auſquels il répond dans la Table du retardement des marées 6^{h} 12′, qui étant ajoûtées â 5^{h} 27′ donne le temps de la haute mer à Dunquerque le 6 Avril 1701 à 11^{h} 39′ du ſoir.

Pour trouver le temps de la haute mer qui eſt arrivée le matin, prenez la difference entre 6^{h} 12′ & 5^{h} 50′ qui eſt 22′, qui étant retranchez de 11^{h} 39′ tems de la haute mer le 6 Avril au ſoir, donne 11^{h} 17′ pour le vrai tems de la haute mer le matin du 6 Avril. M. Baert l'a obſervé ce jour-là à 11^{h} 21′ du matin.

TROISIÉME REGLE.

Trouver dans un mois donné à Dunquerque le tems des plus grandes marées qui ſont les plus propres pour entrer ou ſortir du Port.

Cherchez par la Regle précedente l'heure de la haute mer, qui arrive deux jours après la nouvelle & la pleine Lune de ce mois, & vous aurez l'heure cherchée.

EXEMPLE.

La pleine Lune du mois de Mars étant arrivée le 24 à 8^{h} 36′ du matin, on cherchera par la 2e Regle le tems de la haute mer du 26 Mars qu'on a trouvé dans le 1. Ex. devoir arriver à 1^{h} 31′ du ſoir. M. Baert a obſervé ce jour-là la haute mer à 1^{h} 31′ du ſoir, la marée étoit plus haute ce jour-là que les jours précedens & ſuivans.

QUATRIE'ME REGLE.

Trouver le jour & l'heure de la plus grande marée qui doit arriver dans un mois donné.

Prenez par le moyen des Tables Astronomiques le diametre de la Lune pour le jour de la nouvelle & pleine Lune. Si le diametre de la Lune est plus grand le jour de la nouvelle Lune, la marée sera la plus haute du mois donné deux jours après la nouvelle Lune. Si le diametre de la Lune est plus grand le jour de la pleine Lune, la marée sera la plus haute du mois proposé deux jours après la pleine Lune.

EXEMPLE.

On cherche la plus grande marée du mois d'Avril 1701. On trouve par les Tables le diametre de la Lune le 8 Avril jour de la nouvelle Lune de 14′ 53″, & le 22 Avril jour de la pleine Lune de 16′ 24″. Donc la plus grande marée du mois d'Avril doit arriver le 24 de ce mois, comme il résulte des observations de M. Baert.

CINQUIE'ME REGLE.

Trouver le jour & l'heure de la plus petite marée qui doit arriver dans un mois donné.

Cherchez dans des Tables Astronomiques le diametre de la Lune pour le jour du premier & du dernier quartier. Si le diametre de la Lune est plus petit le jour du premier quartier, la marée sera la plus petite du mois donné deux jours après le premier quartier. Si le diametre de la Lune est plus petit le jour du dernier quartier, la marée sera la plus petite du mois donné.

EXEMPLE.

On cherche la plus petite marée du mois de Juin 1701. On trouve par les Tables le diametre de la Lune le 13 Juin jour du premier quartier de 16′ 6″, & le 28 Juin jour du dernier quartier de 14′ 47″. Donc la plus petite ma-

rée du mois de Juin 1701 a dû arriver le 30 de ce mois, conformément aux obſervations de M. Baert.

OBSERVATIONS

Sur une eſpece de Talc qu'on trouve communément proche de Paris au-deſſus des bancs de pierre de plâtre.

PAR M. DE LA HIRE.

1710. 19. Juillet.

L'Une des pierres tranſparentes des plus curieuſes que nous ayons & qui peut donner plus d'exercice aux Phyſiciens pour rendre raiſon de ſes effets, eſt celle qu'on appelle communément le *Cryſtal d'Iſlande.* C'eſt une pierre fort tranſparente & bien plus claire que le plus beau verre; mais on pourroit l'appeller bien plus juſtement un Talc qu'un Cryſtal, pour les raiſons que nous dirons enſuite. C'eſt à M. Eraſme Bartholin célébre Mathematicien Danois qu'on eſt redevable de la découverte de cette pierre, puiſqu'il a été le premier qui en ait donné une connoiſſance au public, dans un Livre qu'il a compoſé à ce ſujet, lequel eſt imprimé à Copenhague & à la Haye en 1670. M. Hugens s'eſt auſſi fort étendu ſur les proprietés de cette pierre dans ſon Traité de la Lumiere imprimé à Leide en 1690.

Comme je me ſuis trouvé entre les mains deux morceaux fort gros de cette pierre, j'ai voulu l'examiner par un très-grand nombre d'expériences & en differentes manieres, tant pour ma propre ſatisfaction, que pour verifier ce qui en a été rapporté par ces Meſſieurs qui l'ont conſiderée avant moi.

Ce n'eſt pas ſans raiſon qu'on peut appeller cette pierre plûtôt un *Talc* qu'un *Cryſtal*, puiſqu'une de ſes principales proprietés eſt de ſe fendre aſſez facilement en tous ſens, mais toûjours parallelement à l'une des ſix faces

qui en forment la figure, laquelle eſt toûjours un parallelepipede obliqu'angle, & par conſéquent tous les fragmens feront des parallelepipedes dont les huit angles ſolides qui ſont de deux eſpeces, ſeront ſemblablement poſés dans les plus petits morceaux comme dans les plus gros.

Les ſix faces qui forment ce corps ſont des parallelogrammes obliqu'angles, & dont les deux angles obtus oppoſés ſont chacun de 101 degré & 30 minutes, & par conſéquent les deux autres qui en doivent être les ſupplémens, ſont chacun de 78 degrés 30 minutes. C'eſt ce que m'ont donné mes obſervations.

Il y a dans ce parallelepipede deux angles ſolides ſeulement, qui ſont oppoſés & qui ſont formés par trois des angles obtus des faces; les ſix autres ſont chacun compris par un des angles obtus & par deux des aigus; car il y a en tout 12 angles obtus égaux entr'eux, & 12 angles aigus auſſi égaux entr'eux.

Les inclinaiſons des faces ſont deux eſpeces d'angles dont il y a ſix obtus & chacun de 105 degrés, & ſix d'aigus de 75 degrés chacun qui ſont les ſupplémens des autres. Ces meſures ſont un peu differentes de celles de M. Bartholin & de M. Hugens, ce qui peut venir de la difficulté qu'on a pour en faire les obſervations avec exactitude, à cauſe que les angles aigus n'y ſont pas auſſi bien terminés que les obtus.

Voilà ce qui regarde la figure de cette pierre; mais ce qu'elle a de plus conſiderable, c'eſt de doubler tous les objets qu'on regarde au travers de deux de ſes faces paralleles quelles qu'elles puiſſent être, & la diſtance entre les deux images apparentes d'un même objet, eſt d'autant plus grande que les faces ſont plus éloignées l'une de l'autre, ou que le Cryſtal eſt plus épais. Cette apparence eſt plus ſenſible, ſi l'objet eſt un point ou une ligne noire marquée ſur la face de la pierre.

Ce n'eſt pas ſeulement la duplicité de l'objet qu'on doit conſiderer dans cette pierre, mais c'eſt encore la

maniere dont elle se fait, qui est partout dans la ligne qui passe par l'objet, laquelle est parallele à celle qui divise en deux également l'angle obtus de la face où cet objet est marqué.

Cette image double d'un même objet fait connoître qu'il se fait necessairement une double refraction dans ces corps ; aussi on y en observe deux distinctes & differentes l'une de l'autre. La premiere qui lui est commune avec celle qu'on remarque dans tous les corps transparens, qui dépend de l'inclinaison que fait le rayon incident avec la ligne qui est perpendiculaire à la face du corps où se fait la refraction : la seconde qui est propre à ce Crystal, & qui vient d'une autre inclinaison que fait le rayon incident avec une autre ligne assez inclinée à la même face. D'où il suit que si le rayon incident est joint avec une de ces lignes, il ne souffrira point la refraction qui dépend de cette ligne, mais il souffrira celle qui dépend de l'autre, & par conséquent il y aura toûjours une double image de l'objet comme dans toutes les autres inclinaisons.

J'ai fait aussi plusieurs expériences que j'ai repetées en bien des manieres, lesquelles m'ont fait connoître que dans la premiere des deux refractions de ce Crystal, le sinus de l'angle d'incidence dans l'air étoit au sinus de l'angle rompu dans ce corps, comme 5 à 3, ce qui marque que ce corps, quoique fort tendre, fait cette refraction plus grande que celle du verre, qui est comme $4\frac{1}{2}$ à 3, & qui est beaucoup plus dur.

Pour ce qui est de la seconde refraction qui est propre à ce corps & qui double l'objet, M. Bartholin croyoit qu'elle dépendoit d'une ligne ou rayon qui étoit toûjours parallele aux arêtes des faces qui sont aux côtés de celles où se fait la refraction; mais M. Hugens dit que cette ligne n'est pas parallele à ces arêtes ; pour moi l'ayant examiné avec grande attention & en plusieurs manieres, j'ai trouvé que cette ligne étoit plus perpendiculaire à la surface du Crystal d'un degré, ce qui est peu de

chose dans des recherches aussi délicates que sont celles-là ; & enfin j'ai remarqué que les sinus des angles d'incidence dans l'air par rapport à cette ligne & dans cette seconde refraction, étoient au sinus des angles rompus, à très-peu près comme $4\frac{1}{2}$ à 3, ce qui est comme celle du verre de 3 à 2.

On remarquera que l'image de la seconde refraction paroît toûjours plus basse que celle qui vient de la premiere, dont il est facile de rendre raison par les regles de Dioptrique & suivant ces differentes refractions ; & pourquoi chacune des images doublées ne paroît à peu près que de la moitié de la force de ce qu'elle devroit paroître si on la regardoit sans aucun corps entrë deux ; c'est-pourquoi quand les parties des deux images se couvrent l'une l'autre, comme il arrive en un certain sens à un trait noir tracé ou appliqué contre le Crystal, cet endroit paroît deux fois plus fort que partout ailleurs.

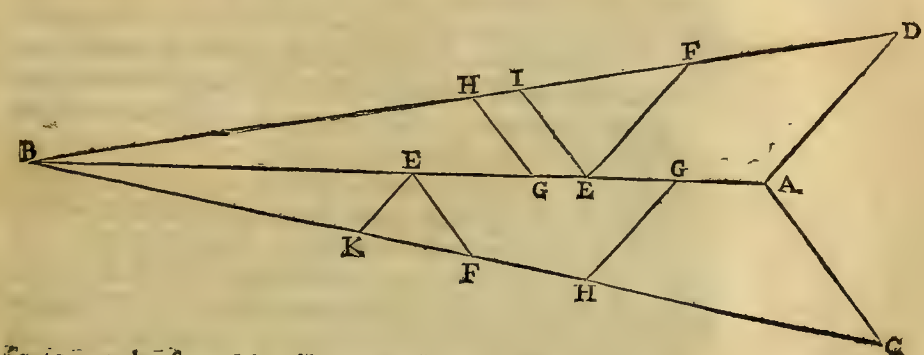
L'examen que j'ai fait de ce Talc d'Islande m'a engagé à considerer avec attention celui que nous avons en ces quartiers-ci, & qui se trouve communément au-dessus des bancs de pierre de plâtre ; car il ne faut pas negliger ce qui nous est familier & qui paroîtroit fort curieux dans un pays étranger, pour donner seulement toute nôtre attention à ce qui nous vient de loin.

Ce Talc de plâtre est une pierre transparente qui a beaucoup de rapport au Talc qui nous vient du Levant ; mais sa figure naturelle est tout à fait singuliere, & elle est toûjours la même dans tous les morceaux que nous envoyons. Le plus grand rapport qu'il ait avec le veritable Talc, c'est qu'il se peut fendre en lames ou feüilles très-déliées ; mais les feüilles du nôtre sont plus petites & bien plus cassantes que celles du Talc ordinaire, mais les lames n'en sont pas moins transparentes.

On trouve ordinairement une infinité de morceaux de cette pierre, qui sont de mediocre grosseur, dans un banc d'une terre grasse & blanche qui est au-dessus des masses de la pierre dont on fait le plâtre, & ces morceaux

ceaux ne conservent aucun ordre dans cette terre où l'on connoît qu'ils se sont formez, ni même aucune disposition uniforme, mais ils y sont semés comme au hazard, & plusieurs tiennent presque les uns aux autres; n'en étant separés que par quelque peu de la terre grasse où ils sont.

La figure de ce Talc est à peu près semblable à un fer de fleche, comme on la voit ici en *ABCD* qui en repre-



sente une des faces; car il y en a toûjours deux qui sont paralleles entr'elles, & selon lesquelles la pierre se peut fendre en lames; il y a aussi une de ces faces qui est plus grande que l'autre. On en trouve des morceaux de 12 & 15 pouces de long qui sont tous fourchus par l'un des bouts qui est le plus large, comme on le voit en *CAD*, & l'autre extremité vers *B* se termine en pointe; l'épaisseur est d'un pouce environ dans les morceaux de mediocre grosseur. C'est au travers des deux faces paralleles qu'on voit les objets assez clairement, au moins dans les morceaux qui sont nets & blancs, car il s'en trouve plusieurs qui tirent sur un jaune roussâtre.

Chaque morceau est divisé naturellement en deux suivant sa longueur, comme on le remarque sur la face par la ligne droite *AB* qui va de la fourche *A* à la pointe *B*, & le plan qui les separe est perpendiculaire aux faces. Ces deux pieces se touchent pour l'ordinaire imme-

diatement, n'étant diſtinguées l'une de l'autre que par l'inégalité de la matiere qui ſe rencontre en cet endroit-là, où il ſe trouve auſſi quelquefois un peu de la terre où ſe forme ce Talc, mais ce n'eſt que par quelques intervalles. On trouve auſſi ſur les côtés & en quelques endroits une eſpece de croute d'une pierre fort dure.

Les côtés exterieurs qui terminent cette pierre ne ſont pas pour l'ordinaire des angles droits avec les faces, mais un angle aigu du côté de la face la plus large de 75 degrés & ſon ſuplément de l'autre côté, & c'eſt ce qui fait que les deux faces ne ſont pas de même grandeur dans chaque morceau. Les côtés de cette pierre ne ſont point polis naturellement, n'étant formés que par les extremités de chaque lame qui ſont toûjours couvertes d'une petite croute jaunâtre, auſſi l'on ne peut appercevoir les objets que fort confuſément au travers de ces côtés, à moins que d'ôter cette croute & y mettre quelque vernis, ce qui eſt fort difficile à executer, à cauſe du peu de liaiſon qu'il y a entre chaque lame, ce qui ſe voit fort bien par de petites félures qui regnent dans la longueur de ces côtés.

Il arrive quelquefois qu'une des pointes de la fourche eſt un peu ſeparée de ſon morceau, auquel elle n'eſt jointe qu'aſſez irregulierement par un peu de la terre graſſe qui eſt autour, & quand on la ſepare entierement, on trouve que ces pointes ſont ſeulement adherentes au reſte par des portions de lames épaiſſes d'une ligne environ qui avancent plus ou moins dans le corps de la pierre, & qui y font liaiſon, comme parlent les Maçons

Quand on a enlevé quelques lames brutes qui ſont ſur la ſurface de ces morceaux de Talc, on y apperçoit diſtinctement des traits comme *EF* qui vont de la ligne du milieu *AB* vers l'exterieur ou les bords, tant d'un côté que d'autre, leſquelles font avec la ligne du milieu *AB* un angle aigu *AEF* vers la fourche *A* de 60 degrés à très-peu près. On y remarque encore d'autres lignes comme *GH*, qui vont auſſi du milieu vers les bords, &

qui font un angle aigu *BGH* vers la pointe *B* de 50 degrés, enforte que l'angle aigu que font ces deux lignes quand elles fe rencontrent eft de 70 degrés.

Auffi arrive-t'il toûjours que lorfqu'on fend ce Talc en des lames très-minces, ce qui ne fe peut faire qu'avec un couteau fort tranchant en commençant par l'exterieur dont on doit ôter auparavant la petite croute qui y eft, la plufpart de ces lames fe rompent en figures triangulaires dont les angles font toûjours de 50, de 60 & de 70 degrés, ce qui eft très-fingulier dans cette pierre. On voit auffi quelques fragmens de ces lames minces qui ont la figure d'un parallelogramme qui eft compofé de deux de ces triangles joints enfemble.

On peut conjecturer delà affez vrai-femblablement que la maffe de ces deux morceaux de Talc n'eft compofée que de lames très-déliées & qui ne font pas fort attachées les unes aux autres, & que chacune de ces lames eft formée par de petites lames triangulaires qui en font les élemens, lefquelles font fortement collées enfemble par leurs côtés, ce qui fait qu'elles ont beaucoup de fermeté, quoiqu'elles foient terminées. Chacun de ces petits triangles élementaires ayant trois angles aigus & inégaux de 50, 60 & 70 degrés, comme on le voit dans les morceaux de ces lames qui fe rompent, lefquelles ne font que des affemblages de ces mêmes triangles élementaires qui forment des triangles femblables à leurs élemens; car ces lames qui font affez caffantes, donnent toûjours ces mêmes angles quand on les rompt.

Si les côtés de ces triangles élementaires ne font pas un angle droit avec leurs faces, mais de 75 degrés d'un côté & fon fuplément de l'autre, ce qu'on ne fçauroit obferver, il arrivera auffi qu'en fe joignant enfemble dans un même ordre, tout le côté du morceau qu'ils formeront aura cette inclinaifon avec la face, ce qu'on obferve très-bien.

La difference des angles des triangles élementaires fera auffi que fuivant leurs differens arrangemens en for-

mant les lames, les côtés de ces lames seront paralleles à la ligne du milieu, ou bien inclinés de 10 degrés à cette ligne, ce qui forme aussi la pointe des morceaux dont les faces sont toûjours inclinées à la ligne du milieu de 10 degrés de chaque côté quand ils leur sont inclinés, ce qui arrive presque partout. Car l'angle *AEF* étant toûjours de 60 degrés, & l'angle *BGH* ou *BEI* ou *BEK* de 50, l'angle *FEI* ou *FEK* sera necessairement de 70; & si le triangle *FEI*, qui doit avoir son angle *FEI* de 70 degrés, a son angle *EFI* de 60 degrés, & par conséquent l'autre *EIF* de 50, il s'ensuivra que le côté *FI* sera parallele à *AB*. Mais si l'angle *EFI* ou *EFK* est de 50 degrés & l'autre *EKF* de 60, la ligne *FK* fera avec la ligne du milieu *AB* vers *B* un angle de 10 degrés, & c'est ce qu'on voit ordinairement. Ces deux cas peuvent arriver dans la premiere formation des lames, les triangles comme *FEK* prenant une situation renversée, l'angle en *E* demeurant toûjours le même. Et comme on peut croire qu'avant que les lames fussent formées, leurs élemens triangulaires nageoient dans une matiere, qui ayant un mouvement les rangeoit les uns à côté des autres dans un certain ordre où ils se plaçoient par rapport à leur figure, il est arrivé que les côtés de ces lames ont pû être inclinés l'un à l'autre d'un angle de 10 degrés; car je ne considere ici que la moitié d'une lame entiere qui est toûjours divisée en deux par une ligne comme *AB*: mais enfin si dans cette formation des lames il est arrivé par quelque cas particulier qu'un seul de ces élemens ait pris une position differente, les autres qui se sont accommodés à celui-là par le mouvement du liquide où ils étoient, ont disposé les côtés de la lame à être paralleles entr'eux.

C'est dans la premiere formation de ces lames qui s'est faite d'abord qu'elles ont pris une fermeté considerable, leurs élemens s'étant joints les uns aux autres par leurs côtés: mais alors toutes ces lames ayant encore entr'elles une matiere liquide qui n'a pû se dissiper ou s'échaper:

qu'avec le tems, les lames n'on pû se joindre très-fortement les unes aux autres par leur superficie, ensorte que pour peu de matiere étrangere qui soit restée entre-deux, on aura toûjours beaucoup plus de facilité à separer les lames des morceaux de ce Talc, lesquelles paroissent aussi separées les unes des autres, qu'à rompre ces mêmes morceaux de travers, car ils ont une très-grande fermeté en ce sens-là, ce qui peut venir encore de ce que chaque triangle élementaire d'une lame superieure ne répond pas exactement à ceux de la lame inferieure.

Pour ce qui est de la fourche *CAD*, voici ce que j'y ai observé & comme je pense qu'elle auroit pû se former. L'angle de ces cornes, comme *ACH* ou *ADH* est ordinairement de 50 deg. qui est le plus petit des trois angles des élemens; & si le côté exterieur du morceau fait avec la ligne du milieu un angle de 10 degrés vers la pointe, il s'ensuit que l'angle de la fourche *CAD* doit être de 120 degrés, & c'est aussi à peu près ce qu'on y observe, car pour l'ordinaire elle n'est pas distincte. On remarque aussi en quelques morceaux de ce Talc que les cornes sont separées du corps du morceau par un peu de la terre grasse qui est autour, ce qui a pû arriver dans le tems de la formation, & cette séparation n'est pas reguliere, car il y a plusieurs couches épaisses d'une ligne environ qui s'avancent plus ou moins, & qui tendent à se joindre au morceau, en conservant la figure naturelle des angles des superficies.

Pour ce qui est de la formation des cornes, je dis que s'il s'est rencontré quelque corps étranger vers *A* qui ait empêché les deux triangles élementaires qui devoient s'y placer de se joindre à ceux des côtés, alors la liaison entre les deux parties des lames étant interrompuë dans cet endroit, le reste a dû achever de se former & se terminer dans la pointe de la corne par des lignes paralleles à *EF* d'un côté & d'autre en *AC* & en *AD*; car la figure naturelle des triangles élementaires en se joignant, formera toûjours des triangles semblables aux élemens.

Tout ce que j'ai dit jusqu'ici des mesures des angles qui se remarquent dans ce Talc, c'est seulement ce que j'y ai trouvé de plus général ; car il s'y rencontre plusieurs irregularités qui peuvent avoir été causées dans le tems de la formation, par des parties & par des corps étrangers qui ont détourné les triangles élementaires, & qui leur ont fait prendre à l'exterieur seulement des figures differentes de celles qui doivent naître de l'assemblage des élemens, sans qu'on puisse l'appercevoir dans ce corps, à cause de la petitesse de ces élemens, comme on le voit par des côtés un peu en ligne courbe, par quelques angles un peu plus petits ou plus grands que ceux des élemens, & alors ces côtés doivent avoir de petits redents dont on en apperçoit quelques uns dans les fractures irregulieres des lames ; & enfin on voit des morceaux de ce Talc qui en ont d'autres attachés par leurs côtés, quelques-uns ont leur pointe qui s'allonge en parallelepipede seulement d'un côté, d'autres où vers la pointe il s'est formé un autre morceau semblable à l'ordinaire & qui lui est opposé, & enfin mille varietés de cette nature qui ne sont, pour ainsi dire, que des jeux de cette formation.

Après avoir examiné la figure de ce Talc, j'ai fait toutes les observations necessaires pour en reconnoître les refractions. Je les ai considerées d'abord entre les deux faces paralleles qui est le seul endroit par où cette pierre est naturellement transparente, & dans des plans perpendiculaires à ces faces, comme on fait ordinairement pour mesurer la refraction ; & de plus dans tous les sens differens, comme suivant sa longueur par le milieu de la pointe vers la fourche, dans sa longueur suivant le côté, & dans sa largeur, perpendiculairement à la ligne du milieu & aux côtés, & j'ai trouvé partout & dans tous les differens angles d'inclinaison que le sinus de l'angle d'incidence dans l'air étoit au sinus de l'angle rompu dans le corps, comme 5 à $3\frac{1}{2}$, qui est la même que celle de l'air dans le verre de 3 à 2 ; & cette refra-

ction est aussi la même que celle qui est particuliere au Crystal d'Islande, ce qui merite d'être consideré avec attention.

Enfin ayant separé un des morceaux de ce Talc en deux par le plan qui en divise la longueur & qui est perpendiculaire aux faces, j'ai examiné aussi quelle étoit la refraction par le côté au travers de son épaisseur; & cette refraction se faisant dans un plan parallele aux faces, ce qu'on ne peut pas faire quand les deux moitiés sont jointes ensemble à cause de la trop grande épaisseur, & que le milieu où est la séparation n'est pas assez net. Mais ayant dressé ce milieu, & l'ayant frotté ou enduit d'un peu d'eau de gomme, comme aussi le bord exterieur qui n'est pas poli, pour pouvoir appercevoir au travers un corps noir, j'ai remarqué que la refraction en ce sens-là étoit aussi la même que la précedente de 5 à $3\frac{1}{2}$.

Mais n'étant pas encore content de toutes ces observations, j'ai voulu voir si les fentes ou felures qu'on apperçoit par le côté de cette pierre, ne produiroient point quelque effet particulier, & pour le faire plus sensiblement j'ai appliqué un fil de fer suivant la longueur de ces fentes, & en regardant au travers du Talc, son image me paroissoit en deux endroits differens ou beaucoup plus large qu'elle n'étoit en effet, avec un espace plus clair entre-deux, ce qui est une espece de duplication de refraction; & faisant mouvoir doucement ce fil de fer & toûjours suivant la longueur des fentes, je voyois son image comme sautant d'une place à une autre & toûjours doublée. Pour rendre ces observations plus sensibles à cause que ce Talc est fort trouble par le côté, il faut l'exposer fort proche de la lumiere d'une chandelle, & appliquer le fil de fer tout contre le corps.

Il faudroit maintenant apporter des raisons physiques de tous ces effets, non seulement pour cette espece de Talc, mais aussi pour celui d'Islande auquel il a beaucoup de rapport, ce qui serviroit pour expliquer ceux de

la plufpart des autres corps tranfparens, comme du Diamant, du Cryftal de roche, de l'Alun & d'autres, lefquels fe forment naturellement & fuivant toutes les apparences, d'un affemblage d'élemens tous femblables entr'eux qui en déterminent leur figure; mais cette recherche me meneroit trop loin, c'eft pourquoi je la referverai pour un autre Memoire.

On trouve encore à Paffy proche de Paris aux environs de la Fontaine des Eaux minerales, de petits morceaux d'un Talc qui eft de la même efpece que celui des Carrieres de plâtre, car il fe peut fendre de même par lames très minces; il eft fort clair & fort tranfparent, & l'on voit qu'il eft formé des mêmes élemens triangulaires que celui de plâtre; mais la figure de fes deux faces qui font paralleles & fuivant laquelle il fe peut fendre, eft un parallelogramme qui a deux angles aigus de 50 degrés chacun.

Les côtés de ce Talc font avec les faces d'un côté & d'autre de chaque face des angles de 125 degrés environ; car il eft difficile de les mefurer exactement à caufe que les faces des côtés ne font pas unies, n'étant formées que par les extremités des lames qui y font des inégalités fuivant la longueur de ces côtés.

Ce qu'il y a de particulier à ce Talc, c'eft qu'il fait un angle faillant de 110 degrés à peu près vers le milieu de fon épaiffeur des deux côtés, en forte que fa figure feroit un parallelepipede à fix faces, fi fes deux extremités ou bafes étoient planes, mais elles font auffi un angle faillant vers le milieu de 140 degrés environ.

Pour ce qui eft de la mefure des refractions de ce Talc; je n'ai pas pû en faire des obfervations exactes à caufe que les morceaux en font trop petits, & je n'ai point remarqué que les objets paruffent doubles en les regardant au travers des faces paralleles.

M. Newton rapporte dans fon Optique fes obfervations fur le Cryftal d'Iflande, avec des raifons fort recherchées de fes effets.

OBSERVATIONS

OBSERVATIONS

Sur la variation de l'Aiguille par rapport à la Carte de M. Halley : Avec quelques Remarques Geographiques faites sur quelques Journaux de Marine.

PAR M. DE LISLE.

LE R. P. Gouye m'ayant communiqué huit Journaux faits par des Pilotes qui ont conduit des Vaisseaux de France en Terre-neuve & aux Isles de l'Amerique, j'en ai tiré ce qui m'a paru de plus utile à la Navigation & à la Geographie; & ayant eu d'ailleurs communication de deux autres Journaux, l'un de M. Hebert Envoyé du Roy aux Indes, & l'autre de M. Bigot de la Canté Lieutenant en second sur le Vaisseau du Roy la Sphere aux Côtes de Guinée & à la Riviere de la Plate; j'ai crû devoir joindre ensemble toutes les observations qui ont été faites dans ces differens voyages, parcequ'elles ont été faites à peu près dans le même tems, c'est-à-dire en 1706, 1707, 1708 & 1709.

1710. 16. Juillet.

Les observations de la variation de l'Aiguille ont paru dans ces derniers tems si essentielles à la Navigation, que les Pilotes ne negligent plus aucune occasion de les faire. En effet, ils ne peuvent reconnoître quel est le rumb de vent qu'ils parcourent sans l'avoir observée, & quand le tems ne leur permet pas de l'observer, ils sont obligez de la supposer sur les observations que d'autres Navigateurs ont faites à peu près dans les mêmes endroits.

Ils commencent même à s'en servir pour rectifier leur estime, & pour s'assurer en quelque maniere de la longitude, lorsque par eux mêmes ou par d'autres ils sçavent la variation qu'ils doivent trouver en tels & en tels en-

droits. Le Sieur Daumas premier Pilote du S. Loüis crut connoître par là qu'il passoit la Ligne plus à l'Ouest que son estime ne marquoit, & à la hauteur des Isles du Cap Verd il prétendit par la variation qu'il venoit d'observer qu'il en passoit à 30 lieuës vers l'Ouest.

Il marque aussi qu'aux approches de l'Isle de Bourbon dans la Mer des Indes, ayant observé 21 degrés de variation Nord Ouest, il connut par là qu'il étoit à l'Est de cette Isle, l'estime ne déterminant pas assez pour s'en assurer.

Il seroit inutile de rapporter ici des variations estimées. Il s'en faut bien que l'on ait assez de connoissance de cette matiere pour faire une estime juste des variations. Je ne rapporterai dans ce Memoire que celles qui ont été observées, entre lesquelles j'ai préferé encore celles qui ont été observées par les amplitudes à celles qui l'ont été par l'azimuth, parceque ces premieres me paroissent plus sûres & moins sujettes à erreur.

Les longitudes que je rapporte dans ce Memoire sont prises du Pic de Teneriffe, selon la Carte de Pieter Goos, qui est celle dont la plûpart de nos Navigateurs se servent aujourd'hui pour pointer leur route.

Un de ces Pilotes observa en 1709 à 120 lieuës des Côtes de France & à 44 degrés $\frac{1}{4}$ de latitude, la variation de 8 degrés Nord Ouest par l'amplitude occase du Soleil. Le Sieur Daumas avoit observé un peu auparavant & dans le même endroit la même variation de 8 degrés. M. Halley n'y marque que 6 deg. & demi.

A $45^{d}\ 7'$ de latitude & $11^{d}\ 31'$ de longitude, il observa $6^{d}\ 40'$ de variation, où M. Halley marque 6 degrés & demi.

A $45^{d}\ 20'$ de latitude & $358^{d}\ 15'$ de longitude, il observa 11^{d} de variation, où M. Halley en met 9 seulement.

Un autre Pilote parti de la Rochelle en 1708 pour les Isles du Vent, étant à $35^{d}\ 35'$ de latitude & sous le meridien de Teneriffe, trouva par le coucher du Soleil $4^{d}\ 35'$ de variation, où M. Halley met 4 degrés.

A 27^d 58′ de latitude & 353^d 40′ de longitude, il observa 4^d 32′ de variation, où M. Halley met seulement 2 degrés 10 minutes.

A 36^d de latitude & 325^d 46′ de longitude, il observa au lever du Soleil 5^d 8′ de variation, où M. Halley met seulement 3 degrés & demi.

Un autre de ces Pilotes étant à 46^d 50′ de latitude & à 230 lieuës de la Rochelle, observa le 22 Mars 1709 par le coucher du Soleil 7^d 50′ de variation, où M. Halley marque 7 degrés & demi.

Peu de tems après étant à 260 lieuës de la Rochelle & à 47^d de latitude, il observa 8^d de declinaison, où M. Halley met aussi 8 degrés.

La même année étant à 33^d 45′ de latitude & 5^d de longitude, il observa 6^d de variation, où M. Halley marque seulement 3 deg. $\frac{1}{4}$.

Le premier Pilote de la Marianne étant le 15 Mars 1709 par les 43^d 45′ de latitude, & se faisant par les 340^d 46′ de longitude, observa 13^d de variation, où M. Halley met seulement 8 degrés.

Toutes les observations que je viens de rapporter ont été faites en deçà de la Ligne, que M. Halley dit être exemte de variation, & que l'on peut appeller Ligne de Direction, parceque c'est le long de cette Ligne que l'Aiguille se dirige droit au Nord. Si ces observations sont exactes, les variations auront augmenté en deçà de cette Ligne depuis le tems de M. Halley, mais moins en un endroit qu'en un autre.

M. Bigot de la Canté dans son voyage à la Riviere de la Plate, observa le 30 Aoust 1707 à 44^d 45′ de latitude & 52 lieuës du Cap Finistere 7^d 20′ de variation N. O. où M. Halley met seulement 6 deg. $\frac{1}{4}$. Il trouva la même variation les 4 jours suivans pendant lesquels il fit 60 lieuës au Sud-Ouest. M. Halley met environ 6 deg. tout le long de cette Ligne.

A 7^d 15′ de latitude & 1^d 50′ de longitude, il observa 2^d & demi de variation, où M. Halley n'y met que 50 min.

A la Rade de Juda aux Côtes de Guinée, il observa le 12 Janvier 1708, 8^{d} 20' de variation. M. des Marchais y avoit observé 8^{d} en 1705. M. Halley y met seulement 5 degrés.

A la partie Orientale de l'Isle de San-Thomé sous la Ligne, il observa 11^{d} & demi, où M. Halley n'y marque que 5 deg. & demi.

M. Bigot ayant fait le tour de cette Isle, fit le Sud-Est jusqu'à 4 deg. de latitude meridionale pas loin des Côtes de Congo, d'où il tira toûjours au Sud Ouest & à l'Ouest Sud Ouest jusqu'à l'embouchure de la Riviere de la Plate où il arriva le 27 Avril 1708. Cette traversée qui est de 1400 lieuës est une des plus propres que l'on puisse trouver pour examiner les variations que M. Halley marque dans cette mer, d'autant plus qu'elle coupe presque perpendiculairement toutes les Lignes que M. Halley y a tracées.

Le long de cette route il trouva toûjours la variation Nord-Ouest plus petite de jour en jour, jusqu'à ce qu'ayant fait 560 lieuës il la trouva nulle. Dans la suite les variations se trouverent au Nord-Est, au lieu qu'elles avoient été jusqu'alors au Nord-Ouest. M. Halley marque cette Ligne où il n'y a point de variation 120 lieuës plus à l'Est que M. Bigot ne l'a trouvée, & marque 1^{d} & demi de variation Nord-Est, où M. Bigot a trouvé la variation nulle. Il ne faut pas s'étonner par conséquent si la variation que M. Bigot a observée avant que de parvenir à cette Ligne s'est trouvée plus grande que M. Halley ne la marque d'un degré, de deux degrés & quelquefois davantage.

M. Bigot étant parti le 16 Avril 1709 de la Riviere de la Plate, suivit à peu près la même route qu'il avoit tenuë en allant l'espace d'environ 800 lieuës : mais les observations qu'il fit dans ce retour ne se rapportent pas à celles qu'il fit en allant, quoiqu'il se crût par son estime aux mêmes endroits où il avoit observé auparavant. Le lieu où il trouva en allant 20 minutes de variation Nord-

Eſt, ſe trouve par cette eſtime de 9 degrés plus oriental que celui où il en trouva 26 en revenant, & les autres endroits à proportion de la diſtance de ces endroits à l'embouchure de la Riviere de la Plate, ce qui vient vrai-ſemblablement des eaux de cette Riviere qui eſt une des plus grandes qui ſoient au monde, & qui communiquant ſon courant à cette Mer par une embouchure large de 30 lieuës & tournée du côté de l'Eſt, aura pû retarder le mouvement du Vaiſſeau en allant, & l'aura acceleré au retour.

M. Bigot paſſa delà à la Martinique, & dans ſa traverſée depuis cette Iſle juſqu'en France, il obſerva le 13 Aouſt 1709 à 28 deg. & demi de latitude & 316 & demi de longitude la variation Nord-Oueſt d'un degré & demi. M. Halley y marque un degré Nord-Eſt. Ainſi la variation a paſſé dans cet endroit du Nord-Eſt au Nord-Oueſt, & la Ligne de Direction qui étoit à l'Eſt de cet endroit, a paſſé à l'Oueſt depuis M. Halley, ſi l'on en croit ces obſervations.

A $32^d\ 15'$ de latitude & $321^d\ 45'$ de longitude, il obſerva $4^d\ 10'$, où M. Halley met 2 deg. de moins.

A $36^d\ 50'$ de latitude & 329^d de longitude, il trouva $7^d\ 10'$ de variation, où M. Halley met 4 deg. & demi.

A $45^d\ 8'$ de latitude & 305^d & demi de longitude, il trouva $10^d\ 10'$ de variation; c'eſt 2 deg. de plus que la Carte de M. Halley.

Il paroît par toutes ces obſervations, ſi elles ſont juſtes, 1°. Qu'au parallele de 22^d de latitude Sud, la Ligne de Direction s'eſt avancé en Occident de 120 lieuës depuis l'an 1700 qui eſt le tems de la Carte de M. Halley, juſqu'en 1708 qui eſt celui de M. Bigot. 2°. Que la variation a augmenté en deçà de cette Ligne pendant qu'elle a diminué au delà, quoiqu'en trois ou quatre endroits M. Bigot l'ait trouvée égale à celle qui eſt marquée dans la Carte de M. Halley, & qu'en quelques autres endroits il l'ait même trouvée plus grande. Quoiqu'il ſoit incertain ſi cette irregularité vient de la choſe

en elle-même ou des obſervations du Pilote ; cependant comme la nature a des regles plus certaines que nos connoiſſances, j'aime mieux croire qu'il y a du défaut dans quelques obſervations, que dans la conduite de la nature.

Le Vaiſſeau le S. Loüis eſt un des trois qui partirent pour la Mer du Sud le 14 Juillet 1706. La Toiſon & le Maurepas étoient les deux autres Vaiſſeaux. M. Caſſini le fils a rapporté dans l'Hiſtoire de l'Académie de 1708 les obſervations faites ſur le Maurepas ; mais le S. Loüis après avoir accompagné les deux autres Vaiſſeaux dans la Mer du Sud, s'en ſepara à la Conception ville maritime du Royaume de Chili, étant deſtiné à porter aux Indes M. Hebert Envoyé du Roi pour l'exécution des ordres de Sa Majeſté.

Outre le Journal de M. Daumas premier Pilote de ce Vaiſſeau, j'ai encore eu communication de celui de M. Brunet un des Officiers du Vaiſſeau, qui fait pluſieurs remarques curieuſes que je n'ai pas trouvées dans le Journal du Pilote.

Ce Pilote étant parti du Port-Loüis le 14 Juillet 1706, obſerva à 25 lieuës au Nord Nord-Eſt de l'Iſle de Porto-Santo près de Madere la variation de 5 degrés Nord-Oueſt, où la Carte de M. Halley en met 4 ſeulement.

Tout proche de Madere au Sud-Oueſt il en trouva $4\frac{1}{2}$, où M. Halley n'en met que $3\frac{1}{2}$.

Entre l'Iſle de Madere & l'Iſle de Fer 4, où M. Halley en met 3.

A 50 lieuës au Sud Sud-Oueſt de l'Iſle de Fer, 3, où M. Halley en met 2.

A $18^d\ 15'$ de latitude & 357 de longitude 2^d & demi. Entre cet endroit & le banc des Biſagos ſur les Côtes de Guinée, il obſerva quatre fois la variation & la trouva toûjours de 2 deg. & demi ; M. Halley la marque en ces endroits d'environ un degré.

A 358^d de longitude & 6^d de latitude, il trouva 2^d de variation auſſi-bien qu'à $3^d\ 15'$ de latitude & 10 minutes

de longitude. M. Halley marque dans ces endroits un demi degré de variation.

Depuis cet endroit tirant au Sud-Eſt juſqu'à la Ligne Equinoxiale qu'il coupa par les 7 deg. de longitude le 6 Septembre 1706, la variation changea au bout de 50 lieuës de 2 à 3 degrés, 50 lieuës plus loin de 3 à 4, & 50 autres lieuës au-delà de 4 à 5. M. Halley ne met dans ces endroits qu'un degré ou un degré & demi de variation, & au lieu de 50 lieuës marque 80 lieuës entre chaque degré de variation.

Ayant paſſé la Ligne il tira au Sud-Oueſt juſqu'à 9^d de latitude meridionale & 356^d $15'$ de longitude, & trouva auſſi que la variation changeoit d'un degré au bout de 50 lieuës, diminuant ainſi de 5 à 4, de 4 à 3, de 2 à 1, enſorte qu'elle ſe trouva nulle au bout de 250 lieuës, & 50 lieuës plus loin d'un degré Nord-Eſt, au lieu qu'elle avoit été Nord-Oueſt juſqu'alors. Ainſi le lieu où le Vaiſſeau coupa la Ligne que l'on peut appeller de Direction, ſe trouve par leur eſtime plus occidentale de 100 lieuës que celle que M. Halley dit être exempte de variation.

M. Daumas continuant ſa route juſques vers l'Iſle de l'Aſcenſion, obſerva le 24 Septembre 1706 à 20 lieuës au Nord Eſt de cette Iſle 6 degrés de variation, où M. Halley marque pareillement 6 deg. Nord-Eſt.

Il fit route delà à l'Iſle Grande ſur les Côtes du Breſil. M. Brunet rapporte qu'on y trouva 11 deg. $\frac{1}{2}$ de variation, à peu près comme M. Halley le marque.

Delà il paſſa au Détroit de Magellan. Il obſerva 12^d Nord-Eſt de variation où M. Halley en met $12\frac{1}{2}$, 13 où il en met $13\frac{1}{2}$, 16 où il en met $16\frac{1}{2}$, 17 où il met $18\frac{1}{2}$, 18 où il met 19, 19 où il met $19\frac{1}{2}$ & $19\frac{1}{2}$ où il met 20 degrés. Je rapporte toutes ces obſervations parcequ'elles ſe confirment les unes les autres, ſurquoi l'on peut encore remarquer que cette derniere obſervation qui eſt rapportée par M. Brunet a été faite à la hauteur de 40 deg. 30 minutes de latitude Sud, & que le Vaiſſeau ayant fait ici 60 lieuës ſous le même parallele, trouva toûjours la mê-

me variation par trois observations qu'il fit à cette hauteur ; ce qui s'accorde parfaitement à l'inclinaison que M. Halley donne aux Lignes de variation vers cet endroit, car elles y sont inclinées de l'Est à l'Ouest l'espace de 50 ou 60 lieuës, d'où elles tournent insensiblement vers le Sud-Ouest en forme d'Ellipse jusqu'au Détroit de Magellan.

Etant parvenus le 5 Decembre 1706 à la hauteur de 57^d 10′ & 60 lieuës au Sud-Ouest du Détroit de le Maire, M. Brunet rapporte que la variation fut observée de 26^d Nord-Est, & que l'on trouva la même variation l'espace de 40 lieuës jusques par les 57^d 40′ de latitude. Je ne fais point ici de rapport avec la Carte de M. Halley, parcequ'il ne marque pas les variations dans cette Mer.

Ayant doublé le Cap de Horne au midy de la Terre de Feu, ils vinrent à la ville de la Conception sur les Côtes de Chili, où M. Brunet observa 9^d 30′ de variation. Delà ils passerent à Valparaise, où ils trouverent 8 degrés à Pisque, & à Cafiete 6$\frac{1}{2}$, & au Callao qui est le Port de Lima 6 deg. Ces observations se rapportent toutes à un demi degré près à celles qui furent faites sur le Maurepas, & qui sont rapportées par M. Cassini le fils, qui remarque dans l'examen qu'il a fait de la route de ce Vaisseau, qu'à mesure qu'il s'élevoit en latitude la variation augmentoit ; à quoi l'on peut ajoûter sur les observations de Mrs Brunet & Daumas, qu'en même parallele à mesure qu'ils s'éloignoient des Côtes vers l'Occident, la variation diminuoit.

Car à 44^d 45′ de latitude & environ 30 lieuës des Côtes du Chili, ils observerent 12^d de variation, & au même parallele à 120 lieuës des Côtes ils n'en trouverent que 7.

Entre les 40 & 41 deg. de latitude à 10 lieuës des Côtes, ils trouverent 9^d de variation, & 6 seulement à 130 lieuës des mêmes Côtes.

Entre le 30 & le 31e degré de latitude à 60 lieuës des Côtes ils trouverent 7 deg. de variation, & 5 seulement à 220 lieuës.

Ce

Ce Vaiſſeau étant parti de la Conception le 27 Decembre 1707, doubla le Cap de Horne une ſeconde fois, & vint moüiller à la Riviere de Gallegue peu éloignée du Détroit de Magellan.

Ils en partirent pour faire voile au Cap de Bonne-Eſperance. C'eſt le premier Vaiſſeau, que je ſçache, qui ait fait cette route; ainſi ſes obſervations en ſont d'autant plus précieuſes.

A leur départ de la Riviere de Gallegue ils obſerverent 23^{d} de variation Nord-eſt.

A 60 lieuës de cet endroit ils trouverent 22^{d} Nord-Eſt.

30 lieuës plus loin 20^{d}.

150 lieuës plus loin 18.

à 110 lieuës delà 16.

150 lieuës plus loin 14.

à 60 lieuës 13.

à 50 lieuës delà 12.

20 lieuës plus loin 11.

à 30 lieuës delà 10.

à 8 lieuës delà 20.

100 lieuës plus loin 4^{d} ſeulement.

Enfin 120 lieuës plus loin la variation ſe trouva nulle.

Toutes ces variations ſont du côté du Nord-Eſt juſqu'à l'endroit où elle ſe trouva nulle. Les ſuivantes ſont Nord-Oueſt.

Ainſi 60 lieuës plus à l'Eſt ils trouverent 2^{d} de variation Nord-Oueſt.

80 lieuës plus loin 4^{d}.

60 lieuës au-delà 7^{d}.

140 lieuës au de-là 9^{d} & demi.

Enfin 60 lieuës plus loin proche le Cap de Bonne-Eſperance où il arriva le 18 Mars 1708, il obſerva 8^{d} de variation.

Suivant la Carte de M. Halley la variation auroit dû augmenter depuis le lieu de leur départ dans l'eſpace de 240 lieuës de 20 à 23 degrés, & dans le reſte de la traverſe elle auroit dû diminuer environ d'un degré pour 2

degrés de longitude jusqu'à la Ligne de Direction, & delà jusqu'au Cap augmenter au Nord-Ouest dans la même proportion qu'elle avoit diminué au Nord-Est.

Mais il paroît au contraire par ces observations que la plus grande variation qu'ils ont observée dans toute cette traversée, a été au lieu même de leur départ où elle a été trouvée de 23 degrés. Il paroît aussi que lorsqu'elle a diminué, ce n'a pas toûjours été dans la même proportion qu'elle est marquée dans la Carte de M. Halley, ensorte que pendant les 500 premieres lieuës la variation a diminué d'un degré pour 4 degrés en longitude, après quoi dans l'espace d'un degré & demi de longitude, ils trouverent la variation diminuée d'un degré qu'ils n'avoient trouvée qu'en 4 auparavant, & cela dans l'espace de 250 lieuës, après quoi les variations ont changé comme dans la Carte de M. Halley d'un degré pour 2 en longitude.

Il paroît aussi par ces observations que depuis 1700 qui est l'Epoque de la Carte de M. Halley jusqu'en 1709, la Ligne de Direction a changé de 50 lieuës à l'Ouest à la latitude de 35 degrés Sud. Nous avons dit ci-dessus qu'à la latitude de 22 degrés elle avoit changé de 120 lieuës, si l'on en croit les observations de M. Bigot; que par les 7 degrés Sud il l'avoit trouvée plus occidentale de 100 lieuës; enfin qu'à la hauteur de 28 degrés Nord, elle s'étoit trouvée aussi plus occidentale par ses observations que M. Halley ne la marque à cette hauteur; ainsi le mouvement de cette Ligne vers l'Ouest est confirmé par plusieurs observations.

Du Cap de Bonne-Esperance en allant en Orient, ils trouverent que la variation augmentoit toûjours jusqu'à 530 lieuës à l'Est du Cap & à $33^d\frac{1}{2}$ de latitude Sud, où ils trouverent $24^d\frac{1}{2}$ de variation Nord-Ouest. C'est la plus grande variation qu'ils ayent trouvé dans la Mer des Indes. Delà à l'Isle Bourbon, & jusqu'à Pontichery & Merguy ils la trouverent toûjours moindre de jour en jour, & à leur retour ils la trouverent tous les jours plus gran-

de jusqu'au même terme environ à la même distance du Cap. M. Halley n'est different que d'un demi degré de ces observations.

Les autres observations de ces M[rs] dans la Mer des Indes se trouvent peu éloignées de celles que M. Cassini a rapportées dans l'Histoire de l'Academie de 1708, c'est-pourquoi je renvoye à ce qu'il en a dit.

Voilà les observations que j'ay pû faire par les Journaux qui m'ont été communiquez sur les variations de l'Aiguille. Voici quelques remarques que j'ai trouvées dans ces mêmes Journaux qui peuvent servir à la correction des Cartes Marines, & en particulier de celles de Pieter Goos, que l'on pourra rendre un jour plus utiles aux Navigateurs, si l'on a un assez grand nombre de pareils Journaux pour aider à les rectifier.

Le premier Pilote du Royal Dauphin reconnut les Salvages qui sont des Isles dangereuses au Nord des Canaries, dont les Pilotes ne sçauroient par conséquent connoître la situation avec trop d'exactitude. Il remarque qu'elles sont très-mal marquées sur les Cartes Marines, & qu'elles y sont placées trop à l'Est par rapport à l'Isle de Porto-Santo. Pour la latitude il l'observa de 30 degrés, étant au Sud-Ouest à une lieuë & demie de ces Isles. Il dit que ce sont deux Isles dont la plus septentrionale est la plus grande, & qu'il y a un recif ou une chaîne de rochers qui s'étend depuis cette Isle environ 3 lieuës vers le Sud-Ouest, au bout desquels il y a un petit Islot rond, & un peu de terre basse où la mer brise beaucoup.

Le premier Pilote du S. Loüis remarqua en passant à l'Isle de l'Ascension qu'elle étoit marquée par Pieter Goos un demi degré trop au Nord, & assure qu'il y a observé 20^d 22$'$ de latitude, au lieu de 19^d 52$'$ où cet Auteur la marque.

J'ai rapporté ci-dessus que le S. Loüis étoit le premier Vaisseau qui avoit passé du Détroit de Magellan au Cap de Bonne-Esperance en droiture. Etant parti de

la Riviere de Gallegue, il fit toûjours l'Eſt Nord-Eſt juſqu'à ce Cap l'eſpace de 1350 lieuës; mais étant parvenu à la hauteur de 36^d 54$'$ de latitude & 353^d 10$'$ de longitude par eſtime, il découvrit le 27 Février 1708 une Iſle à une lieuë de diſtance; peu après on en vit 2 autres au Sud-Oueſt à 3 ou 4 lieuës, & enſuite une 4e au Nord Oueſt, ce qui ſurprit beaucoup l'équipage qui ſe faiſoit à 300 lieuës de terre.

M. Brunet trouva ces Iſles reſſemblantes à celles de Triſtan de Cugne qu'il avoit vûës allant à la Chine ſur l'Amphitrite.

Mais M. Hebert & le premier Pilote ſe perſuaderent le contraire, parceque ſuivant leur eſtime ils n'avoient encore fait que 750 lieuës depuis la Riviere de Gallegue, au lieu de 1050 qu'il falloit faire pour attraper la longitude de 12 deg. que Pieter Goos donne à ces Iſles. Ils furent confirmez dans cette opinion par leur aterrage au Cap de Bonne-Eſperance, ayant trouvé par leur eſtime 35 deg. de longitude entre ces Iſles & le Cap, au lieu de 26 deg. que Pieter Goos y marque, ce qui fait une difference de 150 lieuës en ce parallele. Enſorte qu'ils n'heſiterent pas à regarder ces Iſles comme une nouvelle découverte, & à leur donner le nom d'Iſles Hebert ou de Nouvelles Iſles de Triſtan de Cugne.

L'opinion de M. Brunet qui a prétendu que c'étoient les Iſles mêmes de Triſtan de Cugne, me paroît bien plus vraiſemblable.

Et ce ne ſeroit pas la premiere fois que des Pilotes auroient traité d'Iſles nouvelles, & impoſé de nouveaux noms à ces Iſles qui avoient été découvertes long-tems avant eux. Je donnerai pour exemple l'Iſle Sainte Helene, qui ayant été placée par les premiers Navigateurs plus à l'Oueſt qu'elle n'eſt effectivement, fut reconnuë par d'autres Navigateurs plus à l'Eſt qu'elle n'étoit marquée ſur les Cartes, ce qui leur fit croire que c'étoit une nouvelle Iſle ſituée à la même latitude, mais à une longitude differente de la premiere. Ils lui donnerent le nom

de nouvelle Isle Sainte Helene, & ne feignirent pas de l'ajoûter sur les Cartes Marines, dans la plûpart desquelquelles on la voit encore marquée, entr'autres sur celles de Pieter Goos. L'Isle de Sainte Apollonie dans la mer des Indes est la même que l'Isle de Bourbon, l'Isle des Chiens dans la mer du Sud trouvée en 1616 par Jasques le Maire n'est autre que l'Isle des Tiburons que Magellan avoit découverte en 1520, & il en est peut-être de même des Isles que nos Navigateurs ont reconnuës, qui pourront bien être les mêmes que celles de Tristan de Cugne. Car M. Halley qui fut en 1700 aux Isles de Tristan de Cugne, les marque dans sa Carte à la même distance ou environ que l'estime de ces M^rs^ l'exige, quoiqu'ils soient differens de Pieter Goos de 150 lieuës. Et pour ce qui est de la distance de ces Isles à la Riviere de Gallegue qui est de 750 lieuës par leur estime, il est vrai que M. Halley la fait encore de 170 lieuës plus grande, mais la longitude que M. Halley donne à l'embouchure de cette Riviere doit être encore diminuée de dix degrés ou environ, comme j'ai fait dans ma Carte de l'Amerique meridionale sur plusieurs observations, entr'autres sur celle de l'Eclipse du 13 Mars 1653 faite à la Vallée de Bucalene au Chili par le P. Mascardi. Par cette observation comparée avec celles qui furent faites à Paris, Bucalene est de 72^{d} & demi plus occidental que Paris. La Riviere de Gallegue dont la distance à Bucalene est connuë, ne doit être par conséquent qu'à 68 degrés de Paris. Nous sçavons d'ailleurs par les observations du P. de Fontaney que le Cap de Bonne-Esperance est plus oriental que Paris de $17^{d}\,45'$. Ainsi la distance du Cap à la Riviere de Gallegue sera de $84^{d}\,25'$ à un degré & demi près de l'estime de nos Navigateurs.

REFLEXIONS

Sur les Obſervations du Flux & du Reflux de la Mer, faites au Havre de Grace par M. Boiſſaye du Bocage Profeſſeur d'Hydrographie, pendant les années 1701 *&* 1702.

PAR M. CASSINI le fils.

1710. 13. Aouſt.

MOnſieur Boiſſaye du Bocage Profeſſeur d'Hydrographie au Havre de Grace ayant reçû ordre de M. le Comte de Pontchartrain d'obſerver dans ce Port le Flux & le Reflux de la mer, choiſit pour faire ſes obſervations le lieu du Port qui eſt le plus à l'abri. Il plaça à cet endroit une planche diviſée en pouces de dix piés & demi de longueur qu'il attacha contre la muraille de ce Port, & il obſerva ſeulement les Marées qui arrivoient de jour, n'ayant pas eu la commodité d'y prendre celles de la nuit.

Il remarque que la mer en montant porte au Sud-Eſt, & au Nord-Oueſt en baiſſant; que le vent traverſier de la Rade eſt Oueſt Nord-Oueſt, & que le vent d'Oueſt Sud-Oueſt enfile l'entrée du Port.

Le Journal des obſervations de M. du Bocage commence au *9* Avril de l'année 1701, & finit au *26* May 1702.

Il s'eſt contenté d'abord de marquer jour par jour l'endroit de la planche où la haute mer a monté, avec les vents qu'il faiſoit tant dans le flux que dans le reflux; mais deux mois après, à commencer du 10 Juin, il a marqué les heures & minutes de la haute mer, ce qu'il a continué de faire juſqu'à la fin de ſes obſervations, à la réſerve de l'intervalle qui eſt entre le 11 & le 28 Novembre 1701, pendant lequel il fut obligé de faire raccom-

moder la montre dont il ſe ſervoit.

Si l'on examine d'abord les tems de la haute mer obſervés au Havre de Grace, on trouve que le jour des pleines Lunes la haute mer y arrive pour l'ordinaire un peu après 9 heures du matin. La haute mer qui a le plus acceleré eſt arrivée le 19 Juillet jour de la pleine Lune à 8^h $39'$ du matin, & celle qui a le plus retardé eſt arrivée le 12 Avril à 9^h $39'$, ce qui donne une variation d'une heure dans le tems des marées pour le jour de la pleine Lune.

Si l'on ſuppoſe que le jour de la pleine Lune l'heure de la haute mer arrive au Havre de Grace à 9^h $26'$ du matin, lorſque l'heure de la pleine Lune concourt avec celle de la haute mer, & qu'on ait égard à l'acceleration ou retardement de deux minutes pour chaque heure que le tems de la pleine Lune retarde ou anticipe à l'égard du tems de la haute mer, comme on l'a établi à Dunquerque, on trouvera moins de variations dans les tems de la haute mer obſervés au Havre de Grace.

Par exemple, le 19 Juillet de l'année 1701 la haute mer eſt arrivée à 8^h 39 du matin, qui eſt la plus grande acceleration que M. du Bocage ait obſervée. La pleine Lune eſt marquée pour ce jour-là dans la Connoiſſance des Tems à 11^h $50'$ du ſoir. La difference entre 9^h $26'$ du matin & 11^h $50'$ du ſoir eſt 14^h $24'$, auxquels à raiſon de 2 minutes par heure il répond $29'$, qui étant retranchées de 9^h $26'$, donnent 8^h $57'$ pour le tems de la haute mer, à 18 minutes de celle qui a été obſervée au Havre de Grace.

Il eſt à remarquer que le 19 Juillet 1701 eſt le même jour que celui auquel on a obſervé à Dunquerque la plus grande acceleration de la haute mer dans les pleines Lunes, dont on a attribué la plus grande partie à l'acceleration cauſée par la pleine Lune qui eſt arrivée le ſoir à 11^h $50'$.

A l'égard de la haute mer qui a le plus retardé aux jours de pleines Lunes, on l'a obſervé le 12 Avril à 9^h $39'$

la haute mer étant arrivée à 0^h 13′ du soir, il a donc dû y avoir une anticipation de 6 minutes, qui étant retranchée de 9^h 26′ donnent le tems de la haute mer le 12 Avril 1701 à 9^h 20′, à 19 minutes près de celui qui a été obſervé.

Si l'on examine pareillement les obſervations de la haute mer faites au Havre pendant les nouvelles Lunes, il paroît d'abord que les hautes mers dans les nouvelles Lunes arrivent plus tard que dans les pleines Lunes d'environ 12 à 13 minutes l'une portant l'autre. Cependant ayant égard à l'acceleration ou retardement de deux minutes par heure que l'on a preſcrit ci deſſus, ſi l'on ſuppoſe que l'heure de la haute mer arrive au Havre dans les nouvelles Lunes à 9^h 26′ du matin, de même que dans les pleines Lunes, on accordera enſemble les obſervations des pleines Lunes avec celles des nouvelles Lunes, à la réſerve de deux dans leſquelles on a trouvé une irregularité extraordinaire, y ayant eu dans le tems de la haute mer une anticipation de pluſieurs minutes d'un jour à l'autre, au lieu du retardement que l'on y obſerve ordinairement. La nouvelle Lune dans laquelle la haute mer a été obſervée le plûtôt, eſt celle du 29 Novembre 1701; la haute mer arriva à 8^h 56′ du matin, & la nouvelle Lune eſt marquée ce jour-là dans la Connoiſſance des Tems à 10^h 11′ du ſoir. La difference entre 9^h 26′ du matin & 10^h 11′ du ſoir eſt 12^h 45′ auſquelles il répond 25′ $\frac{1}{2}$, qui étant retranchées de 9^h 26′ à cauſe que la nouvelle Lune eſt arrivée le ſoir, donne le tems de la haute mer à 9^h 0′ $\frac{1}{2}$, à 4 minutes près de celui qui a été obſervé.

Il eſt à remarquer que cette nouvelle Lune eſt la même que celle dans laquelle on a obſervé à Dunquerque la plus grande acceleration de la haute mer, ce qu'on a auſſi attribué à l'heure de la nouvelle Lune qui eſt arrivée le ſoir à 10^h 11′.

La nouvelle Lune dans laquelle la hauter mer a été obſervée le plus tard eſt celle du 4 Aouſt 1701. La haute mer arriva à 9^h 48′ du matin, & la nouvelle Lune eſt marquée

marquée ce jour-là à 10^h 15$'$ du matin. Suivant la regle prescrite ci-dessus la haute mer devoit arriver à 9^h 24$'$ du matin à 24 minutes près de celle qui a été observée; mais il faut remarquer que du 4 au 5 Aoust il y a eu une anticipation de 11 minutes dans le tems de la haute mer au lieu d'y avoir eu quelque retardement, & qu'ainsi on ne peut rien établir sur cette observation, non-plus que sur celle du 2 Septembre 1701 jour de la nouvelle Lune, où la haute mer fut observée à 9^h 46$'$ du matin, y ayant eu aussi du 2 au 3 Septembre une anticipation de 20 minutes.

Pour ce qui est des plus hautes marées, elles n'arrivent point ordinairement au Havre de Grace le jour des nouvelles & pleines Lunes, mais un, deux ou trois jours après, comme on l'a remarqué à Dunquerque, & comme il a été observé par M^{rs} de l'Academie, non-seulement dans les Ports de la Manche, mais même sur les Côtes de l'Afrique & de l'Amerique.

La plus haute marée qui a été observée au Havre par M. du Bocage est celle du 15 Février 1702, où la marée monta à la hauteur de 18^P 3^P, trois jours après la pleine Lune qui étoit arrivée le 12 du même mois à 3^h 2$'$ du soir. Il faisoit alors un vent très-fort du Sud Sud-Ouest, qui concourant avec la marée pour la faire avancer vers le Port, a pû contribuer à la grande hauteur qu'on y a observée ce jour là.

A l'égard des marées qui sont près des Equinoxes tant dans les nouvelles que dans les pleines Lunes, il s'en trouve quelques-unes qui sont hautes & d'autres qui sont basses; de sorte qu'on ne peut pas prendre pour regle generale que les grandes marées arrivent au Havre de Grace dans les marées qui sont près des Equinoxes.

Ce qu'il y a de remarquable, c'est que les hauteurs des marées suivent assez exactement le rapport des diverses distances de la Lune à la Terre, soit qu'elles soient près des Equinoxes, soit qu'elles en soient éloignées, de même qu'on la fait voir à Dunquerque.

Par exemple le 10 Avril 1701 deux jours après la nou-

velle Lune qui ſuit l'Equinoxe du Printems, la hauteur de la mer fut obſervée de $15^{p}\ 6^{p}\ 6^{l}$, plus baſſe d'un pied & trois pouces $\frac{1}{2}$ que le 10 May deux jours après la pleine Lune ſuivante, qui eſt cependant plus éloignée de l'Equinoxe ; ce qui s'accorde à la diſtance de la Lune qui étoit plus éloignée de la Terre le 8 Avril jour de la nouvelle Lune, que le 24 Avril jour de la pleine Lune.

De même le 19 Septembre 1701 deux jours après la pleine Lune qui étoit la plus proche de l'Equinoxe d'Automne, la hauteur de la mer fut obſervée de $15^{p}\ 11^{p}$ plus baſſe d'un pied 10 pouces que le 4 Octobre deux jours après la nouvelle Lune ſuivante, où la haute mer fut obſervée de $17^{p}\ 9^{p}$ qui eſt une des plus hautes qu'on ait remarquées. Le 16 Octobre ſuivant jour de la pleine Lune, la haute mer fut obſervée de $16^{p}\ 3^{p}$ plus baſſe que le 4. Octobre, & le 1 Novembre elle fut obſervée de $16^{p}\ 11^{p}$ plus haute que le 4 Octobre.

Ces diverſes hauteurs des marées ne peuvent convenir aux diverſes diſtances du Soleil aux Equinoxes, puiſque la mer a été plus baſſe près de l'Equinoxe, que dans les autres obſervations qui en étoient plus éloignées ; mais elles s'accordent parfaitement aux diverſes diſtances de la Lune à la Terre dans le temps des nouvelles & pleines Lunes. Car le 17 Septembre la Lune étoit plus éloignée de la Terre que dans les autres obſervations. Le 2 Octobre elle en étoit plus près. Le 16 Octobre elle étoit plus éloignée que le 4, mais à une moindre diſtance que le 17 Septembre ; & le 31 Octobre elle étoit plus proche que le 17, mais à une plus grande diſtance que le 4 Octobre.

Il ſeroit trop long de montrer le rapport des obſervations qui s'accordent aux diverſes diſtances de la Lune à la Terre, & il ſuffira de remarquer que le 15 Mars 1702 la haute mer fut obſervée de $17^{p}\ 1^{p}\frac{1}{2}$; que le 30 Mars, à égale diſtance à peu près de l'Equinoxe, elle fut obſervée de $15^{p}\ 8^{p}$; que le 15 Avril on l'obſerva de $17^{p}\ 6^{p}\frac{3}{4}$ & le 28 Avril de $15^{p}\ 2^{p}$, ce qui s'accorde aux diverſes

diſtances de la Lune qui étoit plus proche de la Terre le quinze Avril, & plus éloignée le vingt-huit Avril que dans les obſervations précedentes, comme on le peut voir dans la Table ci-jointe, où l'on a marqué dans la premiere colomne les jours & heures des nouvelles & pleines Lunes; dans la ſeconde le tems de la haute mer obſervé; dans la troiſiéme le tems de la haute mer calculé; dans la quatriéme la hauteur de la mer le jour de la nouvelle & pleine Lune; dans la cinquiéme la diſtance du Soleil à l'Apogée de la Lune lorſqu'il étoit près de l'Apogée ou du Perigée de la Lune ou des moyennes diſtances; dans la ſixiéme la vraie diſtance de la Lune à la Terre dans les nouvelles & pleines Lunes par rapport à la diſtance moyenne que l'on ſuppoſe de 100000 parties; dans la ſeptiéme colomne le jour de la plus haute marée; & dans la huitiéme la hauteur de la mer pour ce jour.

Si l'on examine preſentement le tems de la haute mer obſervé dans les Quadratures, on trouve qu'il arrive au Havre ſur les 2 heures & demi du ſoir.

Entre 23 obſervations qui en ont été faites, la haute mer qui a le plus acceleré eſt arrivée le 6 Mars 1702 à $1^h\ 55'$ du ſoir, & celle qui a le plus retardé eſt arrivée le 5 May à $3^h\ 30'$.

Pour donner quelque regle de cette variation on ſuppoſe que le tems moyen de la haute mer dans les Quadratures arrive au Havre à $2^h\ 40'$ du ſoir, & on ajoûte ou ôte de ce tems deux minutes pour toutes les heures que le tems de la Quadrature marqué dans quelques Ephemerides anticipe ou ſuit le temps moyen de la haute mer déterminé à $2^h\ 40'$ du ſoir.

Par exemple, le 6 Mars 1702 la haute mer a été obſervée à $1^h\ 55'$ du ſoir, le premier quartier eſt marqué ce jour-là dans la Connoiſſance des Tems à $10^h\ 24'$ du ſoir. La difference entre $2^h\ 40'$ & $10^h\ 24'$ du ſoir eſt de $7^h\ 44'$, auxquels il répond à raiſon de 2 minutes par heure 15 minutes $\frac{1}{2}$, qui étant retranchées de $2^h\ 40'$, don-

TABLE

DU TEMPS ET DE LA HAUTEUR DES MARE'ES dans les Nouvelles & Pleines Lunes au Havre de Grace.

JOURS ET HEURES des Nouvelles & Pleines Lunes.	Temps de la haute Mer observé.		Temps de la haute Mer calculé.		Hauteur de la Mer.			Distance du Soleil à l'Apogée de la Lune			Distance de la Lune à la terre dans les Conj & Opp.	Jour de la plus haute Marée	Hauteur de la Mer.		
1701.	H.	M.	H.	M.	Piés.	Pou.	L.	S.	D.	M.			Piés.	Pou.	L.
Le 8 Avril à 10h 54′ m.								1	0	21	105589	10 Avril.	15	6	6
Le 22 Avril à 5 16 so.					16	2						24 Avril.	16	10	
Le 8 May à 1 42 m.					15	3						9 & 10 M.	15	6	3
Le 22 May à 2 18 m.					15	11						23 May.	16	0	6
Le 6 Juin à 2 28 so.			9	16	14	11	6					8 & 9 Juin.	15	7	
Le 20 Juin à 0 26 so.	9	1	9	20	15	4		3	2	33	99713	21 Juin.	15	5	9
Le 6 Juillet à 0 58 m.	9	25	9	43	15	0	3	3	16	2	98372	7 Juillet.	15	3	3
Le 19 Juillet à 11 50 so.	8	39	8	57	14	6	9					22 Juillet.	15	0	3
Le 4 Aoust à 10 15 m.	9	48	9	24	15	8	6					7 Aoust.	16	10	
Le 18 Aoust à 2 6 so.	9	6	9	16½	15	4						19 Aoust.	15	11	6
Le 2 Septemb. à 6 5 so.	9	46	9	8½	15	11	6					4 Sept.	17	6	
Le 17 Septemb. à 5 56 m.	9	30	9	34	15	4		5	18	10	106340	19 Sept.	15	11	
Le 2 Octobre à 2 20 m.	9	33	9	40	17	2		6	1	13	93469	4 Oct.	17	9	
Le 16 Octobre à 11 24 so.	9	12	8	58	16	3						16 & 17 O.	16	3	
Le 31 Octobre à 11 24 m.	9	34	9	22	16	7	6					1 Nov.	16	11	
Le 15 Novemb. à 5 4 so.			9	11	15	10						16 Nov.	15	11	
Le 29 Novemb. à 10 11 so.	8	56	9	0	17	0						30 Nov.	17	10	
Le 15 Decemb. à 10 16 m.	9	30	9	24	15	4	8					18 Dec.	15	6	
Le 29 Decemb. à 10 47 m.	8	59	9	23	15	11	9					30 Dec.	16	5	6
1702.												1702.			
Le 14 Janvier à 1 12 m.	9	25	9	43	16	5	8	9	4	37	100013	14 Janv.	16	5	8
Le 28 Janvier à 0 57 m.	9	45	9	43	16	1	6	9	17	19	100477	29 Janv.	16	4	9
Le 12 Fevrier à 3 2 so.	9	6	9	15	15	9						15 Fev.	18	3	
Le 26 Fevrier à 6 15 so.	9	25	9	8	15	6	4					28 Fev.	17	2	
Le 14 Mars à 1 48 m.	9	34	9	41½	16	7						15 Mars.	17	1	6
Le 28 Mars à 11 7 m.	9	33½	9	23	15	3						30 Mars.	15	8	
Le 12 Avril à 0 13 so.	9	39	6	20	16	9		11	22	55	93519	15 Avril.	17	6	9
Le 27 Avril à 5 49 m	9	40	9	33	15	0	9	0	5	52	106496	28 Avril.	15	2	3
Le 11 May à 4 59 so	9	23	9	11	16	3	3					12 May.	17	0	
Le 26 May à 8 27 so	9	25	9	4	14	1	6								

nent $2^h 24'\frac{1}{2}$ pour le tems de la haute mer à $29'\frac{1}{2}$ près de celui qui a été obſervé.

De même le 5 May 1702 jour auquel la marée a le plus retardé dans les quadratures, la haute mer a été obſervée à 3h 30'; le premier quartier eſt marqué ce jour-là dans la Connoiſſance des Tems à $1^h 59'$ du matin. La difference entre $1^h 59'$ du matin & $2^h 40'$ du ſoir eſt de $12^h 41'$, auquel il répond à raiſon de 2 minutes par heure 25', qui étant ajoûtées à 2h 40', donnent $3^h 5'$ pour le tems de la haute mer à 25 minutes près de celui qui a été obſervé.

On auroit trouvé dans ces deux obſervations le tems de la haute mer plus exactement, ſi au lieu de 2 minutes d'anticipation ou de retardement par heure on avoit ſuppoſé trois minutes, ce qui s'accorde mieux au retardement de la marée d'un jour à l'autre vers les Quadratures, qui excede pour l'ordinaire une heure.

La haute mer arrivant au Havre dans les nouvelles & pleines Lunes à $9^h 26'$ du matin & dans les Quadratures à $2^h 40'$, on a $5^h 14'$ pour l'intervalle entre le tems de la haute mer depuis les nouvelles & pleines Lunes juſqu'aux Quadratures. On avoit trouvé à Dunquerque cet intervalle de $5^h 12'$, ce qui fait voir qu'il y a une grande conformité dans le tems des marées obſervé dans ces deux Ports.

A l'égard des plus petites marées que l'on a obſervé au Havre de Grace, elles n'arrivent pas pour l'ordinaire dans les Quadratures, mais un ou deux jours après le premier ou le dernier quartier.

La plus petite marée eſt arrivée le 8 Mars 1702 deux jours après le premier quartier de la Lune, la mer étant montée ce jour-là à la hauteur de 9p 8p 4l, & la plus haute marée a été obſervée, comme on l'a dit ci-deſſus, le 15 Février à la hauteur de 18p 3p. Il y a donc eu au Havre une difference de 8p 7p entre les plus hautes & les plus petites marées qui y ont été obſervées, au lieu qu'on n'a trouvé à Dunquerque qu'une difference de 7 pieds dans la hauteur des marées.

TABLE

DU TEMPS ET DES HAUTEURS DES MARE'ES dans les Quadratures au Havre de Grace.

JOURS ET HEURES des Quadratures.	Temps de la haute Mer observé.	Temps de la haute Mer calculé.	Hauteur de la Mer.	Distance du Soleil à l'Apogée de la Lune.	Distance de la Lune à la Terre dans les Quadrat.	Jour de la plus petite Marée.	Hauteur de la Mer.
	H. M.	H. M.	Piés. Pou. L.	S. D. M.			Piés. Pou. L.
1701.							
1. □ Le 16 Avril à 2h 8′m.		3 6	11 2 6			17 Avril.	10 10
3. □ Le 29 Avril à 10 25 so.		2 24	12 2 6			1 May.	10 10 6
1. □ Le 15 May à 9 6 m.		2 51	13 0 6			16 May.	12 7 6
3. □ Le 29 May à 3 38 so.		2 38	12 3 0			30 May	11 4
1. □ Le 13 Juin à 2 26 so.	3 1 s.	2 40 ½	13 6	2 26 40	97615	14 Juin.	13 0
3. □ Le 28 Juin à 9 14 m.	3 10	2 51	11 9	3 9 17	106250	29 Juin.	11 3
1. □ Le 12 Juillet à 7 17 so.	2 5	2 31	13 11			15 Juillet.	12 11
3. □ Le 28 Juillet à 2 23 m.	3 0	3 5	11 10			29 Juillet.	11 6
1. □ Le 11 Aoust à 1 14 m.	2 50	3 7	13 11 6			13 Aoust.	12 7
3. □ Le 26 Aoust à 6 6 so.	2 0 ½	2 33	12 4 3			18 Aoust.	11 8 6
1 □ Le 9 Sept. à 9 20 m.	2 42	2 51	13 7 8			10 Sept.	11 8 9
3. □ Le 25 Sept. à 7 58 m.	2 24	2 53 ½	11 3 6	5 25 8	102165	26 Sept.	10 7
1. □ Le 8 Octob. à 8 47 so.	2 29	2 28	13 6 4	6 6 30	102275	10 Octob.	11 2 3
3. □ Le 24 Octob. à 7 50 so.	2 30	2 30	11 7 9			25 Octob.	10 4 8
1. □ Le 7 Novem. à 0 17 so.	2 51	2 45	12 5			8 Nov.	11 5
3. □ Le 23 Novem. à 6 0 m.		2 58	12 6			23 Nov.	12 6
1. □ Le 7 Decem. à 7 31 m.	2 51	2 54 ½	12 4				
3. □ Le 22 Decem. à 8 48 so.	2 39	2 28	13 6				
1702.							
1. □ Le 6 Janvier à 5 47 m.	3 4	2 58	14 3 ⅓	8 28 20	106425		
3. □ Le 20 Janvier à 10 41 so.	2 13	2 24	15 0 9	9 10 2	97717	22 Janv.	13 2 8
1. □ Le 5 Fevrier à 2 34 m	2 36	3 4	12 5 3			6 Fevr.	10 10
3. □ Le 19 Fevrier à 6 33 m.	2 24	2 56 ½	13 4			21 Fevr.	12 7 9
1. □ Le 6 Mars à 10 24 so.	1 55	2 24 ½	11 3 6			8 Mars.	9 8 4
3. □ Le 20 Mars à 3 47 so.	2 46	2 38	13 4 9			22 Mars.	10 10 4
1. □ Le 5 Avril à 2 9 so.	2 12	2 41	11 8			6 Avril.	10 6 3
3. □ Le 19 Avril à 3 39 m.	3 14	3 2	12 2 9	11 28 56	101725	20 Avril.	11 6 3
1. □ Le 5 May à 1 59 m.	3 30	3 6	11 5	0 12 40	100856	7 May.	11 6
3. □ Le 18 May à 4 4 so.	3 10 ½	3 37	12 2 8			20 & 21 M.	11 4

En comparant les diverſes hauteurs des marées obſervées au Havre vers les Quadratures, on trouve qu'elles ont auſſi [illegible] aux diverſes diſtances de la Lune à la Terre, comme on le peut voir [illegible] ci-jointe du tems & de la hauteur des marées dans les Quadratures, où l'on remarquera que le 22 Janvier 1702 la Lune étant dans ſon Perigée vers les Quadratures, la hauteur de la mer fut obſervée de 13p 2p 8l plus petite ſeulement de deux pieds que le 28 Avril 1702, deux jours après la nouvelle Lune qui étoit alors dans ſon Apogée.

Après avoir établi le retardement des marées dans les nouvelles & pleines Lunes & dans les Quadratures, l'on a examiné toutes les obſervations qui ont été faites au Havre de Grace, & on a trouvé que le retardement moyen de la marée d'un jour à l'autre étoit preſque entierement ſemblable à celui qu'on avoit obſervé à Dunquerque; enſorte qu'on peut ſe ſervir de la même regle pour trouver dans ces deux Ports le tems de la haute mer pour tous les jours de l'année, & l'on a dreſſé une Table de ces retardemens ſemblable à celle que l'on a conſtruit pour Dunquerque, par le moyen de laquelle on pourra examiner ſi dans les autres Ports le flux & le reflux de la mer ſuit la même regle. Il faudra pour cela établir d'abord le tems moyen des marées dans chaque Port pour les jours des nouvelles & pleines Lunes & des Quadratures, & ſe ſervir des regles preſcrites ci-après.

On a marqué dans cette Table les marées de douze heures en douze heures après la pleine Lune, afin de pouvoir trouver facilement les marées du matin & du ſoir.

9h 26' matin. Temps au Havre le jour des nouvelles & pleines Lunes.	*3h 4[illegible] [illegible] la haute Mer au Havre le jour des Quadratures.*

TABLE DU RETARDEMENT des Marées.

Jours & heures aprés la nouvelle ou pleine Lune,		Retardement des Marées.		Diff.	Jours & heures aprés le premier ou dern. quart.		Retardement des Marées.		Diff.
Jour.	Heu	Heur.	Min.	Min.	Jour.	Heur.	Heur.	Min.	Min.
0	0	0	0		0	0	0	0	
	12	0	26	26		12	0	32	32
1	0	0	50	24	1	0	1	8	36
	12	1	11	21		12	1	49	41
2	0	1	30	19	2	0	2	32	43
	12	1	48	18		12	3	11	39
3	0	2	6	18	3	0	3	44	33
	12	2	24	18		12	4	14	30
4	0	2	42	18	4	0	4	40	26
	12	3	1	19		12	5	4	24
5	0	3	21	20	5	0	5	28	24
	12	3	41	20		12	5	50	22
6	0	4	2	21	6	0	6	12	22
	12	4	21	19		12	6	34	22
7	0	4	39	18	7	0	6	54	20

PREMIERE REGLE.

Trouver au Havre le temps de la haute Mer pour les jours de la nouvelle & pleine Lune & des Quadratures.

Cherchez dans quelques Ephemerides, l'heure de la nouvelle ou pleine Lune & des Quadratures, & prenez la difference entre cette heure & le temps moyen de la haute Mer marqué pour le jour de la phase. Doublez cette difference, & vous aurez le nombre des minutes qu'il faut ajoûter au temps moyen de la haute Mer, si l'heure de la phase anticipe le temps moyen de la haute Mer; & qu'il faut retrancher au contraire si l'heure de

de la phase suit le tems moyen de la haute mer, & on aura le vrai tems de la haute mer pour le jour de la phase donnée, soit nouvelle ou pleine Lune, ou l'une des Quadratures.

EXEMPLE.

On cherche le tems de la haute mer le jour de la nouvelle Lune de Janvier 1702.

On trouve dans la Connoissance des Tems que la nouvelle Lune est arrivée le 28 Janvier à 0^h 57′ du matin. La difference entre 0^h 57′ du matin & 9^h 26′ du matin, tems moyen de la haute mer dans les nouvelles & pleines Lunes au Havre de Grace, est 8^h 29′, dont le double 16′ 58″ est le nombre des minutes qu'il faut ajoûter à 9^h 26′, tems moyen de la haute mer au Havre, à cause que l'heure de la pleine Lune anticipe le tems de la haute mer, & on aura le vrai tems de la haute mer le 28 Janvier 1702 à 9^h 43′ M. du Bocage l'a observé à 9^h 45′.

SECONDE REGLE.

Trouver au Havre le tems de la haute Mer pour tous les jours donnés.

Cherchez d'abord par la premiere Regle le tems de la haute mer pour le jour de la nouvelle ou pleine Lune, ou des Quadratures qui précede immediatement le jour donné. Ajoûtez-y le retardement de la marée qui convient à la difference entre le jour donné & le jour de la phase précedente, & vous aurez le tems de la haute mer pour le jour cherché.

EXEMPLE.

On cherche le tems de la haute mer pour le premier Février 1702.

On trouve dans la Connoissance des Tems que la phase qui a précedé immediatement le premier Février, est la nouvelle Lune qui est arrivée le 28 Janvier 1702 à 0^h 57′ du matin quatre jours avant le jour donné. On a trouvé par l'Exemple précedent que le tems de la haute mer est arrivé ce jour-là à 9^h 43′ du matin. Ajoûtez y 2^h 42′ qui est le retardement qui convient à quatre jours,

& vous aurez le tems de la haute mer le 1 Février 1702 à 0^h 25′ du soir. M. du Bocage l'a observé ce jour là à 0^h 15′ du soir.

Pour trouver le tems de la haute mer qui précede ou qui suit immediatement celle qu'on a trouvée, il faudra retrancher ou ajoûter la difference marquée dans la Table qui convient à 12 heures. On pourra aussi appliquer au Havre de Grace les trois dernieres Regles qui sont prescrites pour trouver à Dunquerque les grandes & petites marées, que l'on obmet ici de crainte de repetition.

Comme l'intervalle entre les nouvelles ou pleines Lunes & les Quadratures varie depuis 6 jours jusqu'à 8 jours, il suit que lorsque cet intervalle est de 6 jours, alors le retardement de la marée d'un jour à l'autre doit être plus grand que lorsque l'intervalle est de 8 jours; c'est-pourquoi on a construit pour une grande précision une Table où le retardement de la marée est marqué suivant ces diverses intervalles.

Pour l'usage de cette Table on prendra dans les Ephemerides l'intervalle des jours qui est entre la phase qui précede & celle qui suit immediatement le jour donné, & on se servira du retardement de la marée qui est marqué dans la colomne sous ce nombre de jours.

Par exemple, on veut sçavoir le tems de la haute mer pour le 1 Février 1702, qui est l'Exemple proposé dans la seconde Regle.

La phase qui a précedé immediatement le 1 Février est la nouvelle Lune du 28 Janvier 1702, & la phase suivante est le premier quartier qui est arrivé le 5 Février 1702. L'intervalle entre ces deux phases est 8 jours. Cherchez sous la colomne au haut de laquelle est marqué VIII. jours, le retardement qui convient à quatre jours qui est 2^h 31′; ajoûtez les à 9^h 43′ du matin (tems de la haute mer pour le jour de la nouvelle Lune précedente trouvé par la premiere Regle) & vous aurez le tems de la haute mer le 1 Février 1702 à 0^h 14′ du soir, à une minute près de celui qui a été observé.

Table du Retardement des Marées.

Intervalle entre le jour des Nouvelles ou Pleines Lunes & le jour des Quadratures.

Retardement des Marées.

Jours & heures aprés la nouvelle ou pleine Lune.		VI. jours.			VII. jours.			VIII. jours.		
Jou.	Heu.	Heu.	Min.	Dif.	Heu,	Min,	Dif,	Heu,	Min,	Dif.
0	0	0	0	29	0	0	27	0	0	25
	12	0	29	25	0	27	24	0	25	22
1	0	0	54	22	0	51	22	0	47	20
	12	1	16	21	1	13	20	1	7	18
2	0	1	37	21	1	33	20	1	25	17
	12	1	58	20	1	53	19	1	42	16
3	0	2	18	20	2	12	19	1	58	16
	12	2	38	20	2	31	19	2	14	17
4	0	2	58	22	2	50	20	2	31	19
	12	3	20	23	3	10	22	2	50	20
5	0	3	43		3	32	24	3	10	21
	12				3	56	27	3	31	22
6	0				4	23		3	53	23
	12							4	16	23
7	0							4	39	

Jours & heures aprés les Quadratures.										
Jou.	Heu.	Heu.	Min.	Dif.	Heu,	Min,	Dif,	Heu,	Min.	Dif,
0	0	0	0	37	0	0	31	0	0	29
	12	0	37	39	0	31	35	0	29	33
1	0	1	16	42	1	6	41	1	2	40
	12	1	58	44	1	47	45	1	42	44
2	0	2	42	44	2	32	44	2	26	45
	12	3	26	37	3	16	34	3	11	34
3	0	4	3	29	3	50	27	3	45	27
	12	4	32	26	4	17	25	4	12	25
4	0	4	58	24	4	42	23	4	37	22
	12	5	22	24	5	5	23	4	59	23
5	0	5	46		5	28	25	5	22	25
	12				5	53	25	5	47	27
6	0				6	18		6	14	27
	12							6	41	27
7	0							7	8	
	12									

REFLEXIONS

Sur les obſervations des Marées faites à Breſt & à Bayonne.

PAR M. CASSINI le fils.

1710 16. Aouſt.

AYant trouvé que les obſervations du flux & du reflux de la mer faites à Dunquerque & au Havre de Grace s'accordoient entr'elles, de ſorte que l'on peut ſe ſervir des mêmes Regles pour trouver dans ces deux Ports le tems de la haute mer pour tous les jours de l'année avec aſſez de préciſion. On a crû devoir examiner ſi ces Regles s'accordoient aux obſervations faites à Brëſt & à Bayonne ſur les marées par Mrs de la Hire & Picard.

Ces obſervations ſont rapportées dans le Recueil des voyages de l'Academie. Elles furent faites à Breſt au mois de Septembre 1679 dans le Jardin du Roy qui a vûë ſur le Port, où la mer eſt ordinairement fort en repos.

Mrs de la Hire & Picard y obſerverent depuis le 18 juſqu'au 28 Septembre le tems de la haute mer & de la baſſe mer. Ils n'attendoient pas pour faire leurs obſervations que la mer fût tout à fait haute ou tout à fait baſſe, parce qu'alors elle demeure trop long-tems en état: mais ils marquoient deux tems éloignez devant & après auxquels elle ſe trouvoit à certaine hauteur préciſe, qui duroit ſi peu qu'ils n'ont pas fait difficulté de marquer juſqu'aux ſecondes. Ils prenoient enſuite le milieu du tems qui s'étoit écoulé entre les obſervations correſpondantes.

En comparant d'abord le retardement de la marée du 18 au 19 Septembre, on le trouve de 48′ ſemblable au moyen mouvement de la Lune. Ce retardement eſt enſuite un peu plus petit juſqu'au 26 du même mois;

mais depuis le 26 jusqu'au 28 il est excessif, y ayant eu du 26 au 27 un retardement dans le tems de la haute mer de $1^h 9' 45''$, & du 27 au 28 de $1^h 30' 30''$.

Comme les regles que nous avons prescrites pour trouver à Dunquerque & au Havre le tems de la haute mer demandent la connoissance des jours & heures des nouvelles & pleines Lunes & des Quadratures, nous avons examiné les jours de la Lune ausquelles ces observations ont été faites, & nous avons trouvé dans la Connoissance des Tems de 1679 que la pleine Lune est arrivée le 20 Septembre à $7^h 48'$ du matin, & le dernier quartier le 26 à $7^h 4'$ du soir. Le 20 Septembre jour de la pleine Lune la hauteur des marées n'y fut pas observée; mais par la comparaison des observations qui ont été faites les jours précedens & suivans, on voit qu'il a dû arriver environ sur les quatre heures du soir. On trouve ensuite que le retardement des marées a été en diminuant, & s'accorde à peu près à ce qui résulte de la regle : mais depuis le 26 jusqu'au 28 le retardement journalier a été plus grand, comme il devoit arriver suivant la regle. Car le dernier quartier de la Lune étant arrivé le 26, il doit y avoir du 26 au 27 un retardement de $1^h 8'$, & du 27 au 28 de $1^h 24'$, à quelques minutes près de celui qui a été observé du 26 au 27 de $1^h 10'$, & du 27 au 28 de $1^h 30' 30''$.

Pour pouvoir comparer avec plus de facilité la regle avec les observations, on a dressé la Table suivante; où l'on a marqué dans la premiere colomne le jour de l'observation; dans la seconde le tems de la haute ou basse mer déterminé par l'observation; dans la troisiéme & quatriéme le tems calculé suivant la premiere & seconde Table, & dans la cinquiéme & sixiéme la difference entre le tems observé & le tems calculé suivant la premiere & seconde Table du retardement des marées.

Table des Marées obſervées à Breſt.

1679.	*Temps de la haute ou baſſe Mer obſervé.*	*Temps calculé.* par la premiere Table.	*Temps calculé.* par la ſeconde Table.	*Diff. par la premiere Table.*	*Diff. par la ſeconde Table.*
Septembre. jours.	H. M. S.	H. M.	H. M.	M.	M.
18	2 25 30 ſoir. Haute mer.				
19	3 13 30 ſoir. Haute mer.				
Pleine Lune à 7 h. 48 min. mat. 20		4 2 ſoir.	4 2		
21	10 29 30 mat. Baſſe mer.	10 40	10 43	$10\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$
22	11 41 45 ſoir. Baſſe mer.	11 41	11 49	$0\frac{3}{4}$	$7\frac{1}{4}$
24	0 25 30 mat. Baſſe mer. 0 46 30 ſoir. Baſſe mer.	0 17 0 35	0 30 0 50	$8\frac{1}{2}$ $11\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$ $3\frac{1}{2}$
25	1 12 30 mat. Baſſe mer. 1 34 30 ſoir. Baſſe mer.	0 53 1 13	1 11 1 34	$19\frac{1}{2}$ $21\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$ $0\frac{1}{2}$
1. quartier à 7 heur. 4' ſoir. 26	3 56 40 mat. Baſſe mer. 8 6 45 mat. Haute mer.	1 53 8 6 45	1 53 8 6 45	$3\frac{2}{3}$ 0	$3\frac{2}{3}$ 0
27	3 38 30 mat. Baſſe mer. 9 16 30 mat. Haute mer. 10 9 30 ſoir. Haute mer.	2 57 9 15 9 56	2 54 9 9 9 49	$41\frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2}$ $13\frac{1}{2}$	$44\frac{1}{2}$ $7\frac{1}{2}$ $20\frac{1}{2}$
28	10 47 0 mat. Haute mer.	10 39	10 33	8	14

Reflexions ſur les obſervations des Marées faites à Bayonne.

Les obſervations ſur le flux & le reflux de la mer furent faites à Bayonne par M[rs]. de la Hire & Picard dans la Dour où la marée monte conſiderablement.

Ils obſerverent de la même maniere qu'ils avoient fait à Breſt l'année précedente le temps de la haute mer & de la baſſe mer depuis le 12 Septembre 1680. juſqu'au 4. Octobre ſuivant.

Pour pouvoir comparer la Regle du retardement des

marées avec les obſervations, on a d'abord cherché dans la Connoiſſance des Temps de 1680. les jours & heures des phaſes de la Lune, & l'on a trouvé que le dernier quartier de la Lune eſt arrivé le 15 Septembre 1680 à 1^h $4'$ du matin; que la nouvelle Lune ſuivante eſt arrivée le 22 à 7^h $30'$ du ſoir, & que le premier quartier eſt arrivé le 30 Septembre à 11^h $4'$ du ſoir.

Il ſuit donc de la Regle qu'à commencer du 15 Septembre jour du dernier quartier, il doit y avoir eu un grand retardement dans la marée d'un jour à l'autre pendant trois ou quatre jours; que depuis le 22 Septembre jour de la nouvelle Lune juſqu'au 30 Septembre jour du dernier quartier, il y a eu de l'acceleration dans les marées, & que depuis le 30 Septembre juſqu'au 4 Octobre il doit y avoir eu un retardement dans la marée, ce qui s'accorde entierement aux obſervations.

Cette conformité de la regle du retardement des marées avec les obſervations nous a donné lieu d'examiner ſi elle s'y accordoit dans toutes les circonſtances. On a ſuppoſé pour cela que la haute mer arrivée à Bayonne le jour de la nouvelle & pleine Lune à 3^h $30'$ telle qu'elle eſt marquée dans la Connoiſſance des Temps. L'intervalle entre le tems des marées depuis la nouvelle ou pleine Lune juſqu'aux quadratures étant de 5^h $14'$ comme on l'a trouvée au Havre, on aura le tems de la haute mer dans les quadratures à Bayonne à 8^h $44'$. Sur ces hypotheſes on a calculé par les regles preſcrites dans le Memoire précedent le tems de la haute ou baſſe mer dans les obſervations faites à Bayonne depuis le 15 Septembre, on les a marqué dans la Table ci-jointe avec les differences, qui ſont pour la plûpart ſi petites, qu'on n'auroit jamais eſperé de pouvoir arriver à une ſi grande préciſion.

Table des Marées obſervées à Bayonne.

1680.	*Tems de la haute & baſſe Mer obſervé.*				*Temps calculé.* *par la premiere Table.*		*par la ſeconde Table.*		*1. Diff. par la 1re. Table.*	*2. Diff. par la 2de Table.*
Septembre.										
jours.	H.	M.	S.		H.	M.	H.	M.	M.	M.
12	0	1	0	mat. Baſſe mer.						
	0	24	30	ſoir. Baſſe mer.						
13	0	43	0	mat. Baſſe mer.						
	1	8	45	ſoir. Baſſe mer.						
14	1	34	30	mat. Baſſe mer.						
	2	0	30	ſoir. Baſſe mer.						
1. quartier à 1. heur. 4 15 min. mat.	2	35	30	mat. Baſſe mer.	2	38	2	39	2	3
	3	8	15	ſoir. Baſſe mer.	3	8	3	8	0	0
	9	20	45	ſoir. Haute mer.	9	23	9	23	2	2
16	3	44	0	mat. Baſſe mer.	3	39	3	38	5	6
	9	57	0	mat. Haute mer.	9	55	9	54	2	3
	10	40	30	ſoir. Haute mer.	10	31	10	29	9	11
18	0	13	30	ſoir. Haute mer.	0	34	0	37	20	23
19	1	14	0	mat. Haute mer.	1	7	1	13	7	1
	1	43	0	ſoir. Haute mer.	1	37	1	40	6	3
20	2	7	30	mat. Haute mer.	2	3	2	5	4	2
	2	33	0	ſoir. Haute mer.	2	27	2	28	6	5
	8	42	0	ſoir. Baſſe mer.	8	39	8	40	3	2
21	2	54	0	mat. Haute mer.	2	51	2	53	3	1
	9	4	30	mat. Baſſe mer.	9	2	9	5	2	0
	3	14	50	ſoir. Haute mer.	3	13	3	18	2	3
	9	23	0	ſoir. Baſſe mer.	9	23	9	[illegible]	0	1

Table

Table des Marées obfervées à Bayonne.

Jours. 1680.	Temps de la haute & baffe Mer obfervé.				Temps calculé. par la premiere Table.		par la feconde Table.		1. Diff. par la 1re. Table.	2. Diff. par la 2de Table.
Septembre.	H.	M.	S.		H.	M.	H.	M.	M.	M.
Pleine Lune à 7. h. 30 22 min. foir.	9 9	39 56	0 mat. 30 foir.	Baffe mer. Baffe mer.	9 9	10 35	9 9	10 35	29 21	29 21
23	10 10	11 25	30 mat. 0 foir.	Baffe mer. Baffe mer.	10 10	1 22	9 10	58 19	11 3	14 6
24	10 11	47 2	0 mat. 30 foir.	Baffe mer. Baffe mer.	10 11	43 1	10 10	38 56	4 1	9 6
25	11 11	19 32	30 mat. 0 foir.	Baffe mer. Baffe mer.	11 11	19 37	11 11	12 28	0 5	7 4
26	11	50	0 mat.	Baffe mer.	11	55	11	45	5	5
27	0 0	7 23	0 mat. 30 foir.	Baffe mer. Baffe mer.	0 0	13 33	0 0	2 22	6 9	5 1
28	0 0	35 59	30 mat. 30 foir.	Baffe mer. Baffe mer.	0 1	53 13	0 1	42 3	18 13	6 3
1. quartier le 30 Sept. à 11. heur. 4 min. foir. 29	1	14	30 mat.	Baffe mer.	1	31	1	26	17	11
Octobre. 1	3 9 10	19 30 3	0 mat. 0 mat. 30 foir.	Baffe mer. Haute mer. Haute mer.	2 9 9	55 11 47	2 9 9	55 8 41	24 19 16	24 22 22
2	10 11	52 22	30 mat. 0 foir.	Haute mer. Haute mer.	0 11	28 11	10 11	21 5	24 11	31 17
3	0	5	0 foir.	Haute mer.	11	50	11	50	15	15
4	0 1	27 35	0 mat. 30 foir.	Haute mer. Haute mer.	0 0	22 54	0 0	24 51	5 41	3 44

EXAMEN DE LA SOYE

DES ARAIGNÉES.

PAR M. DE REAUMUR.

1710. 12. Novem.

LA haine du Public étoit depuis long-tems funeste aux Araignées : toutes les choses curieuses que divers Sçavans en avoient publiées, n'avoient pù les raccommoder dans son esprit ; elles y passoient toûjours pour un Insecte dangereux, ou du moins inutile, lorsque M. Bon Premier President de la Chambre des Comptes de Montpellier, & Académicien honoraire de la Societé Royale de la même Ville, attira l'an passé une attention assez generale à un animal si universellement haï : aussi eut-on lieu d'esperer des choses singulieres qu'il fit voir, qu'on en pourroit un jour tirer quelque utilité, puisque les Araignées filoient, comme les Vers, une soye, dont on pouvoit faire de fort beaux ouvrages. Les Bas & les Mitaines qu'il presenta alors à l'Assemblée, en étoient une preuve incontestable ; par ses soins elles avoient été faites de cette nouvelle soye. L'Académie, à qui il envoya quelque tems après les Mitaines, les vit avec le plaisir que lui donnent les choses curieuses ; mais l'attention particuliere qu'a cette Compagnie à ce qui regarde le bien public, ne lui permit pas d'en rester là. Elle crut qu'il falloit examiner de plus près une découverte qui avoit quelque air d'utilité, afin qu'on en tirât tout le fruit qu'on en pouvoit tirer, ou qu'on sçût du moins qu'on ne negligeoit pas une chose avantageuse. Elle étoit trop instruite du sort de la soye des Vers, qui quoique connuë, est restée presque inutile pendant plusieurs Siecles ; pour ne pas craindre que la soye des Araignées n'eût une pareille fortune.

L'Académie jugea donc à propos de charger deux

Académiciens, de ſuivre de près l'ingenieuſe découverte de M. Bon. Je fus un de ceux qu'elle honora de ſon choix, perſuadée apparemment qu'il ne s'agiſſoit ici que de quelques ſoins & de quelque application, & que je ne negligerois rien pour me rendre digne de l'honneur qu'elle m'avoit fait. Il en falloit moins pour m'engager à une recherche, qui avoit quelque rapport au bien public. J'y fus cependant encore excité par un motif très-preſſant: ce fut l'interêt que me parut prendre au ſort des Araignées, un illuſtre Abbé, que je n'oſe nommer ici, parcequ'on ne peut le nommer ſans éloges, & qu'il ne les entend point ſans peine *, mais qu'on reconnoîtra aſſez, lorſque je dirai que c'eſt lui qui ſoûtient par ſa protection, ſes conſeils, ſes exemples la Republique des Lettres dans les tems les plus difficiles.

** M. l'Abbé Bignon préſidoit à l'Aſſemblée publique de l'Académie dans laquelle ce diſcours fut lû.*

Pour travailler avec quelque ordre à l'examen de la ſoye des Araignées, je crus la devoir ſur-tout conſiderer par rapport à celle des Vers, pour tâcher de découvrir par cette comparaiſon, ſi on pourroit tirer de la nouvelle ſoye quelque avantage ſemblable à celui que nous tirons de l'ancienne. Car il ne s'agiſſoit plus de ſçavoir ſi les Araignées filoient dans certains tems une ſoye propre aux ouvrages; M. Bon l'avoit démontré d'une maniere auſſi curieuſe que certaine: mais ſi elles filoient une ſoye dont le Public pût profiter. Pour le déterminer, tout me ſembla ſe réduire non-ſeulement à trouver le ſecret de nourrir & d'élever les Araignées, comme quelques Sçavans l'ont ſuppoſé; mais de ſçavoir encore ſi le ſecret de nourrir les Araignées étant trouvé, cette ſoye pourroit être à auſſi bon marché que l'autre; ou en cas qu'elle fût plus chere, ſi cet inconvenient ſeroit compenſé par quelque autre avantage. Ce ſont les deux points eſſentiels que je me propoſai dans ma recherche, & auſquels on peut ramener tout ce que je vais dire dans cet Examen de la ſoye des Araignées.

L'adreſſe dont ſe ſervent les Araignées pour attraper les Mouches, a appris à tout le monde qu'elles ſe nour-

riſſent de ces Inſectes : mais il n'eſt preſque pas beſoin de reflexion, pour appercevoir qu'il n'eſt pas poſſible de nourrir avec des Mouches autant d'Araignées qu'il en faudroit, pour fournir de ſoye des Manufactures. De quelle adreſſe ſe ſervir pour prendre chaque jour une quantité de Mouches auſſi grande que celle qui ſeroit neceſſaire ? Mais quand même on auroit la facilité de prendre les Mouches auſſi aiſément qu'on le voudroit, il ne me ſeroit pas difficile de faire voir qu'on n'en ſeroit gueres plus avancé, & que toutes les Mouches du Royaume ſuffiroient à peine à nourrir aſſez d'Araignées, pour faire une quantité de ſoye peu conſiderable, comme il ſera aiſé de le déduire de ce que je dirai dans le ſecond Article.

Il falloit donc avoir recours à une nouvelle nourriture, de laquelle on pût avoir commodément une quantité ſuffiſante : le naturel vorace des Araignées montroit aſſez qu'elle ne devoit pas être tirée des plantes ; qu'ainſi ni leurs fleurs, ni leurs feüilles, ni leurs fruits ne devoient pas être propres à les nourrir. Je ne laiſſai pas de tenter ces ſortes d'alimens, pour n'avoir pas à me reprocher d'avoir negligé quelque choſe ; & parceque je ſçavois qu'en matiere d'expérience, il arrive ſouvent ce qu'on ne croyoit pas devoir arriver ; mais tout ce que je leur donnay en ce genre, ne fut point pour elles une nourriture.

Il m'avoit cependant été facile de me convaincre que les Mouches n'étoient pas la ſeule qu'on pût leur donner ; car quoique celles qui font leurs toiles dans les angles des murs & dans les jardins en vivent, j'avois obſervé plus d'une fois qu'elles mangent également les autres Inſectes, lorſqu'ils s'embarraſſent dans ces toiles ; les Araignées qui habitent des trous dans de vieux murs, m'avoient encore mieux appris que tous les Inſectes leur étoient propres : car ayant ſouvent viſité de pareils trous, j'y avois ordinairement trouvé des corps de diverſes ſortes d'Inſectes, comme de Cloportes, Millepieds, Chenilles, Papillons.

Il ne sembloit donc plus s'agir que de trouver une espece d'Insecte, dont on pût avoir commodément autant qu'on voudroit ; les seuls Vers de terre me parurent avoir cet avantage. Il y en a des quantitez prodigieuses, les jardins, les champs en sont remplis ; il n'est personne qui n'ait remarqué qu'après des nuits pluvieuses, les allées des jardins sont couvertes de divers petits morceaux de terre ronds & tournez en spirale, ils cachent autant de trous par lesquels sont sortis les Vers de terre. Il n'est aussi rien de plus facile que d'avoir de ces Insectes, pourvû qu'on aille les chercher pendant la nuit avec une chandelle, observant seulement d'y aller dans des tems qui n'ont pas été précedez d'une longue secheresse.

A la verité je n'avois jamais trouvé de Ver de terre dans les toiles ou dans les trous des Araignées ; mais ces Insectes rampans sur la terre, & ayant assez de force & de pesanteur ; il étoit également impossible qu'ils se fussent jettez dans ces filets & dans ces trous, & que les Araignées les y eussent transportez. Il me parut qu'il n'y avoit point de nourriture dont je dusse me promettre davantage. Le succès ne trompa pas mon attente. Ayant renfermé dans des boëtes plusieurs grosses Araignées de diverses especes qui avoient passé l'hyver, car il y en a qui vivent plusieurs années, je leur donnai des morceaux de Ver, & les conservai en vie par ce moyen.

Il ne m'auroit pas suffi pour me persuader que cette nourriture étoit convenable aux Araignées, de les avoir vû vivre pendant plusieurs mois, après la leur avoir donnée. Une expérience que j'avois faite autrefois, m'auroit laissé un doute très-fondé : j'avois gardé une Araignée de maison en vie pendant plus de trois mois, sans lui donner aucune nourriture ; on sçait d'ailleurs que les petites Araignées qui éclosent dans le mois de Septembre, vivent environ huit ou neuf mois sans manger.

Mais comme j'avois renfermé ces Araignées dans des boëtes que j'avois couvertes de verre, j'observois aisément si elles s'attachoient à la nourriture que je leur avois

donnée, & je les voyois attaquer les morceaux de Vers, qu'on fçait fe remuer malgré leur féparation du refte du corps, comme on les voit attaquer les Infectes à qui il refte encore quelque force après s'être laiffez prendre dans leurs filets. Les divers mouvemens de ces morceaux de Vers, excitoient ces Infectes de proye; d'ailleurs elles confervoient leur groffeur & leur vivacité, ce qui n'arrivoit point à celles que je laiffois fans nourriture. Enfin, ce qui eft plus décifif, plufieurs firent des coques dans lefquelles leurs œufs étoient renfermez.

Je tentai enfuite diverfes fortes de viandes, pour voir fi elles ne feroient pas également propres à les nourrir; car quelques commodes que foient les Vers, la viande l'auroit été davantage; mais je vis qu'elles ne la cherchoient point, & que lorfqu'elles la rencontroient, elles s'appliquoient rarement deffus, peut-être parceque le naturel feroce des Araignées veut être excité par des animaux vivans.

J'imaginai cependant une autre nourriture, qui fupplée apparemment à cet avantage, par le goût exquis que les Araignées y trouvent : les jeunes Araignées qui ne font que d'abandonner leurs coques, la préferent à toute autre. Je ne l'employai qu'à caufe du rapport qu'elle me parut avoir avec la chair tendre & molle des Infectes que les Araignées fuccent. Elle confifte dans cette fubftance qui remplit les plumes des jeunes oifeaux, avant qu'elles foient parvenuës à leur parfait accroiffement. On a remarqué fans doute que lorfqu'on arrache de ces jeunes plumes, elles font fanglantes par le bout; que le tuyau eft moû alors: ceux qui fe feront de plus donné la peine de preffer ce tuyau, ou de le diffequer, l'auront trouvé rempli d'une fubftance tendre & garnie d'un grand nombre de vaiffeaux, qui laiffent échaper du fang lorfqu'on les coupe. Après avoir arraché de ces plumes à de jeunes Pigeons ou à des vieux, aufquels j'avois ôté quelque tems auparavant les groffes plumes de la queuë & des aîles; je les divifois en divers petits morceaux d'u-

ne ligne, ou d'une demie ligne de longueur ; je donnois ces petits morceaux aux Araignées qui s'en accommodoient fort. Les jeunes Araignées fur-tout, j'entends celles que j'avois gardées dans leurs coques, & qui les avoient abandonnées depuis peu, fembloient les préferer à toute autre nourriture : j'en voyois quelquefois cinq à fix affemblées fur un même morceau de plume, que chacune fuçoit du côté où il avoit été coupé.

Jufques ici tout paroît aller à merveille pour les Araignées ; voici des nourritures fimples dont il femble qu'il étoit feulement queftion ; peut-être en trouveroit-on d'autres auffi commodes, même parmi les Infectes, pendant qu'on fe ferviroit de celles-là, qui ne font pas plus difficiles à trouver, que les feüilles de Meurier qu'on donne aux Vers, & qui ont quelque chofe de plus commode : on peut les avoir fans aucun foin dans tous les païs, fans craindre pour elles les plus rudes hyvers ; les Rotiffeurs fourniroient une grande quantité de ces jeunes plumes, ou on en auroit de refte, en nourriffant des Poules ou des Pigeons, aufquels on les aracheroit de tems en tems, & qui n'en feroient pas moins leurs œufs & leurs petits, comme je l'ai éprouvé. Mais nous allons voir qu'il y aura beaucoup à décompter, lorfqu'il s'agira d'élever affez d'Araignées pour fournir de foye des Manufactures.

D'abord que les jeunes Araignées abandonnent la foye qui les envelopoit, elles paroiffent parfaitement d'accord, elles travaillent de concert à une même toile ; les unes étendent de nouveaux fils fur ceux que les autres avoient déja fournis. Mais une pareille union ne dure pas long-tems. Je diftribuai en differentes boëtes quatre à cinq mille Araignées, aufquelles j'avois vû abandonner leurs coques. J'en mis deux ou trois cens dans certaines boëtes, dans d'autres cent, ou cinquante, ou même moins ; ces boëtes avoient à peu près la longueur & la largeur d'une carte à joüer, & étoient auffi hautes que larges ; c'étoit un affez grand efpace pour de fi petits ani-

maux. Comme j'avois obſervé qu'elles s'attachoient au verre qui couvroit ces boëtes, je leur avois fait à chacune une ouverture à une ligne de diſtance de ce verre, par laquelle je faiſois entrer une carte qui étoit appuyée ſur la largeur de la boëte. Cette carte bouchoit aſſez exactement l'ouverture, pour empêcher les Araignées de s'échaper. C'eſt ſur cette carte que je mettois la nourriture que j'avois trouvée leur être propre : je la poſois ainſi près de la ſurface ſuperieure de la boëte ou du verre, afin que les Araignées fuſſent plus proches de cette nourriture, & afin que celles qui étoient au fond de la boëte ou ſur les côtez puſſent venir la chercher, j'avois eu la précaution de faire un grand nombre de trous à cette carte ; on pouvoit par ce moyen donner à manger à beaucoup d'Araignées en très-peu de tems. On les voyoit les premiers jours chercher cette nourriture avec empreſſement ; pluſieurs s'attachoient au même morceau de plume.

Mais leur naturel feroce ſe déclara bien-tôt : les plus groſſes & les plus fortes prirent goût à manger les plus petites & les plus foibles : chaque fois que je les regardois, j'en voyois une plus petite qui étoit devenuë la proye d'une un peu plus groſſe, & au bout de quelque tems à peine m'en reſta-t'il une ou deux dans chaque boëte.

Je ſçavois bien que les groſſes Araignées ſe battent quelquefois lorſqu'elles ſe rencontrent ; mais il y avoit quelque apparence qu'étant élevées enſemble, elles pourroient devenir plus ſociables : comme nous voyons que les Poulets & les Dindons élevez dans une même baſſecour vivent fort bien enſemble, quoiqu'ils faſſent quelquefois la guerre aux nouveaux venus, juſqu'à les tuer. Les groſſes Araignées même ſe mangent beaucoup moins les unes les autres que ces petites, ſoit qu'elles aient moins beſoin de nourriture, ou qu'étant plus peſantes, elles aiment moins à ſe remuer.

Apparemment que cette inclination qu'elles ont à ſe manger

manger mutuellement, eſt partie cauſe de ce qu'il y a ſi peu d'Araignées à proportion de ce qu'il devroit y en avoir, faiſant une quantité d'œufs auſſi prodigieuſe qu'elles le font. Je ſçai bien qu'il y a diverſes ſortes d'Inſectes qui les mangent; Pline parle de quelques eſpeces de Frelons & de Lezards qui s'en nourriſſent. J'ai vû des petits Lezards bruns des murs en attrapper avec beaucoup d'adreſſe : mais malgré cela je crois que nous en verrions incomparablement davantage, ſi elles ne ſe mangeoient point.

Il ne ſembleroit donc reſter d'autre parti à prendre, ſi l'on vouloit élever des Araignées, qu'à les loger ſéparément. On pourroit, par exemple, avoir des boëtes diviſées en pluſieurs petits compartimens, qui formeroient pluſieurs cellules; & je l'ay fait comme cela. Mais de donner à manger à chacune de ces Araignées ſéparément, engageroit en des dépenſes peu proportionnées au profit qu'on en retireroit. On pourroit en venir-là, ſi nous n'avions la ſoye des Vers d'une maniere infiniment plus commode.

Je ſçai qu'on pourroit trouver des moyens d'abreger cette maniere de leur donner à manger; & j'en ay même imaginé quelques-uns, que je ne crois pas neceſſaire d'écrire icy : mais quelque choſe qu'on fît, il eſt toûjours à craindre qu'on n'y employât conſiderablement plus de temps, qu'on n'en met à donner la nourriture aux Vers.

La néceſſité où l'on eſt de diſtribuer les Araignées dans des cellules ſéparées, jette encore dans un nouvel embarras, qui ne diminuë pas peu l'avantage qu'elles ont ſur les Vers du côté de leur fécondité. Car pour profiter de cet avantage, il faut pouvoir garder un grand nombre d'œufs, qui ayent été fécondez par l'accouplement; & pour cela, il faut mettre neceſſairement des Araignées enſemble. Je ſçay bien qu'il eſt un temps où il ſe doit faire chez ces Inſectes une douce fermentation qui leur ôte leur férocité naturelle, & qu'on pourroit alors les

mettre enſemble ſans aucun riſque. Mais comment connoître préciſément ce temps, qui doit préceder de peu celui où elles ont envie de faire leurs œufs ? Il ſeroit aiſé à trouver, ſi elles faiſoient toutes ces œufs à peu prés dans les mêmes jours de l'année : mais il y a pluſieurs mois de difference entre le temps que les unes pondent, & celui où les autres pondent à leur tour.

La fécondité des Araignées eſt prodigieuſe, comme M. Bon l'a parfaitement obſervé ; mais aprés tout les Vers ſont féconds de reſte. Quand on ſuppoſeroit qu'ils ne font qu'environ cent œufs, deſquels à peine quarante donnent des Vers qui faſſent leurs coques ; au lieu que les Araignées font ſix à ſept cens œufs ; quoique j'aie remarqué dans tous les Vers que j'ay élevez, pour faire une exacte comparaiſon de leur ſoye avec celle des Araignées, qu'ils ont toûjours donné au moins trois à quatre cens œufs. Il eſt aiſé de voir qu'on peut multiplier le nombre des Vers autant qu'on le voudra, ſi cela dépendoit ſeulement de la quantité de leurs œufs. Il n'en faut d'autre preuve que la quantité de ſoye qu'ils fourniſſent aujourd'huy à l'Europe, où il n'y avoit autrefois aucuns Vers. Il ſeroit donc aiſé avec le temps d'avoir des quantitez de Vers, qui ſurpaſſent autant ce que nous en avons à préſent, que ce que nous en avons ſurpaſſe le petit nombre qu'on apporta d'Orient en Europe. Mais c'eſt qu'il eſt neceſſaire de les loger, nourrir, ſoigner, ce qui fait qu'on n'en éleve pas d'avantage ; parce qu'en augmentant la quantité de la ſoye, on en diminueroit le prix, & les ſoins qu'on eſt obligé de prendre pour élever les Vers, ne ſeroient plus payez aſſez cher.

Il ſemble donc juſques icy que les Vers l'emportent beaucoup ſur les Araignées, par la facilité qu'on a à les élever, & par conſéquent qu'on doit peu ſe promettre de la nouvelle ſoye, ſi elle n'a quelque avantage ſur l'ancienne, ſoit par ſa beauté ou ſa force, ou par la quantité qu'on en peut tirer. C'eſt ce que nous allons examiner dans le ſecond Article.

Comme toutes les eſpeces d'Araignées ne donnent pas une ſoye qu'on puiſſe mettre en œuvre, & que celles qui fourniſſent cette ſoye la filent ſeulement pour former les coques qui envelopent leurs œufs; car on ſçait que les filets qu'elles tendent aux Inſectes ſont faits communément d'une ſoye ſi fine, qu'on ne ſçauroit en faire aucun uſage; il m'a paru neceſſaire de donner une idée generale des diverſes eſpeces d'Araignées auxquelles on peut ramener toutes les autres; & de la differente maniere dont les coques de ces differentes eſpeces ſont faites, afin de faire connoître icy celles dont on peut tirer de la ſoye dans le Royaume.

M. Bon qui conſideroit ſur-tout les Araignées par rapport à leur ſoye, les a auſſi diſtribuées en eſpeces differentes, par le rapport qu'elles ont avec cette ſoye. Il les réduit pour cela à deux eſpeces principales, qui ſont les Araignées à jambes longues, & les Araignées à jambes courtes: ce ſont les dernieres, dit M. Bon, qui fourniſſent la nouvelle ſoye. Mais cette diviſion qui auroit de grands avantages par ſa ſimplicité, ne me paroît pas donner une maniere aſſez ſûre pour diſtinguer ces Araignées des autres. On pourroit être embarraſſé pour ſçavoir quelles ſont celles qu'on doit préciſément nommer à jambes longues, & celles qu'on doit nommer à jambes courtes. Il eſt des Araignées qui ont les jambes d'une grandeur moyenne, entre celle des plus grandes & celle des plus petites; ſous laquelle des deux eſpeces les ranger? Filent-elles de bonne ſoye? Il ſeroit difficile de le déterminer par le moyen de la diviſion précedente. Ce n'eſt pas-là neanmoins ſon plus grand inconvenient, elle en a un plus conſiderable qni expoſeroit à bien des peines inutiles ceux qui voudroient amaſſer des Araignées pour leur faire filer de la ſoye; car la plûpart de celles dont ils auroient eu lieu de s'en promettre davantage, ne leur en donneroient point du tout. Telles ſont diverſes eſpeces d'Araignées vagabondes, & les groſſes Araignées brunes qui habitent des trous de vieux murs, qui

ont les jambes plus courtes que la plûpart de celles qui fourniſſent la ſoye, quoiqu'elles n'en donnent point du tout.

Pour diſtinguer les Araignées du Royaume qui donnent de la ſoye de celles qui n'en donnent pas, je les range d'abord toutes ſous deux genres. Le premier de ces genres eſt compoſé de toutes les eſpeces que M. Homberg a compriſes ſous le nom d'Araignées vagabondes dans les Memoires de 1707, nom qui convient parfaitement à ces eſpeces d'Araignées, qui ne tendent pas comme les autres, des filets aux Inſectes, mais qui les chaſſent avec beaucoup de ruſe & d'adreſſe. Toutes ces Araignées filent peu, & elles ne le font gueres que quand elles ourdiſſent la toile qui ſert de coque à leurs œufs: quelques-unes forment cette petite coque en demie ſphere, elles la laiſſent collée à des pierres, ou cachée ſous la terre; quelquefois elles la mettent dans des arbres ou dans des herbes. Quelques-autres lui donnent à cette coque la figure d'une boule, que leur tendreſſe ne leur permet pas d'abandonner; elles la portent toûjours colée aux mamellons qui ſont auprès de leur anus, de maniere qu'il ſemble que cette boule ne fait qu'un même corps avec l'Araignée, qui paroît alors ſeulement plus groſſe quelle ne devroit être naturellement. Si après avoir pris une de ces Araignées on lui ôte cette petite boule, on la voit la reprendre avec beaucoup d'empreſſement ſitôt qu'on lui en donne la liberté. Elle ſe ſert de ſes jambes pour la porter d'abord ſous ſon ventre, & c'eſt alors qu'on peut démêler de quelle adreſſe elle ſe ſert pour la ſoûtenir ordinairement; car on aperçoit qu'elle recourbe ſon derriere juſques auprès de cette petite boule, après quoy elle frote cette même boule extrêmement vîte avec les mamellons qui ſont auprès de ſon anus, & cela parceque ces mamellons ſont les reſervoirs dans leſquels eſt contenuë la liqueur viſqueuſe dont les Araignées forment leurs fils; de ſorte que par ce frotement elle couvre une partie de la boule de beaucoup de li-

queur visqueuse, qui la colle ensuite aisément aux mêmes mamellons qui l'ont fournie. On distingue sans peine ces endroits ainsi frotez, tant parcequ'ils sont plus épais, que parcequ'ils sont plus blancs que le reste. La tendresse des Araignées de cette espece ne se borne pas-là, elles portent leur petits sur leur dos après qu'ils sont éclos : elles ont ces jeunes Araignées une adresse merveilleuse à s'arranger sur le corps de leur mere, on ne s'apperçoit point qu'elles y soient lorsqu'on la voit marcher. Le corps de la mere paroît seulement plus raboteux qu'il ne l'est naturellement; mais lorsque l'on la prend, on voit chacun de ces petits Insectes se disperser de son côté.

Le tissu des coques de tout ce genre d'Araignées est très-serré, & communément de couleur blanche ou grise: mais outre qu'on n'en pourroit tirer que très-peu de soye, celle qu'on en tireroit ne sçauroit être employée à des ouvrages.

Je forme le second genre de toutes les Araignées qui tendent des toiles pour attraper les Insectes. Je divise ce genre en quatre especes principales, dont chacune pourroit être subdivisée en diverses autres especes, si on vouloit faire une histoire exacte des Araignées. Je mets dans la premiere espece toutes les Araignées qni font des toiles, dont le tissu est assez serré, & qui les étendent autant parallelement à l'horizon que le poids de leur toile le peut permetre. Les Araignées domestiques qui font leur toile dans les angles des murs, & quelques especes d'Araignées des champs qui font des toiles semblables & posées semblablement à celles des Araignées domestiques, sont comprises sous cette premiere espece.

Elles renferment toutes leurs œufs, peu adherans les uns aux autres, dans une toile, qui par sa force & sa couleur ne differe guere de celles qu'elles tendent aux Mouches. Ainsi il est aisé de voir qu'on ne doit rien esperer de ces coques pour les ouvrages.

La deuxiéme espece contient les Araignées qui habi-

tent des trous dans de vieux murs ; elles tapissent de toile le mur tout autour de ce trou, & dans l'Interieur de ce trou elles font aussi une toile à laquelle elles donnent la figure de tuyau ; c'est par ce tuyau qu'elles entrent & qu'elles sortent de leur trous. Mais ces Araignées n'envelopent pas aussi leurs œufs de filets plus forts, que ceux dont elles ourdissent leur toile.

Je mets dans la troisiéme espece toutes les Araignées dont les filets ne forment point un tissu qui ait l'air de toile, mais qui sont composez de differens fils tirez en tout sens. Cette espece pourroit être subdivisée en un grand nombre d'autres especes, qui font leurs coques de bien des manieres differentes. Quelque unes leur donnent la figure d'une portion de sphere, dont le plat est collé sur une feüille : elles le couvent avec un attachement merveilleux : car quelques farouches qu'elles soient naturellement, si on emporte la feüille où cette coque est collée : l'Araignée se laisse emporter avec elle sans l'abandonner, jusqu'à ce que les petites Araignées qu'elle contient soient écloses. Ces coques sont d'un tissu serré ; & très blanches. Dautres font deux ou trois petites boules de couleur rougeâtre, dans lesquelles leurs œufs sont renfermés : elles les laissent suspenduës à des fils ; mais elles ont la précaution de cacher ces boules, qu'elles laissent dans des endroits fort découverts, d'un petit pacquet de feüilles seches, autrement les passans pourroient les appercevoir aisément. Ce petit pacquet de feüilles est attachée à des fils à quelque distance de la boule. D'autres donnent la figure d'une poire à leur coque, & elle est suspenduë par un fil, comme une poire le seroit par sa queuë.

Toute ces differentes coques sont d'un tissu serré, mais d'une soye trop foible pour être mise en œuvre. Peut-être que celle des petites poires dont je viens de parler pourroit être employée ; mais elles sont si petites, & contiennent par conséquent si peu de soye, qu'elles ne meritent aucune attention de ce coté-là.

Enfin la quatriéme espece comprend les Araignées qui composent leurs filets de differens fils, qui étant tous posez dans un même plan, partent tous d'un même point, comme autant de rayons d'un cercle qui iroit aboutir à sa circonference. Tous ces fils sont croisez par un autre fil, qui tournant en spirale s'attache en differens endroits sur chacun d'eux. Ces sortes de toiles sont ordinairement posées perpendiculairement à l'horizon. M. Homberg a nommé cette espece, l'Araignée des Jardins; aussi y est-elle fort commune, & dans les bois & les buissons. Elle renferme un grand nombre d'especes d'Araignées differentes par leur grosseur, leur figure & leur couleur.

Ces Araignées arrangent leurs œufs les uns sur les autres, de maniere que la masse qu'ils composent a la figure d'une sphere applatie, ou plutôt d'un spheroïde Elliptique. Quelques-unes de ces Araignées collent ces œufs les uns aux autres par une gluë dont ils sont humectez lorsqu'ils sortent de leur corps, mais d'autres ne les collent point; les premiers fils qui envelopent ces œufs sont dévidez dessus d'une maniere un peu plus serrée que les autres, qui sont entortillez tres-lâchement, à peu prés de la même façon que les fils exterieurs qui envelopent les coques des Vers à soye.

Presque toutes ces especes d'Araignées filent une soye propre aux ouvrages; il y en a pourtant quelques-unes dont la soye seroit trop foible pour soûtenir des métiers un peu rudes.

On pourroit avoir des soyes d'Araignées plus differentes par leurs couleurs naturelles, que ne l'est celle des Vers, qui est toûjours aurore ou blanche; au lieu que les coques d'Araignées en donneroient de jaune, blanche, grise, bleuë celeste, & d'un beau brun caffé.

Les Araignées qui donnent la soye de couleur de caffé sont rares, au moins n'en ay-je rencontré que dans quelques champs de Genests, où j'ay aussi trouvé de leurs coques, dont la soye est tres-forte & tres-belle. Elles sont

faites fort differemment de toutes les autres coques d'Araignées dont j'ay parlé : les œufs ſont renfermez dans la ſoye brune, qui eſt devidée aſſez lâchement autour, comme dans toutes les autres coques : mais cette ſoye brune eſt envelopée elle-même d'une autre coque de ſoye griſe, dont le tiſſu eſt trés-ſerré, aſſez épais, & ſemblable à ce qui reſte ſur la coque d'un Vers à ſoye lorſqu'on l'a devidée en partie.

Les Araignées font leurs œufs ou la ſoye qui les envelope dans pluſieurs mois de l'année ; non-ſeulement elles y travaillent dans les mois d'Aouſt & de Septembre, comme M. Bon l'a fort bien remarqué, mais il y en a qui font ces coques dés le mois de May, & d'autres dans les mois ſuivans. Ce ſont celles qui ont paſſé l'hyver qui pondent de ſi bonne-heure, & M. Bon n'a ſans doute voulu parler que de celles qui ſont écloſes au Printemps, qui font leurs œufs beaucoup plus tard que les précedentes.

Nous avons aſſez fait entendre juſques icy que les Araignées filent deux ſortes de fils ; que les uns leur ſervent à ourdir les toiles qu'elles tendent aux Inſectes, & que les autres ſervent ſeulement à enveloper leurs œufs : mais il n'eſt peut-être pas hors de propos d'ajoûter icy, que ces fils ne different entr'eux que par le plus ou le moins de force, & d'expliquer comment les Araignées peuvent faire des fils plus ou moins forts quand il leur plaît. Je ſuppoſe qu'on ſçait que les Araignées ont auprés de leur anus divers mamellons, qui ſont autant de filieres dans leſquelles ſe moule la liqueur qui doit devenir de la ſoye lorſqu'elle ſe ſera ſechée, aprés être ſortie par ces filieres. Les Araignées dont il s'agit icy, c'eſt-à-dire, celles dont la ſoye eſt propre aux ouvrages, ont ſix de ces mamellons, dont quatre ſont tres ſenſibles, mais les deux autres le ſont moins, & on ne les diſtingue pas aiſément ſans le ſecours de la Loupe. Ces deux petits mamellons ſont poſez chacun proche de la baſe des deux gros, qui ſont les plus prés de l'anus. Chacun de ces ſix mamellons

ſenſibles

ſenſibles ſont compoſez eux-mêmes de petits mamellons, ou plûtôt de petites filieres inſenſibles ; c'eſt dequoi on eſt aiſément perſuadé, ſi pendant qu'on preſſe avec deux des doigts d'une même main le ventre d'une Araignée, pour obliger la liqueur de couler dans ces mamellons, on applique un autre doigt ſur un d'eux, & qu'on le retire enſuite doucement ; car on tire pluſieurs fils diſtinctement ſéparez les uns des autres dès leur ſortie, qui par conſéquent ont paſſé par differens trous. Ces fils ſont trop fins pour qu'on puiſſe les compter tous d'une maniere ſûre ; mais ce que je ſçai de certain, c'eſt que j'en ai vû ſouvent ſortir plus de ſept à huit d'un même mamellon. On tire plus ou moins de ces fils d'un mamellon, ſelon qu'on applique le doigt plus fortement, ou ſur une plus grande partie de ſon bout ; d'où il eſt aiſé de comprendre comment les Araignées font des fils plus ou moins gros quand il leur plaît. Car non-ſeulement lorſqu'avant de commencer à filer, elles appliquent contre quelque corps plus ou moins de ces ſix mamellons ſenſibles de leur anus ; mais ſelon qu'elles appliquent plus fortement, ou une plus grande partie de chaque de ces mamellons, elles font des fils compoſez d'un plus grand nombre d'autres fils, & par conſéquent plus forts & plus gros.

Il doit y avoir environ dix-huit fois plus de fils, tels qu'ils ſortent des filieres, qui compoſent un des fils des coques, il n'y en a dans ceux des toiles, ſi la quantité des fils qui compoſent les uns & les autres, eſt proportionnée à leur force : car ayant collé un poids de deux grains à un fil de toile, il l'a ordinairement ſoûtenu ſans rompre, & s'eſt rompu lorſque je lui en ai attaché un de trois grains ; au lieu que les fils des coques ſoûtiennent environ trente-ſix grains, & ils ne ſe caſſent que lorſqu'on les charge d'un plus grand poids.

Mais ſi les fils des coques d'Araignées ſont plus forts que les fils des toiles, ils ſont auſſi plus foibles que ceux des coques de Vers, quoique dans une moindre propor-

tion. La force des fils que je dévidois de dessus ces dernieres coques, a été ordinairement jusqu'à soûtenir un poids de deux gros & demi. Ainsi la force d'un fil de coque d'Araignée, est à celle d'un fil de coque de Ver environ comme 1 est à 5. Et c'est peut-être encore là un des endroits par lequel l'ancienne soye pourroit paroître avoir quelque avantage sur la nouvelle.

A la verité chaque fil de coque d'Araignée est à peu près moins gros qu'un fil de soye dans la même proportion qu'il est plus foible que lui. Mais cela ne compense pas entierement ce desavantage, car il est plus difficile de joindre ensemble plusieurs brins; & sans compter que c'est une peine de plus, il est toûjours à craindre que les fils ne tirent pas tous également, & par conséquent que leur assemblage n'ait pas la somme des forces que chaque fil auroit séparément. Cette multiplicité de brins qui composent chaque fil de soye d'Araignée, pour le faire aussi gros qu'un fil de soye de Ver, contribuë peut-être en partie à rendre les ouvrages faits de cette soye moins lustrez, que ceux qui sont de soye de Ver; car leur lustre est effectivement moins beau, comme M. de la Hire le remarqua lorsque les Mitaines furent apportées à l'Académie. Ce qu'on appelle lustre dans une étoffe, n'ayant d'autre cause que de ce qu'elle reflechit plus de lumiere colorée d'une certaine façon, qu'une autre étoffe qui paroît de même couleur; plus un brin de soye aura de petits vuides qu'un autre brin de soye, moins il paroîtra lustré, car il reflechira moins de lumiere. Or ces petits vuides seront évidemment en plus grand nombre dans un fil composé lui-même de plusieurs fils differens & réellement séparez, que dans celui qui étant de même grosseur, n'est point composé de differens brins: les parties de la liqueur visqueuse qui le compose s'étant sans doute appliquées plus aisément les unes proche des autres, doivent se toucher en plus d'endroits, que ne peuvent divers fils réellement séparez. Ainsi en supposant que chaque fil de soye d'Araignées n'est pas plus lustré

naturellement qu'un fil de ſoye de Ver, il eſt clair que lorſqu'on aura joint cinq de ces fils pour en compoſer un autre de même groſſeur, que l'eſt le fil de Ver naturellement ; que ce fil compoſé & l'ouvrage qu'on en formera paroîtront moins luſtrez, que le fil de ſoye de Ver & l'ouvrage qui en ſera formé.

Ceci ſeroit vrai en ſuppoſant, comme je viens de le dire, que chaque fil ſimple d'Araignée eſt naturellement auſſi luſtré qu'un fil ſimple de ſoye. Mais cette ſuppoſition même ſeroit trop favorable à la ſoye d'Araignée. Car on peut remarquer que les fils les plus crêpez ont moins de luſtre, que ceux qui le ſont moins. Ainſi voyons nous que la laine, dont chaque brin eſt naturellement plus crêpé qu'un brin de ſoye, eſt auſſi moins luſtrée. Si chaque brin de ſoye d'Araignée eſt naturellement plus crêpé qu'un brin de ſoye de Ver, il doit donc auſſi avoir moins de luſtre ; or ce fil eſt réellement plus crêpé. Il n'eſt guere plus difficile de trouver la raiſon pour laquelle ces fils ſont plus crêpez que les autres ; la maniere dont ſont dévidez les uns & les autres en eſt apparemment la cauſe. Car on conçoit d'abord qu'en devidant des fils d'une maniere lâche, on laiſſe la liberté aux reſſorts de toutes les petites parties qui les compoſent, d'agir de toutes leurs forces pour les plier, ou les friſer en pluſieurs ſens differens : au lieu qu'en devidant ces fils d'une maniere plus ſerrée, comme font les Vers, on empêche l'action du reſſort de ces petites parties. Le reſſort lui même s'uſe dans cette ſituation violente, ou s'affoiblit du moins. On demeurera plus volontiers d'accord de ceci, lorſque l'on fera attention que les premiers fils des coques des Vers à ſoye, qui ſont eux-mêmes entortillez autour de la coque d'une maniere lâche, ſont bien moins beaux & moins luſtrez, que ceux qui forment le corps de la coque, leſquels ſont dévidez d'une maniere très-ſerrée.

Cette maniere lâche dont les fils d'Araignées ſont entortillez, contribuë encore d'une autre façon à diminuer

le lustre de la soye qu'ils fournissent ; c'est qu'elle empêche qu'on ne puisse les devider comme on devide les fils qu'on tire des coques des Vers à soye, de sorte qu'on est obligé de carder ces coques avant de les filer. Ainsi on apperçoit aisément que les gros fils de soye que l'Ouvrier a filés, doivent être composez d'une infinité de brins très-courts, & par conséquent qu'il n'est pas possible que ce fil paroisse aussi beau ou aussi lustré, que celui qui étant de même grosseur seroit composé de differens brins qui auroient chacun une longueur égale à la sienne, & cela parceque tous les bouts de ces brins courts produisent necessairement de petites inégalitez dans l'étenduë de ce fil qui lui ôtent son lustre. Ce qui est si clair, qu'il est peu necessaire d'y ajoûter une preuve, en faisant observer que la soye qu'on tire des coques des Vers après les avoir cardées, est beaucoup moins belle que celle qu'on tire en la devidant de dessus ces coques.

Quand on supposeroit qu'il n'y a eu que deux des mamellons qui ayent fourni des fils pour en faire un de toile d'Araignée, & que chacun de ces mamellons qui fournissent eux-mêmes souvent un fil composé de plusieurs autres en auroient fourni un simple, les fils de toile étant dix-huit fois plus foibles qu'un fil de coque, ce dernier fil que nous avons dit être environ cinq fois plus petit qu'un de soye de Ver, devroit être composé de trente-six brins pour le moins. Peut-être que cette reflexion pourra servir à soûtenir l'imagination, lorsqu'elle tâche à comprendre la prodigieuse divisibilité de la matiere. Car qu'elle doit être la petitesse d'un fil que les yeux pourtant apperçoivent, & qui n'est pas plus gros que la cent quatre-vingtiéme partie d'un fil de soye simple, lequel fil de soye simple n'est lui-même que la deux-centiéme partie d'un fil de soye des plus fins de ceux dont on se sert pour coudre ? Car j'ai souvent divisé ces brins de soye en deux cens fils, ou à peu près ; de sorte qu'un brin de soye d'Araignée de la grosseur d'un brin de soye dont on se sert pour coudre, seroit réellement composé

d'environ trente-ſix mille fils, & on pourroit les diviſer actuellement en mille.

Le brin de ſoye d'Araignée compoſé de ces trente-ſix mille fils de ſoye ſimple, ſeroit peut-être un peu plus gros qu'un fil de ſoye de Ver compoſé de deux cens fils ſimples de Ver, quoique la ſomme de la groſſeur des 36000 fils & des 200 ſoit la même, parcequ'il ſeroit difficile d'arranger enſemble un ſi grand nombre de brins, ſans qu'il reſtât pluſieurs intervalles vuides entr'eux, qui paroîtroient augmenter le volume. C'eſt pour cela que la ſoye des Araignées a paru rendre davantage à l'ouvrage que celle des Vers. Mais ſi on avoit fait attention qu'en récompenſe elle doit être alors plus foible, loin de regarder cela comme un avantage de cette ſoye, on auroit été diſpoſé à croire que c'étoit un de ſes défauts, puiſqu'un plus gros volume de cette ſoye ne peut avoir que la même force d'un moindre volume de ſoye de Ver.

Mais enfin venons au dernier point eſſentiel, c'eſt-à-dire, voyons quel rapport a la quantité de ſoye que chaque Araignée donne par an, avec celle qu'on tire des Vers à ſoye. J'ai peſé avec grand ſoin diverſes coques de Ver, & j'ai trouvé que les plus fortes, c'eſt-à-dire, l'ouvrage d'une année de Ver, peſoient quatre grains, & que les plus foibles en peſoient plus de trois; de ſorte qu'en prenant la livre de ſeize onces, il faut du moins 2304 Vers pour avoir une livre de ſoye. Lorſqu'on porte des habits de ſoye, on ne s'aviſe gueres de penſer que pluſieurs mille Vers ont travaillé toute leur vie pour en fournir à la matiere.

J'ai peſé avec le même ſoin un grand nombre de coques d'Araignées, & j'ai toûjours trouvé qu'il en falloit environ quatre des plus groſſes pour égaler le poids d'une coque de Ver, & qu'elles peſoient chacune d'environ un grain; de ſorte qu'il faudroit quatre des plus groſſes Araignées pour donner autant de ſoye qu'un Ver, s'il n'y avoit pas plus de déchet ſur la ſoye des unes que ſur celle

des autres, & si elles donnoient toutes de la soye; mais les coques des Araignées sont sujettes à un grand déchet dont les coques de Vers sont exemptes. Ce qui cause ce déchet dans les coques d'Araignées, est qu'on les pese remplies de toutes les coques des œufs qui envelopoient les petites Araignées avant qu'elles fussent écloses, & de diverses ordures qui se trouvent mêlées parmi la soye. Si on calcule donc le déchet de ces coques, il nous faudra rabattre plus de deux tiers de leur poids, puisque de treize onces de soye d'Araignée sale, M. Bon n'en a retiré que quatre onces de soye nette; au lieu que les coques des Vers n'ont point de déchet, où il est si petit, qu'on peut le compenser en prenant seulement celui de la soye d'Araignées aux deux tiers.

Or nous venons de voir que le poids d'une coque d'Araignée avant d'être nettoyée, est au poids d'une coque de Ver à soye, comme 1 est à 4; ainsi étant nettoyée, son poids sera au poids de celle-ci, comme 1 est à 12. Il faudra donc déja douze des plus grosses Araignées pour donner autant de soye qu'un Ver. Mais chaque Ver fait une coque, parcequ'ils font les leurs pour se métamorphoser, au lieu que les Araignées ne faisant les leurs que pour enveloper leurs œufs, si on regarde avec tous les Naturalistes qui ont précedé M. Bon, leurs especes comme formées de mâles & de femelles, je veux dire si on ne les prend pas pour hermaphrodites, il n'y a que les Araignées femelles qui fassent des coques. D'où il suit que on suppose que l'on a autant d'Araignées femelles que si de mâles, ce qui doit arriver à peu près, vingt-quatre des plus grosses Araignées ne donneront pas plus de soye qu'un seul Ver.

Il faudroit donc environ 55296 Araignées des plus grosses pour avoir une livre de soye, lesquelles Araignées il auroit été necessaire de nourrir séparément pendant plusieurs mois. D'où on voit combien il est à craindre que la soye qu'on en retireroit n'engageât en des dépenses peu proportionnées à sa valeur, puisqu'elle coû-

teroit vingt-quatre fois autant que celle des Vers; si l'on supposoit même qu'on n'est pas obligé de mettre les Araignées séparément, & que chaque Araignée n'occuperoit pas plus de place qu'un Ver, ce qui seroit aussi une supposition fausse; car il faut leur en donner assez à chacune, afin qu'elles puissent faire leur toile. Mais si on vouloit entrer dans le détail du calcul des fraìs qu'elles coûteroient, étant obligé de les nourrir séparément, & de leur donner des espaces assez grands pour les loger chacune commodément; on verroit d'une maniere très-claire que la soye des Araignées coûteroit incomparablement plus que celle des Vers.

Qu'on ne croïe pas au reste que tout ce que j'ai dit ne regarde que les Araignées d'une grosseur commune. Car si on vouloit sçavoir ce que donnent de soye celles que l'on trouve communément dans les Jardins de ce païs, & qui paroissent très-grosses; on verroit qu'il en faut douze de celles-ci pour avoir autant de soye qu'on en retire d'une des coques de celles dont j'ai parlé, & que 180 ne donneront que le même poids de soye que fournit une seule coque de Ver; par conséquent qu'à peine 663552 Araignées pourroient faire une livre de soye.

On aura sans doute regret de ce qu'il nous reste si peu d'espérance de profiter d'une découverte si ingenieuse. Après tout, il y a encore apparence de quelque espece de ressource; peut-être trouvera-t-on des Araignées qui donneront plus de soye que celles que nous voyons communément dans le Royaume. Il est déja certain par le rapport de tous les Voyageurs, que celles de l'Amerique sont beaucoup plus grosses que les nôtres; d'où il semble aussi qu'elles doivent faire de plus grosses coques. Les Vers, qui, quoiqu'originaires de païs éloignez, ont si fort peuplé en Europe, nous aideroient même à esperer que les Araignées de l'Amerique pourroient vivre dans ceux-ci. Quoiqu'il en soit, il faut experimenter; c'est la seule voye de découvrir des choses

curieuſes & utiles. Auſſi ne negligerai-je rien de ce qui peut avoir rapport à la recherche dont il s'agit ici, dans laquelle ſi on découvre jamais quelque choſe d'utile, la premiere gloire en ſera dûë à M. Bon.

REMARQUES
FAITES SUR LA MOULE
DES ESTANGS.
PAR M. MERY.

1710. 12. Novem.

LA grandeur de Dieu éclate dans tous ſes Ouvrages. Les Anatomiſtes qui s'appliquent à l'étude de la nature, découvrent tous les jours dans les plus vils animaux des parties dont la ſtructure ne leur donne pas moins d'admiration, que celle qui fait dans l'homme le ſujet de leur étonnement.

Leur conformation, quoique differente, leur montre également la puiſſance & la ſageſſe du Createur. Les obſervations que j'ai faites ſur la Moule des Eſtangs, nous fourniſſent des preuves évidentes de cette verité. Je vais les rapporter à la Compagnie. Heureux ſi je puis ſatisfaire ſa curioſité par mes remarques, & trop content de mon travail ſi mes reflexions lui ſont agreables.

La Moule eſt un poiſſon hermaphrodite, c'eſt à-dire, mâle & femelle tout enſemble, mais d'une eſpece ſinguliere, en ce qu'elle multiplie ſans aucun accouplement. Paradoxe inoüi, que j'eſpere démontrer dans la ſuite de ce diſcours, que je dois commencer par la formation & la nutrition de ſes coquilles; parceque de toutes les parties de ce poiſſon qui tombent ſous les yeux, ce ſont les premieres qui ſe preſentent.

Chaque coquille reſſemble aſſez bien à un petit baſſin de

de figure ovale, mais plus large & plus arrondi en devant que par le derriere, qui se termine en une pointe mousse. Il est revêtu en dedans d'une membrane qui luy est si adherente & si mince, qu'on ne peut l'appercevoir qu'en rompant les coquilles, ou lorsque venant à se dessecher, elle se déchire & abandonne d'elle même la surface interne du bassin.

Les deux coquilles de la Moule paroissent formées de plusieurs couches appliquées les unes sur les autres, & qui en débordant l'une au-delà de l'autre, font sur leur surface exterieure des bandes assez distinctes; ce qui d'abord pourroit donner lieu de croire que ces couches ne sont pas produites en même tems, je veux dire toutes ensemble, mais successivement & l'une aprés l'autre.

Cependant si l'on fait attention qu'il ne paroît pas moins de bandes sur les plus petites coquilles que sur les plus grandes, on aura sujet de douter de cette opinion; d'autant plus que s'il étoit vray que les differentes couches des coquilles de la Moule se formassent l'une aprés l'autre, il faudroit necessairement que huit muscles qui sont attachez à leur surface interne, s'en détachassent en s'éloignant toûjours par degrés du lieu de leur premiere attache, toutes les fois qu'il se formeroit une nouvelle couche. Phenomene qui ne m'a point paru dans aucunes des Moules que j'ay jusques-icy dissequées en toutes saisons.

Or comme d'ailleurs un tel déplacement n'a point d'exemple dans les animaux de qui les muscles sont attachez aux os, ni même dans ceux qui n'en ont point, comme les Cancres marins, les Homars, les Crabes, les Ecrevisses, &c. dont le corps n'est revêtu que de croutes ou coques qui leur tiennent lieu d'os, où tous leurs muscles ont leur origine & leur insertion. N'y a-t-il pas beaucoup plus d'apparence que toutes les couches des coquilles de la Moule ne se forment en même temps, comme les coques de ces poissons, que l'une aprés l'aurre? Aussi voit-on que les bandes qui paroissent sur leur surface exterieure, s'élargissent à mesure que le corps de la Moule

augmente ; ce qui ne pourroit se faire, si les couches de ses coquilles se formoient successivement.

Cela étant ainsi, il est évident que les coquilles de ce poisson doivent se nourrir de la même maniere que font les autres parties de son corps, je veux dire que l'aliment qui sert à leur accroissement penetre leur substance; car s'il ne faisoit que s'appliquer à leur surface interieure, il est certain que les bandes qui paroissent en dehors ne pourroient s'aggrandir. Elles s'augmentent en tout sens sans se fendre; donc elles se nourrissent *per intus susceptionem alimenti, non vero per juxta appositionem materiæ.*

De leur Mouvement.

Les coquilles de la Moule s'entr'ouvrent par le moyen d'un puissant ressort. Elles se ferment par la contraction de deux forts muscles. Leur ressort est situé sur le dos de ce poisson. Il a environ un pouce & demi de long sur deux lignes de large dans une Moule de huit à neuf pouces de grandeur. Ce ressort est convexe par dehors, & concave en dedans. Ses bords sont enchassez dans l'épaisseur des coquilles creusées en goutieres pour les recevoir. Il est formé de deux sortes de matiere, l'une est écailleuse & de couleur grise. Celle cy envelope l'autre, qui est blanche & semblable à du talc. On découvre dans celle-là plusieurs plans inclinez les uns sur les autres, mais on ne peut les voir qu'en rompant le ressort des coquilles.

Leurs muscles sont transversalement attachez à la paroy interne de chaque coquille, l'un en devant & l'autre sur le derriere. Celuy-cy est plus gros que l'autre. Ces muscles sont faits de l'assemblage de plusieurs paquets de fibres charnuës, croisez par d'autres petites fibres ligamenteuses & élastiques. Ce sont-là les moyens par lesquels les coquilles s'ouvrent & se ferment. Il s'agit maintenant d'expliquer leur mouvement, ce qu'on ne peut bien faire sans résoudre auparavant une question qui fait aujourd'huy beaucoup de bruit en Physique & en Medecine.

On demande ſi le raccourciſſement ou la contraction des muſcles dépend d'une vertu élaſtique, ou de l'influence des eſprits animaux. Les obſervations que j'ay faites ſur la Moule même, ſerviront à découvrir certainement par lequel de ces deux principes les muſcles ſe raccourciſſent.

Après la mort la vertu élaſtique ſubſiſte dans les parties, juſqu'à ce que la pourriture ſe ſoit emparée de leur ſubſtance, & l'on ſçait que l'effet propre de leur reſſort eſt de les rétablir dans leur état naturel, quand il n'eſt plus forcé. Or les eſprits animaux étant éteints dans la Moule, les muſcles de ſes coquilles rentrent dans leur état naturel par leur vertu élaſtique, qui les relâche & les allonge. Donc leur raccourciſſement doit dépendre de l'influence des eſprits animaux. Auſſi voit-on qu'ils ne ſe contractent que pendant la vie. Cela prouvé, il eſt très-aiſé d'expliquer l'approche & l'eloignement des coquilles.

Quand les eſprits animaux coulent dans leurs muſcles, il les gonflent & les raccourciſſent, & alors les coquilles ſe ferment; mais ſi-tôt que ces eſprits ne s'y portent plus, les petites fibres ligamenteuſes élaſtiques qui traverſent les fibres charnuës de ces muſcles les reſſerrent & les allongent, en même tems le reſſort des coquilles venant à ſe débandet, parce qu'il n'eſt plus forcé par les eſprits animaux, les coquilles s'entr'ouvrent. Mais il reſte encore à ſçavoir, ſi quand elles ſont ouvertes leur reſſort eſt entierement débandé, & ſi lorſqu'elles ſont fermées, leurs muſcles ſont tout à fait raccourcis. Voici les moyens de réſoudre ces deux Propoſitions.

Qu'on détache ces muſcles d'une ſeule coquille d'une Moule recemment morte, on verra qu'elles s'ouvrent une fois plus qu'elles ne faiſoient pendant ſa vie. Donc leur reſſort n'eſt pas entierement debandé quand leurs muſcles ſont attachez à l'une & à l'autre, & qu'elles ne ſont qu'entr'ouvertes. Et ſi ſans ſéparer leurs muſcles on caſſe une des coquilles d'une Moule vivante; ſes parties

rompuës s'approchent de plus près de celle qui reste entiere : & leurs muscles se raccourcissent une fois plus qu'auparavant, d'où il suit que la résistance des coquilles entieres appliquées l'une contre l'autre, empêche que leurs muscles ne se contractent entierement. Donc la résistance des coquilles ainsi appliquées, l'emporte sur la force des esprits animaux, & il est évident que leurs muscles ne sont pas tout à fait raccourcis lorsque les coquilles sont fermées ; de sorte que quand elles sont entr'ouvertes ; leurs muscles quoiqu'alors relâchez font cependant équilibre avec leur ressort : ainsi l'equilibre qu'ils gardent entr'eux quand les coquilles s'ouvrent, ne se rompt lorsqu'elles se ferment que par l'influence des esprits animaux qui coulent alors dans leurs muscles. D'où je conclus que la force de ces esprits l'emporte sur la puissance des fibres élastiques des muscles, & du ressort des coquilles joints ensemble ; car autrement elles ne pourroient jamais se fermer.

De la progression de la Moule.

Ce poisson nage dans l'eau, & paroît quelquefois sur sa surface, mais très-rarement. Plus souvent il rampe dans la vase sur laquelle il reste presque toûjours en repos : mais soit qu'il nage, soit qu'il rampe, on ne voit que son ventre sortir hors de ses coquilles, & s'avancer de deux pouces ou environ au-delà de leurs bords. Tâchons de découvrir les machines dont la Moule se sert dans sa marche, qui ne peut dépendre que des muscles de son ventre, puisqu'il n'y a que cette seule partie de son corps qui agisse dans cette circonstance.

Le ventre de ce poisson représente assez bien la figure de la carenne d'un Vaisseau. Sa partie la plus large est tournée du côté de la tête, la plus étroite du côté de l'anus, la plus aiguë regarde le tranchant des coquilles, & est fort propre à fendre l'eau & la vase ; enfin sa partie la plus épaisse & qui est arrondie, occupe toute la partie superieure du ventre, ce qui ne fait pas neanmoins que

le dos de la Moule ſoit tourné en deſſous quand elle nage, parce que ſes poûmons qui ſont remplis d'air, ſont placez au-deſſus de ſon ventre ; ce qui rend la partie la plus groſſe de ſon corps la plus legere ſur-tout quand l'air qui les remplit vient à ſe dilater, lorſque les fibres des poûmons qui le comprimoient par leur contraction ſe relâchent, & lui permettent de s'étendre par ſon élaſticité.

Je remarque au ventre de la Moule cinq muſcles, quatre que je nomme obliques, & le cinquiéme tranſverſe à cauſe de la diſpoſition de leurs fibres. Le premier & le ſecond tirent leur origine de la partie anterieure ſuperieure des coquilles, le troiſiéme & le quatriéme de leur partie poſterieure ſuperieure. Les fibres de ces quatre muſcles en deſcendant s'écartent les unes des autres, & forment en ſe dévelopant les paroys du ventre. Celles de devant vont s'inſerer au derriere, & celles de derriere en devant. Elles ſe croiſent les unes les autres en faiſant leur chemin.

Ce que je prends pour le cinquiéme muſcle conſiſte dans un très-grand nombre de fibres charnuës toutes ſéparées les unes des autres. Leur longeur varie ſuivant la differente épaiſſeur du ventre. Toutes ces fibres ſont attachées tranſverſalement à la ſurface interne de ſes paroys par leurs extremitez ; de ſorte qu'elles paſſent entre les circonvolutions de l'inteſtin & à travers le foye, qui n'a point d'autre membrane pour le couvrir que l'expenſion des quatre muſcles obliques.

La figure du ventre étant donnée, & la diſpoſition de ſes muſcles reconnuë, il n'eſt pas difficile d'expliquer le mouvement de progreſſion de la Moule. Quand ſes coquilles s'entr'ouvrent, les quatre muſcles obliques ſe relâchent, & les fibres du muſcle tranſverſe ſe contractent. Celles-cy ne peuvent ſe raccourcir ſans approcher les paroys du ventre l'une contre l'autre, ce qui fait qu'il devient plus plat qu'auparavant ; ainſi acquerant plus d'étenduë, & tombant en bas par ſa propre peſanteur (les

mufcles obliques étant relâchés) il fort aifément hors des coquilles ; après quoy les fibres de ces mêmes mufcles entrant en contraction les unes après les autres, mais foiblement, la Moule fait fon chemin. Si les mufcles obliques antérieurs fe raccourciffent de part & d'autre alternativement, elle s'avance en avant. Quand ceux-cy fe relâchent, & que les mufcles pofterieurs fe contractent de même, elle recule en arriere, ce qui luy fuffit pour ramper fur la vafe ; mais pour nager, il faut outre cela que l'air renfermé dans fes poûmons fe dilate, & rende par ce moien fon corps plus leger qu'un pareil volume d'eau. Au contraire il doit fe condenfer, afin que le corps de ce poiffon devenant plus pefant que l'eau, retombe au fond. Quand enfin les fibres du mufcle tranfverfe fe relâchent, & qu'en même tems celles des quatre mufcles obliques fe contractent toutes enfemble fortement, elles retirent le ventre dans les coquilles fort promptement.

De quelle maniere la Moule reçoit fa nourriture.

La bouche de ce poiffon eft fi étroitement attachée à la partie pofterieure du mufcle du devant des coquilles, qu'il eft abfolument impoffible qu'elle puiffe en fortir pour chercher l'aliment qui luy convient ; ainfi il faut qu'il y ait dans l'eau des parties nourriffieres, afin que quand les coquilles s'ouvrent, fa bouche puiffe les recevoir, puifqu'elle ne peut fe déplacer ; Mais parce que les coquilles reftent prefque toûjours fermées, il n'y a pas d'apparence que la Moule pût vivre commodément en cet état, fi la nature ne lui avoit donné quelques lieux particuliers pour tenir en referve l'eau qu'elle reçoit quand fes coquilles s'ouvrent, & pour empêcher qu'elle ne s'écoule lorfqu'elles fe ferment. C'eft à quoy elle a fagement pourvû en plaçant de chaque côté du ventre de ce poiffon un grand réfervoir, & proche le bord de chaque coquille un canal pour le féjour de l'eau. Ces quatre cavitez communiquent enfemble entre le dos du corps de la Moule & celuy de fes coquilles.

Le refervoir eft formé du milieu de la furface interne de la coquille & d'une membrane fpongieufe, qui d'une part eft unie au corps de ce poiffon, & de l'autre à un mufcle circulaire. Le canal eft compofé du contour de la coquille & de ce même mufcle, & voici comment. La partie charnuë de ce mufcle, qui n'a environ que cinq à fix lignes de large, eft adherente par l'un de fes côtez à la coquille, à fept ou huit lignes de diftance de fon bord. Le refte qui en eft détaché finit en une membrane tres-déliée, qui s'unit à une efpece de peau fort mince jointe au tranchant de la coquille, de forte qu'il refte entr'elle & ce mufcle un vuide qui fait le canal.

Ce mufcle circulaire fe joint avec fon congenere au-deffus de la tête de la Moule par devant, & par derriere au deffus du rectum. Entre leurs extremitez il y a un petit ligament, qui leur eft attaché & à la membrane du pericarde en deffus. Enfin on découvre au-deffus du rectum un conduit qui communique d'un bout dans l'anus, & de l'autre avec ces quatres refervoirs. C'eft par ce conduit que l'eau paffe dans leurs concavitez, de la maniere que je vais l'expliquer en peu de paroles.

Quand les coquilles s'entrouvrent, les deux mufcles circulaires qui leur font attachez font forcez de s'éloigner l'un de l'autre; & parceque l'anus leur eft uni, c'eft auffi une neceffité que fon entrée fe dilate en même tems. Alors l'eau entre dans l'anus, d'où elle paffe dans le canal qui la décharge dans les réfervoirs par une fente placée entre les deux mufcles circulaires tout proche de leur union pofterieure.

Quand aprés cela les coquilles fe ferment, alors l'eau preffée dans les canaux par le gonflement des mufcles circulaires, & par ceux du ventre dans les refervoirs, fort par le même conduit par lequel elle eft entrée, & fe répand peu à peu entre les parties de la generation & le ventre, fans pouvoir delà s'écouler au dehors, tant parceque les coquilles s'appliquent l'une contre l'autre exactement, que parceque l'eau qui remplit les canaux

ſouleve les deux muſcles circulaires dont ils ſont formez, ce qui fait que ces muſcles ſe preſſent ſi fort l'un contre l'autre que l'eau ne peut s'échaper, quand bien même l'application des coquilles ne ſeroit pas parfaite.

La maniere dont les muſcles circulaires ſe contractent pour chaſſer l'eau hors des canaux eſt fort particuliere; car étant attachez aux coquilles par leur partie charnuë, il eſt évident qu'ils ne peuvent pas ſe raccourcir quand ils ſe gonflent, il faut donc que leur largeur diminuë quand ils ſe reſſerrent; ce qui arrive de cette façon.

Toute leur ſurface qui regarde les coquilles eſt traverſée par une infinité de fibres fort courtes qui s'inſerent à leur aponevroſe. Or celle-cy étant unie à la peau qui borde le tranchant des coquilles, il eſt viſible que ces petites fibres ne peuvent ſe raccourcir ſans diminuer la largeur de ces muſcles, & par conſéquent la capacité des canaux qu'elles applatiſſent; ainſi l'eau qu'ils contiennent eſt obligée d'en ſortir plus ou moins promptement, par rapport à la viteſſe avec laquelle ces petites fibres ſe raccourciſſent.

C'eſt ce que confirme l'experience; car quand on pique ces muſcles, les eſprits animaux y coulant alors plus abondamment qu'à l'ordinaire, leurs fibres tranſverſes ſe contractent ſi violemment, qu'elles rompent l'attache qu'a leur aponevroſe avec la peau qui borde le tranchant des coquilles, ce qui fait que l'eau renfermée dans les canaux circulaires s'échape au dehors par cette ouverture extraordinaire.

Après avoir trouvé par quel moyen l'eau que contiennent ces quatres réſervoirs s'écoule entre les parties de la generation & le ventre, il nous reſte à chercher la voye par laquelle elle paſſe dans le corps de la Moule. Pour la découvrir il nous faut examiner une glande conſiderable, que je prends pour la tête de ce poiſſon, quoique je n'y aye remarqué ni langue, ni nez, ni yeux, ni oreilles. Quatre raiſon m'engagent à lui donner le nom de tête. La premiere, parcequ'elle eſt la partie la plus élevée de ſon

ſon corps. La ſeconde, parce qu'étant compoſée de deux ſubſtances differentes en couleur, & formant dans ſon centre pluſieurs ſinuoſitez, il y a bien de l'apparence qu'elle lui tient lieu de cerveau. La troiſiéme, parceque l'entrée de l'inteſtin ſe rencontre dans le creux de cette glande. La quatriéme, parcequ'elle a une bouche garnie de deux levres charnuës.

Ces deux levres ſont fort étroites à l'entrée de la bouche, qui eſt placée entre le ventre & le muſcle anterieur des coquilles ; mais en s'éloignant de cet endroit, elles s'élargiſſent. Elles ſont plates & longues d'un pouce ou environ, arrondies par leurs extremitez, & traverſées dans toute leur longueur par des petites fibres ſaillantes ſur leur ſuperficie interieure. Ces fibres laiſſent entr'elles de petits ſinus, de ſorte qu'elles repreſentent aſſez bien les ſillons d'une terre labourée.

Ces deux levres forment entr'elles de chaque côté de la bouche une eſpece de goutiere qui peut ſe changer en canal, parceque les petites fibres qui les traverſent, peuvent en ſe raccourciſſant appliquer leurs bords l'un contre l'autre. Enfin je trouve dans le fond de cette glande l'embouchure d'un autre canal, dont une branche va ſe terminer dans le cœur, & les autres dans les parties du corps de la Moule.

Ces faits étant ainſi décrits, il eſt aiſé de comprendre que l'eau répanduë entre les parties de la generation & le ventre de ce poiſſon, doit s'écouler par les deux goutieres des levres, qui s'écartent l'un de l'autre pour la recevoir, & ſe rapprochent pour la pouſſer dans la bouche de la Moule, où apparemment les parties nourriſſieres ſe ſéparent de l'eau & paſſent dans l'inteſtin, pendant que l'eau entre dans l'autre canal ; ce qui ſemble d'autant plus probable, qu'on ne trouve que de l'eau dans le cœur, & dans le commencement de l'inteſtin qu'une matiere ſolide & auſſi tranſparente que du criſtal, & ſur la fin une autre ſubſtance ſemblable par ſa conſiſtance & ſa couleur au mœconium du fœtus renfermé dans le ſein

de ſa mere ; d'où l'on peut conjecturer que la premiere matiere peut être celle de ſa nourriture , & la ſeconde l'excrement le plus groſſier qui en réſulte. Mais quelque vraye ſemblable que paroiſſe ce raiſonnement, on verra dans la ſuite de ce diſcours qu'on peut former contre cette hypotheſe une difficulté inſurmontable.

Parcourons maintenant la route de l'inteſtin, que vous trouverez ſans doute , Meſſieurs, auſſi ſurprenante qu'elle m'a paru extraordinaire. L'inteſtin commence dans le fond de la bouche de la Moule, paſſe par le cerveau, fait toutes ſes circonvolutions dans le foye. A la ſortie de ce viſcere il décrit une ligne droite , entre dans le cœur qu'il traverſe, & vient finir dans l'anus , dont le bord eſt garni de petites pointes pyramidales, & le dedans de petits mamelons glanduleux. On y voit auſſi de côté & d'autre une glande ſemblable aux amigdales , d'où ſort une matiere fort viſqueuſe.

Ce que je prends pour le foye n'eſt autre choſe qu'un amas de petits globules formez de l'aſſemblage de pluſieurs grains glanduleux , qui rempliſſent de telle ſorte toute la capacité du ventre , qu'ils ne laiſſent aucun vuide entre ſes paroys, ni entre les circonvolutions de l'inteſtin auquel ils ſont intimement unis. Cette glande eſt abreuvée d'une liqueur jaune , qui s'écoule par pluſieurs ouvertures dans l'inteſtin. Comme je craindrois d'ennuyer la Compagnie par une deſcription plus détaillée de ces parties, je paſſe à celles de la generation.

Je ne remarque dans la Moule que quatre parties qui puiſſent ſervir à la generation de ce petit animal. Deux que j'appelle ovaires, parcequ'elles contiennent les œufs de ce poiſſon. Deux que je nomme veſicules ſeminales, parcequ'elles renferment la ſemence qui eſt blanche & laiteuſe. La conformation des unes & des autres paroît ſemblable tant en dedans qu'en dehors. Il faut cependant qu'il y ait quelque choſe de particulier dans les ovaires qui ne ſoit pas dans les veſicules ſeminales, puiſque leurs uſages ſont differens : mais quelque choſe que ce

ſoit, la vûë ne peut point en découvrir la difference.

Ces quatre parties repreſentent aſſez bien par leur figure exterieure un croiſſant fort ouvert, convexe par en bas, concave par en haut, & applati par les côtez. Elles ont chacune un pouce de large ou environ dans leur milieu, qui va toûjours en diminuant juſqu'à leurs extremitez, qui ſont attachées par devant à la tête, & par derriere elles ſont ſuſpenduës à l'anus. Ce qu'il y a entre l'un & l'autre bout eſt joint à la partie ſuperieure du ventre : le reſte de leur corps eſt libre, & placé entre les réſervoirs d'eau & le ventre.

Leur ſuperficie eſt tiſſuë de deux plans de fibres, les unes ſont perpendiculaires ; celles-cy traverſent toute leur largeur, & ſont éloignées les unes des autres d'environ une ligne. L'eſpace qu'elles laiſſent entr'elles eſt coupé par d'autres fibres plus preſſées & plus courtes : celles là ne vont que d'une des fibres droites à l'autre en ſerpentant. Il y a entre toutes ces fibres de petits creux, qui forment une eſpece de réſeau admirable.

A l'égard de leur ſtructure interieure, elle a encore quelque choſe de plus merveilleux, car chaque ovaire & chaque veſicule eſt partagé en pluſieurs petits tuyaux tous fermez par bas, & ouverts dans leur partie ſuperieure. Ces tuyaux ſont ſéparez les uns des autres par des cloiſons attachées tranſverſalement aux paroys de ces parties. Ils ſont diſpoſez à côté les uns des autres comme ceux du ſifflet d'un Chaudronnier. Au-deſſus de tous ces petits tuyaux, qui contiennent les uns les œufs, & les autres la ſemence, regne un canal dans lequel ils ont tous leurs embouchures.

Ce canal eſt fermé par ſon extremité qui regarde la tête, & ouvert par l'autre dans l'anus. Chaque ovaire & chaque veſicule a le ſien particulier. Ceux des veſicules ont de plus que ceux des ovaires, une fente dans leur partie moyenne ſuperieure, & s'uniſſent en un ſeul ſur la fin. C'eſt par ces quatre canaux que les œufs & la ſemence de la Moule ſe rendent dans l'anus, où ces deux

principes s'unissent ensemble en sortant ; ce qui suffit pour la generation. Ce poisson peut donc multiplier sans aucun accouplement, & c'est sans doute par cette raison qu'il n'a ni verge ni matrice. C'est donc un androgine d'une espece singuliere. Le paradoxe que j'ai avancé d'abord est donc démontré.

Au reste il est à remarquer que les ovaires de la Moule ne se vuident de leurs œufs qu'au Printemps, & ne s'en remplissent qu'en Automne ; delà vient qu'on les trouve toûjours vuides en Esté, & pleins d'œufs en Hyver. Il n'en est pas de même des vesicules seminales, on les rencontre en toute saison plus vuides que pleines ; ce qui me fait croire que la semence, qui est liquide, s'en écoule en tout tems, & c'est apparemment par cette raison qu'elles ont cette ouverture particuliere dont je viens de parler.

On découvre au-dessus des canaux des vesicules seminales deux petits corps blancs, qui parcourent toute leur étenduë. Ils sont abreuvez d'une liqueur semblable à la semence, ce qui donne sujet de penser que ces petits corps sont peut-être les sources d'où elle découle dans les vesicules seminales. Si cela est ainsi, elles ne peuvent pas être les filtres de la semence, mais les reservoirs seulement. Il n'en est pas de même de l'origine des œufs ; ils prennent naissance dans les ovaires mêmes ; d'où il est à inferer que leur structure essentielle, qui ne tombe pas sous les yeux, doit être differente de celle des vesicules seminales, quoique la conformation apparente des uns & des autres soit semblable.

Du cœur de la Moule.

Quelque admirable que soit la structure des ovaires & des vesicules seminales, celle du cœur est encore plus surprenante. A la verité sa figure, qui est conique, n'est pas extraordinaire ; mais sa situation est tout à fait differente de celle du cœur des autres animaux ; car outre qu'il est placé immediatement sous le dos des coquilles

& au-dessus des poûmons, sa base est tournée du côté de l'anus, & sa pointe regarde la tête de la Moule. D'ailleurs il n'a qu'un seul ventricule, & a cependant deux oreilletes, qui paroissent, étant remplis d'air, de figure cylindrique, avec lesquelles il communique par deux trous placez à ses côtez qui répondent dans l'une & dans l'autre. Enfin j'ai vû l'eau qu'il renferme fluer de son ventricule dans ses oreilletes, & refluer de celles-ci dans l'autre alternativement: mais je n'ai pû y découvrir ni valvule, ni veine, ni artere. Recherchons donc la source qui fournit l'eau au cœur, & aux parties celle qui les humecte.

Il sort, comme j'ai déja dit, du fond de la bouche de ce poisson un canal, qui passant par dessus sa tête, se divise en plusieurs branches, dont une va se terminer à la pointe du cœur; ainsi il est évident que c'est de la bouche, par cette branche, que le cœur reçoit une portion de l'eau, qui est distribuée aux autres parties du corps par les autres branches de ce canal. Surquoi il y a cette reflexion à faire.

Le cœur de la Moule n'ayant ni veine ni artere, il ne peut y avoir dans ce poisson qu'un flux d'eau, de la bouche par les branches de ce canal dans le cœur, comme dans toutes les autres parties de son corps, sans circulation & sans reflux, étant impossible que l'eau puisse couler en même tems dans ce canal par des mouvemens contraires vers des parties opposées; aussi ne voit-on pas qu'il se dilate, comme font les arteres, quand le cœur se resserre; ce qui devroit arriver si c'étoit le cœur qui poussât l'eau dans ce canal; d'où il suit que l'eau qui entre dans le cœur par une des branches de ce canal n'en ressort point. Elle ne peut donc couler que de son ventricule dans ses oreilletes, & recouler de celles-ci dans l'autre successivement, comme je l'ai remarqué.

On ne peut pas donner à ce vaisseau le nom de veine, parcequ'au lieu de servir à reporter l'eau des parties dans le cœur, il sert au contraire à la leur distribuer par ses

branches ; de ſorte qu'on peut dire qu'il fait à leur égard la fonction d'artere , ſans pouvoir neanmoins en porter le nom ; parce qu'outre qu'il n'a pas de mouvement, il ſert à conduire l'eau de la bouche dans le cœur , uſage tout contraire à celui de l'artere. On ne peut donc pas lui donner le nom ni de l'un ni de l'autre de ces vaiſſeaux.

Je ne vous reparle point, Meſſieurs, du paſſage extraordinaire que le cœur de la Moule donne à l'inteſtin. En décrivant ſa route, je vous l'ai fait remarquer. J'ajoûterai ſeulement à ce que je viens de vous dire , que le cœur de ce poiſſon eſt renfermé avec ſes oreilletes dans un pericarde, que j'ai toûjours trouvé rempli de beaucoup d'eau, ſans avoir jamais pû en découvrir la ſource ; ainſi je ne ſçaurois vous donner qu'une conjecture ſur ſon origine.

Comme le pericarde n'a point de vaiſſeau particulier, j'ai penſé que l'eau qu'il contient pouvoit ſe filtrer à travers la ſubſtance du cœur ; ce que je n'ai pas eu de peine à m'imaginer, l'expérience m'ayant fait voir pluſieurs fois que l'eau ſe crible bien à travers la chair du cœur de l'homme , qui eſt beaucoup plus épais que celui de la Moule.

Mais ſur l'eau que reçoivent le cœur & les autres parties du corps de ce poiſſon, il ſe preſente une autre difficulté bien plus conſiderable, à laquelle je ne trouve point de ſolution qui me ſatisfaſſe. La bouche de la Moule eſt ſi fixement attachée au derriere du muſcle anterieur des coquilles , qu'il eſt viſiblement impoſſible qu'elle puiſſe en ſortir pour chercher ſa nourriture ; de ſorte qu'il faut neceſſairement qu'il y ait, comme j'ai déja dit, dans l'eau des parties alimentaires qui entrent avec elle dans la bouche de ce poiſſon. Mais comme l'embouchure de l'inteſtin & celle du canal qui porte l'eau au cœur & aux parties ſont placées dans ſon fond , il eſt certain que ces parties nourriſſieres, que contient l'eau, peuvent paſſer avec elle dans l'un & dans l'autre également. On

demande donc par lequel de ces deux conduits l'aliment de la Moule peut être diſtribué aux parties de ſon corps pour nourrir.

Cette queſtion eſt fort embarraſſante ; car ſi l'on prétend que l'aliment doit entrer d'abord dans l'inteſtin pour y recevoir la premiere préparation qui le rend propre à la nourriture des parties, & s'écouler enſuite dans le cœur, pour être enfin diſtribué par une artere aux parties, comme dans les autres animaux, dont le chile paſſe par la veine cave dans le cœur, avant que d'être porté par l'aorte aux parties ; je répondrai que cela ne peut ſe faire ainſi dans la Moule, parceque ſon cœur n'a point de veine pour conduire l'aliment de l'inteſtin dans l'oreillete droite du cœur, ni d'artere pour le diſtribuer aux parties. Donc ce poiſſon doit recevoir ſa nourriture & de l'inteſtin & du canal de la bouche également, puiſque les parties nourriſſieres qui ſont mêlées avec l'eau, peuvent entrer du fond de la bouche dans le canal & dans l'inteſtin en même tems.

Il y a même bien de l'apparence que l'eau qui paſſe de la bouche dans le canal contribuë plus à la nourriture des parties que la matiere qui ſe rencontre dans l'inteſtin, parcequ'on ne découvre point de voye qui puiſſe porter cette matiere de l'inteſtin aux parties ; au lieu que du canal de la bouche partent pluſieurs petits conduits, par leſquels l'eau qu'il reçoit peut leur être facilement diſtribuée.

Afin de ne rien obmettre de ce qui regarde le cœur de la Moule, je vous dirai, Meſſieurs, que j'ai remarqué, tant à ſon ventricule qu'à ſes oreilletes, les mêmes mouvemens alternatifs de diaſtole & de ſiſtole, que j'ai obſervez au cœur de la tortuë ; mais avec cette difference conſiderable, que le ventricule du cœur de la Tortuë reçoit le ſang des oreilletes, au lieu que les oreilletes du cœur de la Moule reçoivent l'eau de ſon ventricule ; ce qui eſt un effet naturel de la ſtructure du cœur de ce poiſſon, dont les oreilletes n'ont point de veines pour

leur porter l'eau. Celles de la Tortuë en ont, qui leur portent le ſang.

Des poûmons & de la reſpiration de la Moule.

La conformation de ſes poûmons n'eſt pas moins extraordinaire que celle de ſon cœur, & la voye par laquelle elle reſpire eſt diametralement oppoſée à celle des autres poiſſons. Dans la Carpe & le Brochet l'air entre par le nez ou la bouche; au contraire dans la Moule il paſſe par l'anus dans les poûmons; ce que je démontrerai après en avoir fait la deſcription.

Les poûmons de la Moule ſont ſituez entre le pericarde & les parties de la generation, l'un à droit & l'autre à gauche; ils ont environ trois pouces de long, & cinq à ſix lignes de large dans les plus grands de ces poiſſons. Leur figure eſt cylindrique. Leur membrane propre eſt tiſſuë de fibres circulaires, qui les partagent en pluſieurs cellules, qui ont communication les unes avec les autres. Ils ſont abreuvez d'une humeur noire dont ils empruntent la couleur. Entr'eux regne un canal de même figure & longueur, mais d'un plus petit diametre & ſans aucune teinture. Les deux poûmons & ce canal ſont ſéparément renfermez dans une membrane, de ſorte que chacun a la ſienne particuliere.

On découvre au devant du canal deux petites ouvertures, qui font la communication de ce conduit avec les cellules anterieures des poûmons. Pour les trouver il faut couper la membrane qui l'envelope. Sur le derriere de ce même canal on en remarque une troiſiéme, placée entre les deux tendons des muſcles poſterieurs du ventre. Cette ouverture répond dans leurs cellules poſterieures, dans leſquelles viennent ſe rendre deux petits conduits qui ont leurs embouchures dans l'anus. Or comme la Moule n'a point de canal qui de ſa bouche aille aux poûmons, il eſt évident que ce poiſſon ne peut reſpirer que par l'anus. Finiſſons ce Memoire en expliquant ſa reſpiration.

Quand

Quand les fibres circulaires des poûmons se relâchent, l'air qu'ils comprimoient en eux-mêmes se dilate, & la Moule s'éleve sur la surface de l'eau. Alors l'air exterieur pressé au dehors par les coquilles, qui s'écartent en même tems, entre dans l'anus, où trouvant moins de résistance qu'ailleurs, il s'insinuë par les deux conduits, dont je viens de parler, dans les cellules posterieures des poûmons qu'il remplit d'abord. Delà il passe ensuite dans le canal qui est placé entr'eux, & va remplir leurs cellules anterieures & celles du milieu.

Quand aprés cela les coquilles se referment, alors les fibres circulaires des poûmons venant à se rétrécir, leur capacité diminuë, l'air y est comprimé, le corps en devient plus pesant, & la Moule retombe au fond de l'eau; & comme elle y reste presque toûjours plongée, elle ne peut jouir de la respiration que dans quelques momens fort éloignez les uns des autres; car quoique ses poûmons puissent rejetter en tous tems dans l'eau l'air qu'ils ont reçû, ils ne peuvent en reprendre de nouveau, que quand ce poisson s'éleve sur la superficie de l'eau. Or comme cela ne luy arrive que fort rarement, il n'y a pas d'apparence que la respiration puisse servir à entretenir dans la Moule le flux d'eau dont j'ay parlé, comme elle sert dans les autres animaux à continuer la circulation du sang, dont elle est une des principales causes. Ce flux d'eau dépend donc dans la Moule de l'action seule des levres, qui par leur mouvement la font couler de la bouche de ce poisson dans l'embouchure du canal que j'ay décrit & nullement des autres parties, puisque toutes reçoivent l'eau de ce canal & n'ont point de vaisseau pour leur décharge.

J'aurois pû, Messieurs, m'étendre plus que je n'ay fait sur la structure des parties dont j'ay eu l'honneur de vous entretenir; mais outre qu'une description trop détaillée en devient plus obscure, le tems d'une demie heure que le sage Moderateur * de cette Royale Academie donne à chaque particulier pour rapporter dans ses

* *M. l'Abbé Bignon.*

Assemblées publiques leurs observations, ne m'a pas permis d'entrer dans des minuties aussi peu curieuses, qu'elles sont peu necessaires pour expliquer leurs fonctions.

MEMOIRE
TOUCHANT LES VEGETATIONS ARTIFICIELLES.

Par M. Homberg.

1710. 12 Novem.

NOus avons dans les opérations de Chimie beaucoup de productions, qui ressemblent en quelque façon à la vegetation des Plantes; ce qui a donné lieu de les appeller Vegetations métalliques, Arbres de Diane, Sels vegetans, &c. Il s'est même trouvé des Auteurs qui ont voulu que ces sortes de vegetations ressemblassent parfaitement à celle des Plantes; cependant ce n'est rien moins quand on les examine avec un peu d'attention.

J'ay rangé ces sortes de vegetations en trois differentes classes. J'ay mis dans la premiere toutes celles qui consistent en un métal pur & massif, sans le mêlange d'aucune autre chose. J'ay mis dans la seconde classe toutes celles dont la composition consiste en un métal dissous le dissolvant restant mêlé avec le métal, & faisant partie de l'arbrisseau qui en est produit. La troisiéme classe est de celles qui ne contiennent rien de métallique, mais simplement des matieres salines, terreuses & huileuses.

Toutes les productions de la premiere classe se font à sec & dans le grand feu, c'est-à-dire, sans aucune liqueur aqueuse; elles sont solides, & on les peut tirer des vaisseaux dans quoy elles ont été formées sans les rompre.

Les productions au contraire de la seconde classe se font toutes avec une liqueur aqueuse; elle sont très-fragiles, & on ne les sçauroit tirer commodément de leurs vaisseaux. Et parmi celles que la troisiéme classe fournit, il y en a qui se soûtienneut à sec, & d'autres qui ne se soûtiennent que dans une liqueur aqueuse, & que l'on ne sçauroit remuer sans les gâter.

Je donneray pour exemples de la premiere classe les productions des trois operations suivantes. 1°. Faites un amalgame d'une once ou deux d'or fin, ou d'argent fin, & de dix fois autant de mercure ressuscité du cinabre; broyez & lavez cet amalgame plusieurs fois avec de l'eau nette de riviere, jusqu'à ce que l'amalgame ne laisse plus de salletés dans l'eau: pour lors sechez vôtre amalgame, mettez-le dans une cornuë de verre, distillez au bain de sable à très petit feu, que vous entretiendrez pendant un jour ou deux; plus vous pourrez continuer le feu sans chasser tout à fait le mercure, plus la vegetation sera parfaite: vous pousserez le feu à la fin jusqu'à faire sortir tout le mercure; laissez éteindre le feu, vous trouverez vôtre mercure dans le récipiant, & l'or ou l'argent qui restera dans la cornuë sera doux & pliant, & de la plus belle couleur que ces mêtaux peuvent avoir, dont la masse aura poussé des branches en forme de petits arbrisseaux, de differentes figures & de differentes hauteurs, que l'on peut tirer de la cornuë, les séparer de la masse de métal qui leur a servi de base, les rougir au feu & les garder tant que l'on veut sans qu'ils se gâtent.

La formation de ces arbrisseaux se fait selon toutes les apparences de cette maniere. L'amalgame qui est dans la cornuë sur le feu s'échauffe peu à peu, jusqu'à ce que le mercure commence à s'évaporer; alors on s'apperçoit des fusées ou des traînées de mercure en vapeurs, qui sortent de dessus toute la surface de l'amalgame: ce mercure est le dissolvant du métal dont est composé l'amalgame, qui en entraîne avec lui des parties; ces petites parties de métal n'étant pas volatiles comme le mercure,

reſtent attachées ſur la ſurface de l'amalgame, tandis que le mercure qui leur a ſervi de vehicule, acheve de s'évaporer tout à fait, & les abandonne. Elles ſont placées de cette maniere peu à peu les unes ſur les autres, étant toûjours guidées par la trainée de mercure qui continuë d'y ajoûter des nouvelles parcelles de métal, & de s'évaporer enſuite : ces parcelles de métal ainſi emmoncelées les unes ſur les autres, s'uniſſent ſi bien enſemble, qu'elles forment les branches qui paroiſſent ſur la ſurface de la maſſe de métal qui reſte à la fin de la diſtilation au fond de la cornuë.

Ces branches ne reſſemblent pas mal à une vraie vegetation quand on n'en regarde que la figure exterieure; mais quand on conſidere qu'une vraie Plante eſt un corps organique, dont les parties ſervent à tirer le ſuc de la terre, à préparer ce ſuc pour la nourriture & pour l'accroiſſement de la Plante, & produire enfin des ſemences, qui ſont auſſi des petits corps organiques, qui ſe dévelopent en nouvelles Plantes par la nourriture qu'elles prennent; & quand au contraire l'on voit dans nos vegetations artificielles, que ce n'eſt que des ſimples criſtalliſations, ou des aſſemblages de quelques petits morceaux de métal, que le hazard a placé les uns ſur les autres ſans ordre & ſans aucune partie organique, la comparaiſon que l'on en voudra faire avec la vraie vegetation des Plantes, ne pourra ſubſiſter en aucune façon.

Nous avons dit que le mercure en s'évaporant de l'amalgame pendant ſa diſtilation emporte des parcelles de métal, la preuve eſt, que ſi on fait le feu un peu trop fort dans le temps que l'amalgame eſt encore liquide, il s'enleve des parties fort ſenſibles de l'amalgame, qui ſautent même avec éclat contre la voûte de la cornuë, où elles ſe collent & y font des grandes taches d'or ou d'argent, qui y paroiſſent aprés la diſtillation, ſelon le métal qui étoit entré dans la compoſition de l'amalgame.

Le ſecond exemple de cette premiere claſſe des vegetations artificielles ſe tire de l'opération ſuivante : Prenez

une once ou deux d'argent fin, fondez-le dans un creuſet, & pendant qu'il eſt en fonte, jettez deſſus par diverſes repriſes autant peſant de ſouffre commun, remuez & mêlez-le bien avec une baguette de fer, & retirez-le promptement du feu, laiſſez refroidir la matiere, puis pilez-la bien menu, remettez-la dans un autre creuſet que vous placerez dans un feu doux de charbons, ou dans une forte digeſtion au bain de ſable ſans fondre la matiere, le ſouffre s'évaporera peu à peu de la maſſe qui eſt dans le creuſet, & il entraînera avec lui une partie de l'argent en forme de filets & de lames fort blancs, brillants & fort doux, qui tiennent à la maſſe du métal d'où ils ſont ſortis; j'en ay vû de la hauteur de trois pouces, & des lammes de deux lignes de large & de l'épaiſſeur d'une carte à joüer.

La cauſe de cette vegetation eſt à peu prés la même que celle de la précedente, mais elle demande plus de temps & d'attention. Le ſouffre commun qui ſert de diſſolvant à l'argent étant volatile, s'évapore peu à peu & entraîne des parcelles d'argent, qui ſe placent les unes aux bouts des autres, & s'attachent enſemble, pendant que le ſouffre commun les abandonne en achevant de s'évaporer : ces parcelles d'argenr reſtant en forme de filets & de lammes attachez à la maſſe d'argent qui eſt au fond du creuſet, forment une eſpece de vegetation qui ne reſſemble pas tant à un arbriſſeau que celle de l'opération précedente, mais qui reſſemble fort à certaines mines d'argent, qui conſiſtent de même en filets & en une eſpece de filigrame.

3° L'opération ſuivante donnera nôtre troiſiéme exemple : Fondez enſemble deux onces d'argent de vaiſſelle & ſix onces de plomb, mettez ce mêlange dans une coupelle de cendres d'os ſous une mouffle, donnez le feu qui convient pour purifier cet argent à la coupelle, & dés que vous verrez la marque que l'argent eſt devenu fin, vous retirerez la coupelle promptement du feu, & la laiſſerez refroidir; deux ou trois minutes aprés que vous

l'aurez retiré du feu, il ſortira bruſquement de deſſus la ſuperficie de cet argent ou pluſieurs jets d'argent fondu de la groſſeur d'un brin de paille, & de la hauteur de ſept à huit lignes, qui durciront à l'air à meſure qu'ils ſortiront de la maſſe d'argent qui eſt dans la coupelle: ces jets ſont ordinairement creux, & prennent ſouvent la figure des branches de corail; ils reſtent ſolidement attachez à la maſſe d'où il ſont ſortis.

Selon ce que j'ay pû remarquer ſur l'effet de cette opération, que j'ay obſervée ſouvent & avec attention : il m'a paru que ces branches ſe forment d'une maniere tout à fait differente de celles que nous venons de rapporter. Pour en concevoir bien la méchanique, il faut que j'éclairciſſe auparavant en quoy conſiſte la marque que l'argent eſt devenu fin dans la coupelle, puiſque c'eſt-là le point qui fait réüſſir l'opération, ou qui la fait manquer: cette marque eſt lorſque dans le même degré de feu où l'argent a été en parfaite fuſion pendant tout le temps du raffinage, ſa ſurface ſe fige dans la coupelle tout d'un coup en une croûte dure & brillante, qui tient fortement attachée par ſes bords au corps de la coupelle; pendant que l'interieur de cette maſſe d'argent eſt encore en fuſion. C'eſt dans ce moment qu'on doit tirer la coupelle du feu, & la placer en un lieu froid; quand on conſidere ce qui lui arrive en cet état, on comprendra que l'air froid qui touche le dehors de la coupelle & la ſurface déja figée de l'argent, les doit reſſerrer, & en même temps comprimer la partie interne de cette maſſe d'argent qui n'eſt pas encore figée, parceque le corps de la coupelle eſt aſſez enflammé en le tirant du feu, pour qu'il puiſſe entretenir pendant quelques minutes en fuſion la partie de l'argent qui le touche immediatement : cet argent liquide eſt enfermé comme dans une boëte bien cloſe, en deſſous par le corps ſpongieux de la coupelle, capable de beaucoup de compreſſion, & en deſſus par ſa propre croûte figée, dont il eſt ſi fortement preſſé & comprimé à l'occaſion du froid ſubit qui environne

cette boëte, & qui la resserre de plus en plus; qu'il en échappe une partie par les endroits les plus foibles de sa surface figée, à peu prés de la même maniere que nous voïons exprimer les couleurs des Peintres, qu'il tiennent enfermées dans des nouets de vessie de porc, en pressant ces nouets aprés y avoir fait un trou d'épingle.

Pour donner un exemple d'une pression semblable, prenez le vaisseau d'un Thermomettre dont la boule aura deux ou trois pouces de diametre, & dont le verre sera fort mince, plus la boule sera grande, plus l'effet en seta sensible; plongez cette boule dans l'eau boüillante, & l'y laissez jusqu'à ce que toute la liqueur soit devenuë chaude, marquez pour lors l'endroit où la liqueur sera montée, puis retirez ce vaisseau de l'eau chaude, & replongez-le subitement dans de l'eau froide, & l'on verra la liqueur monter tres-sensiblement dans le tuyau de ce vaisseau, avant qu'elle commence de descendre par la fraîcheur de l'eau où l'on vient de la mettre, & cela par la raison que le corps de la boule, que je suppose d'un verre fort mince, se refroidit dans le même instant qu'il touche l'eau froide; & comme ce vaisseau a plus de capacité étant chaud que quand il est froid, il comprime pour un instant la liqueur qu'il contient en se refroidissant subitement, & la fait monter dans le tuyau pendant un petit espace de temps, ou jusqu'à ce que la liqueur ait commencé aussi de se refroidir, qui pour lors occupe moins de place, & qui par conséquent descend dans le tuyau, selon l'observation ordinaire de l'effet des Thermometres. Pour réüssir en cette expérience, il faut que la boule du Thermometre soit d'un verre fort mince, autrement elle se cassera en la plongeant toute chaude dans l'eau froide.

Une preuve que l'argent encore liquide dans nôtre coupelle sort & échape par une compression semblable à travers les endroits les plus foibles, ou les moins durcis de la croûte qui le couvre, est premierement: que ces jets sortent brusquement & avec bruit de la masse de

l'argent coupellé comme une liqueur qui seroit seringuée avec violence, ce qui ne peut arriver que par une forte compression; & en second lieu, qu'on observe toûjours quand on laisse refroidir la coupelle dans le feu, que la masse de l'argent coupellé se durcit peu à peu & tranquillement dans toute son étenduë, sans qu'il sorte des jets d'argent liquide, & sans qu'il se forme des branches sur la superficie.

Ces trois opérations suffisent pour établir le caractere des vegetations artificielles de la premiere classe, c'est-à-dire de celles dont la matiere consiste en un métal pur & massif & sans aucun mêlange. Pour ce qui est de celles de la seconde classe, dont la composition consiste en un métal dissous, & où le dissolvant reste mêlé avec le métal, j'ay lû autrefois dans une de nos Assemblées un Memoire, qui a été imprimé en *1692*; ce Memoire contient plusieurs opérations qui enseignent differentes manieres de faire des vegetations artificielles, elles peuvent toutes servir d'exemples pour établir le caractere de celles dont nous avons fait la seconde classe, ainsi nous n'en parlerons pas icy.

Nous avons rangé dans la troisiéme classe toutes les autres vegetations artificielles qui ne tiennent rien de métallique; nous en donnerons icy de même trois exemples. Premier exemple: prenez huit onces de salpetre fixé par le charbon à la maniere ordinaire, faites-le résoudre à la cave en huile par défaillance, filtrez-la & versez dedans peu à peu de l'huile de vitriol jusqu'à parfaite saturation, ou jusqu'à ce que l'ébullition cesse; faites évaporer toute l'humidité, il restera une masse saline, compacte, dure, tres-blanche & fort âcre, pilez-la grossierement & versez dessus un demi-septier d'eau froide de riviere dans une écuelle de grez, laissez-là pendant quelques jours sur une table découverte à l'air, l'eau s'évaporera en partie, & le sel encore humide commencera de vegeter en plusieurs endroits, en poussant des touftes en aigrettes, qui partent chacune d'un même centre,

centre, & qui se divisent en diverses branches pointuës, roides & cassantes, longues de douze à quinze lignes : ces aigrettes se forment ordinairement sur tout le bord de l'écuelle, & y composent une espece de couronnement ; elles cessent de croître quand toute l'eau a été évaporée de l'écuelle, mais en remettant de l'eau sur ce sel, il vegete de nouveau.

Cette vegetation est tout à fait differente de celles de la premiere classe, & elle approche un peu de la plûpart de celles de la seconde : elle ne consiste qu'en une simple cristallisation du sel dissous & contenu dans l'écuelle de grez. Il faut considerer ici, que ce sel est du salpetre, qui a été calciné par le charbon, de sorte qu'il est devenu un sel fixe lixiviel, à peu près comme est le sel de tartre, ou le sel fixe de quelqu'autre vegetal, dont il conserve une certaine consistance grasse, qui fait qu'il s'attache facilement à toutes sortes de corps ; & par l'addition de l'acide du vitriol, il acquiert une volatilité, ou une disposition de s'élever aisément en vapeurs, qui sont plus legeres que l'air qui les environne ; moyennant quoi ce sel ayant été dissous en peu d'eau, la liqueur qui en résulte ne garde pas long-tems la même situation, & elle ne moüille pas le vaisseau dans quoi elle est contenuë, comme font les autres liqueurs aqueuses, c'est-à-dire jusqu'au niveau seulement de la liqueur ; mais elle monte peu à peu, & est poussée par le poids de l'air au-dessus de son niveau, & elle continuë de moüiller les parois du vaisseau jusqu'à son bord superieur, & passe même pardessus en moüillant les parois exterieurs du vaisseau, particulierement quand il a la superficie rabotteuse & grenuë, comme est ici le grez, qui agit dans les grains du grez à peu près de la même maniere que l'eau commune agit dans les poils du drap qui sert de filtre, ou dans les fibres d'une éponge nouvellement lavée quand elle y monte, c'est-à-dire que les grains inferieurs ou les plus près du niveau de la liqueur étant moüillez, la liqueur qui les envelope commence de toucher aussi ceux qui

ſont immediatement au-deſſus, & les moüille de même par ſa grande facilité de s'attacher à toutes ſortes de corps, & en continuant ainſi, la liqueur monte toûjours de grains en grains, juſqu'à ce qu'à la fin elle commence à ſe deſſecher; & comme elle conſiſte en une diſſolution de ſel, ce ſel ayant perdu par l'évaporation le trop de liqueur aqueuſe qui le tenoit diſſous, il ſe criſtalliſe à ſon ordinaire dans toute l'étenduë du vaiſſeau où la liqueur étoit montée, car les parties ſalines ne s'évaporent pas ſi aiſément que l'eau qui leur avoit ſervi de diſſolvant: ces premiers petits criſtaux ſe remoüillent ſucceſſivement de la même maniere que les grains du grez par la liqueur de l'écuelle, qui continuë de monter ainſi & de ſe criſtalliſer enſuite, & par ce moyen elle groſſit & elle allonge les premiers cryſtaux, qui reprennent à peu près la même forme qu'avoit le ſalpetre avant que d'avoir été calciné, c'eſt-à-dire qu'ils deviennent des aiguilles à quatre, cinq & ſix pans, dont quelques-unes ſont collées enſemble, & les autres ſe tiennent ſéparément, & produiſent les aigrettes qu'on y obſerve, ce qui eſt proprement ici nôtre vegetation. La production de ces criſtaux & leur augmentation continuë de ſe faire, juſqu'à ce que le ſel qui eſt dans l'écuelle ſe ſoit tout à fait deſſeché, & alors cette vegetation ceſſe auſſi; on peut la faire recommencer en détrempant de nouveau avec de l'eau commune le ſel qui reſte dans l'écuelle, ce que l'on peut continuer tant de fois, qu'à la fin tout le ſel ſoit monté ou criſtalliſé en cette ſorte de vegetation.

Je rapporterai pour ſecond exemple de cette claſſe certaines criſtalliſations en arbriſſeaux, que j'ai trouvé produites naturellement ſur le rivage de la mer d'Eſpagne, que l'on peut imiter facilement par art, n'étant autre choſe qu'une tige branchuë de quelque Plante deſſechée & ſans feüilles, qui a été arroſée pluſieurs fois par l'eau de la mer, dont l'humidité aqueuſe ayant été évaporée, le ſel y eſt reſté, & s'eſt criſtalliſé deſſus, en couvrant toute la Plante, d'abord fort legerement, mais

ayant été moüillée plusieurs fois en divers tems, le sel s'y augmente peu à peu, & represente une Plante de sel. J'en ai vû une fort belle de cette nature dans le cabinet de feu M. de Tournefort, qui étoit haute d'environ un pied, & blanche comme de la neige; j'en ai fait de semblables en employant de l'eau salée filtrée. Il faut avoir la précaution d'ôter l'écorce de la branche qui sert de charpente ou de soûtien à cette cristallisation, parceque l'écorce étant ordinairement brune, elle obscurcit la blancheur transparente du sel qui l'envelope & qui s'attache à l'entour.

Je donnerai pour troisiéme exemple l'observation suivante : Dans un tems d'orage accompagné de beaucoup de pluye & de tonnerre, je remplis une bouteille de verre d'environ trois pintes de l'eau de cette pluye, qui avoit coulé de dessus un vieux toit de thuiles, & qui avoit reposée pendant une demie heure environ dans un bacquet de bois dessous la goutiere; j'ai mis cette bouteille negligemment fermée d'un bouchon de papier sur une fenêtre exposée au midi, où l'ayant oubliée elle est restée sans être remuée pendant trois mois environ, l'eau ne paroissoit pas trouble quand je l'ai puisée; cependant il s'est amassé peu à peu au fond de la bouteille un sediment de couleur verte, de l'épaisseur de trois ou quatre lignes; il s'est fait apparemment une fermentation dans cette matiere, car elle m'a paruë fort spongieuse, & pleine de petites bulles d'air, qui selon toutes les apparences s'étoient séparées du limon qui faisoit le sedimenr, comme il arrive toûjours des pareilles séparations aëriennes dans toutes les matieres qui fermentent.

Un jour qu'il faisoit fort chaud dans le mois de Juillet vers les deux heures environ après midi, je passai dans l'endroit où étoit cette bouteille, je la regardai par hazard, je n'y trouvai pas de limon au fond, mais je la vis remplie d'une espece de vegetation d'une très-belle couleur verte, dont une partie paroissoit tenir au fond de la bouteille, & le reste étoit simplement suspendu com-

me des filets dans l'eau, parmi lesquels il y en avoit qui étoient élevez jusqu'à la superficie de l'eau, & d'autres qui étoient restez à differentes distances de la superficie, nageants entre deux eaux, les extremitez superieures de toutes les ramifications & filets étoient garnies chacune d'un grain ou d'une petite boule, qui paroissoit blanche dans l'eau & brillante comme de l'argent, & qui representoit comme un fruit sur le sommet de sa Plante; en remuant un peu la bouteille, je m'apperçûs que cette vegetation n'avoit point de consistence, mais qu'elle étoit soûtenuë par l'eau de la bouteille, & qu'elle flottoit dans toute la masse de cette eau, qui d'ailleurs étoit fort claire & fort limpide.

Le lendemain environ vers les sept heures du matin, voulant faire voir cette vegetation à quelqu'un à qui j'en avois parlé, je n'y trouvai que de l'eau bien claire, & le limon verd rappliqué au fond de la bouteille, comme je l'avois vû autrefois, ce qui me donna la curiosité de regarder souvent pendant la journée cette bouteille, pour m'éclaircir d'un fait qui m'avoit d'abord surpris. Vers les dix heures du matin, qui étoit le tems que le Soleil touchoit la fenêtre où étoit posée la bouteille, le limon du fond commença de s'enfler, & à mesure que l'eau s'échauffoit, il s'éleva de dessus la superficie de ce limon une infinité de bosses, qui peu à peu en s'élevant davantage diminuerent de grosseur, & produisirent des filets de la substance du limon même, de sorte qu'en deux heures de tems tout ce limon qui tapissoit le fond de la bouteille étoit converti en filets, dont quelques-uns tenoient ensemble, & paroissoient sortir les uns des autres, representans des branchages, & les autres flottoient comme des simples filets droits & tortuez, selon qu'ils avoient été obligez de se détourner par les autres qu'ils avoient rencontrez en chemin, chacun ayant attaché à son bout superieur une perle blanche, qui étoient de differentes grosseurs, comme je les avois vû le jour précedent; ils resterent dans cette situation pendant tout

le tems que le Soleil les éclaira, c'est-à-dire jusqu'à quatre heures après midi; immediatement après ce tems je vis les filets & les ramifications retomber peu à peu au fond de la bouteille, & en même tems les petites boules blanches que j'avois remarqué aux bouts des ramifications diminuer peu à peu de grosseur, & étant enfin entraînées avec les filets au fond de la bouteille, ils récomposerent la même quantité de sediment ou de limon verd que j'y avois observé en premier lieu : le lendemain il arriva la même chose & aux mêmes heures, ce qui a continué pendant tout le reste de l'Esté, c'est-à-dire les jours qu'il a fait chaud, & que le Soleil a pû atteindre la bouteille; le reste de l'année non-seulement les branchages n'ont pas paru dans l'eau, mais le limon du fond ou le sediment de la bouteille, qui pendant les nuits de l'Esté étoit épais de trois ou quatre lignes, s'est si fort applati pendant l'Hyver, qu'il n'avoit pas une ligne d'épaisseur, & les petites bulles d'air dont ce limon étoit fort sensiblement parsemé en Esté, ont disparu entierement pendant l'Hiver, de sorte qu'on ne les voyoit plus du tout.

J'ai de loin approché cette fiole du feu pendant l'Hyver, les bulles d'air ont paru dans le sediment, & à mesure que l'eau de la bouteille s'est échauffée le sediment s'est gonflé, les branchages se sont refaits dans toute la masse de l'eau, comme il étoit arrivé en Esté par la chaleur du Soleil, & en éloignant la bouteille du feu le sediment s'est remis au fond de l'eau à mesure qu'elle s'est refroidie; j'ait fait ces expériences trois ou quatre fois pendant l'Hyver, qui ont fort bien réussi; mais la derniere fois ayant trop échauffé la bouteille, il s'est fait une écume sur l'eau, ce qui n'étoit jamais arrivé, & tous les filamens & les branchages qui occupoient toute l'eau, se sont précipitez subitement au fond de la bouteille en forme de limon, qui ne s'est jamais relevé depuis en branchages comme il faisoit auparavant.

L'on voit aisément ici que les bulles d'air envelopées

dans le ſédiment verd, ont été la cauſe de l'élevation de ce ſediment en forme des filets & de branchages, qui ont occupé toute la capacité de la bouteille, & que les petites boules blanches & brillantes qui tenoient au haut de chaque branche en forme de fruits, n'étoient autre choſe que ces mêmes bulles d'air engagées & envelopées en partie dans le tiſſu de ce limon : ces bulles d'air ayant été dilatées conſiderablement par la chaleur du Soleil ou du feu, ſont devenuës ſi legeres en comparaiſon d'un pareil volume d'eau, que l'eau de la bouteille les a pû enlever nonobſtant le poids du limon à quoi elles étoient attachées, de ſorte qu'elles l'ont entraîné après elles en forme de branchages, qui ont formé cette vegetation ; & comme la derniere fois que j'ai preſenté la bouteille au feu je l'ai trop échauffée, les bulles d'air ont été trop dilatées, & ont déchiré les envelopes qui les retenoient, & elles ont formé l'écume qui pour lors a paru ſur l'eau de la bouteille ; auſſi depuis ce tems le limon ne s'eſt plus élevé dans ſon eau, & il n'y a plus paru de vegetation.

Quand on obſervera bien toutes les circonſtances que j'ai marquées en amaſſant de l'eau de pluye, on réïterera cette expérience de la même maniere tant de fois qu'on le voudra.

Si la fameuſe palingeneſie étoit bien verifiée, elle pourroit ſervir encore d'exemple de cette troiſiéme claſſe des vegetations artificielles.



DU MOUVEMENT PROGRESSIF,

Et de quelques autres mouvemens de diverses especes de Coquillages, Orties & Etoiles de mer.

PAR M. DE REAUMUR.

1710. 10. Decemb.

PResque tous les Auteurs modernes qui ont travaillé jusqu'ici à l'Histoire naturelle des Coquillages, se sont bornez à donner des descriptions & des desseins de leurs Coquilles; travail qui quoiqu'excellent en soi, est peu propre à nous faire connoître les animaux mêmes que ces coquilles couvrent. On ne donneroit guere d'idée de nos Instrumens de Musique à des Ameriquains, si on se contentoit de leur montrer des étuis de Violons, de Basse de Viole & des autres Instrumens. Les étuis, s'il m'est permis de me servir de ce terme, dans lesquels sont renfermez diverses especes d'animaux de mer, meritoient fort à la verité les soins qu'on s'est donné, soit par leur structure singuliere, soit par la varieté prodigieuse qui est entr'eux; mais les animaux qu'ils contiennent étoient bien dignes à leur tour d'une pareille attention.

Il est vrai qu'on n'a pas trouvé des facilitez égales à travailler sur ces animaux & sur leurs coquilles, dont la plus grande partie ayant été rassemblée dans les cabinets des Curieux, on a pû les y examiner à loisir & sans peine: au lieu que ce qu'il y a de singulier dans les animaux qu'elles couvrent, n'a pû être apperçû que par ceux qui ne craignent point de mettre leur patience à de longues épreuves, lorsqu'il s'agit de découvrir les merveilles que la nature semble avoir pris plaisir à nous cacher. Il ne

suffit pas d'aller les chercher au bord de la mer, il faut y épier avec soin les momens favorables dans lesquels ils nous font voir par differentes actions qu'ils sont des animaux très-parfaits; il faut même imaginer des moyens de les déterminer à executer ces differentes actions dans des circonstances où on puisse les observer aisément.

Les voyages que j'ai faits depuis quelques années sur les côtes de Poitou & d'Aunis, m'ont fourni des occasions commodes d'examiner de près ces animaux, que les Physiciens avoient ce me semble un peu trop negligez. J'ai crû aussi qu'après avoir découvert l'art de la formation des coquilles * dont ils sont & les habitans & les ouvriers, que je leur devois à eux-mêmes quelque sorte d'attention. Je ne me suis pourtant pas borné à suivre ces Coquillages, j'ai observé avec la même application les differentes especes d'Etoiles, d'Herissons, & d'Orties de mer, dont les figures si singulieres nous laissent croire à peine que ce sont des animaux, dans le tems même que leurs actions nous en convainquent.

* Voyez les Memoires de 1709. p. 364.

Enfin tous ceux qui sçavent combien differentes especes d'animaux habitent cette partie de la terre qui est couverte par les eaux de la mer, verront quelle est l'étenduë de la matiere que j'ai embrassée : car c'est surtout sur ces especes que je me proposai de faire des recherches, remettant à examiner dans d'autres tems les poissons qui paroissent presque toûjours entre deux eaux où ils nagent. Cette vaste matiere m'a fourni trop d'observations pour qu'elles puissent être comprises dans les bornes d'un seul Memoire, je serai obligé d'en employer plusieurs à les détailler toutes; & pour les rapporter avec quelque ordre, je donnerai dans differens Memoires celles qui ont rapport à differentes actions. Celui-ci sera principalement destiné à expliquer le mouvement progressif de ces animaux, dont on avoit crû plusieurs especes incapables.

Au reste on ne doit pas attendre que j'entrerai dans un grand détail anatomique des parties qu'ils emploïent à

cet usage, plusieurs volumes y suffiroient à peine. Je me contenteray de faire connoître les parties qui servent à les mouvoir, sans trop examiner les muscles dont elles sont composées. Ce que j'en dirai nous montrera de reste, que si la nature a donné à ces animaux de mer la faculté d'exécuter des actions semblables à celle des animaux terrestres, qu'elle l'a fait par des moyens si differens, qu'il semble qu'elle à voulu nous faire voir qu'elle connoît plus d'une voie pour arriver au même terme.

Comme je serai obligé d'employer certaines expressions qui serviront à abreger le discours, & même à le rendre plus clair, je crois devoir commencer par dire quelles idées je leur attache. Le mot de Coquille signifiera toûjours toute l'envelope pierreuse des animaux à Coquilles, soit qu'elle soit d'une seule piece, comme celle des Limaçons, ou celles des Fig. 18. & 19. ou qu'elle soit composée de deux ou de plusieurs pieces, comme celles des Fig. 1. 2. 3. &c. & lorsque je parlerai d'une des pieces, ou des morceaux de l'assemblage desquels cette Coquille entiere est formée, j'aurai soin d'en avertir.

Je donnerai quelquefois le nom de Coquilles à *deux battans*, aux Coquilles qui étant composées de deux pieces, s'entrouvrent lorsque ces deux pieces s'éloignent l'une de l'autre, sans cesser de se toucher du côté qui est opposé à celui où elles sont le plus ouvertes. Les Coquilles des Fig. 1. 2. 3. sont de cette espece. Je n'ai pas crû pouvoir mieux rendre le nom de *Bivalvæ* qu'on leur donne en Latin.

Si l'on regarde avec quelque attention une Coquille d'une seule piece, ou un des morceaux dont les Coquilles de deux pieces sont composées *, on observera aisément diverses lignes courbes, dont chacune renferme une figure semblable à celle de la Coquille, ou du morceau que l'on considere; de sorte que si on retranchoit une certaine partie de cette Coquille, ou de ce morceau, en suivant une de ces lignes courbes, on diminueroit leur grandeur en leur conservant cependant une figure sem-

* *Voyez les Planches* 1. 2. 3. *&c.*

blable à celles qu'elles avoient. Or j'appelle ſommet de la Coquille ce point où une de ces figures ſemblables devient ſi petite qu'à peine peut on la diſtinguer, ainſi la pointe des Coquilles en ſpirales eſt leur ſommet; & dans les Coquilles à deux batans ce ſommet eſt auprés de l'endroit où elles ſont attachées l'une à l'autre, & eſt composé des ſommets de l'une & l'autre piece dont elle eſt formée; ainſi dans les Fig. 3. 5. 12 & diverſes autres le ſommet de la Coquille eſt *S*. Je nomme *baſe* de la Coquille le côté opposé directement à ce ſommet: *BBB* eſt la baſe de la Fig. 5. la diſtance de la baſe au ſommet eſt ce que j'appelle largeur de la coquille, & je prends pour ſa longueur la plus grande des lignes perpendiculaires qui peuvent être tirées ſur la ligne qui a été auſſi menée perpendiculairement du ſommet à la baſe. Fig. 5. la ligne *SB* marque la largeur, & la ligne *LL* la longueur.

On donnera ſouvent le même nom à l'animal & à la coquille qui le couvre, c'eſt à dire qu'on nommera, par exemple, auſſi bien Moule une certaine coquille que l'animal qui habite cette coquille. Mais cela n'apportera aucune confuſion, étant toûjours très-aiſé de démêler par les choſes qui ſuivent, ſi l'on parle d'une coquille ou d'un animal.

On dira qu'un Coquillage eſt couché ſur le *plat* de ſa coquille, lorſque le plan de la longueur & de la largeur d'une des pieces de la coquille, ſera parallele à l'horizon. Les Fig. 2. & 5. ſont couchées ſur le plat de leur Coquille.

Des Moules de mer.

Les Moules de riviere marchent, ou pour parler plus proprement, ſe traînent ſur le ſable. Feu M. Poupart l'a fait voir dans les Memoires de l'Academie, où il a donné les obſervations qu'il avoit faites ſur le mouvement progreſſif de cet animal. Mais les Moules de mer ſont ſi differentes des Moules de riviere, qu'il eſt beſoin de nouvelles preuves avant de pouvoir aſſurer de celles-ci, ce

qu'on a observé de celles-là. Les Moules de mer même étant attachées aux pierres ou les unes aux autres par differens filamens, il ne semble pas qu'elles doivent avoir aucun mouvement progressif ; cependant elles peuvent se mouvoir ; & si je voulois simplement le prouver, il me suffiroit de rapporter le fait suivant.

Dans le tems qu'il ne fait plus assez chaud pour tirer du sel des marais salans, les Pêcheurs jettent quelquefois dans ces marais des Moules qu'ils ont prises au bord de la mer ; ils prétendent par-là rendre leur chair plus délicate, en les faisant vivre dans une eau moins salée ; car l'eau de pluïe qui tombe dans ces marais, ausquels on ne laisse alors aucune communication avec la mer, rend plus douce l'eau salée qu'ils contiennent en se mêlant avec elle. Je dirai en passant que c'est par le même moyen qu'on rend verte la chair des Huitres. Pline dit aussi que l'espece de Moule appellée *Myas* est meilleure en Automne qu'en toute autre saison, parce qu'une plus grande quantité d'eau douce se mêle dans ce tems-là avec l'eau de mer. L'eau douce qui produit sur les Moules un grand changement dans les marais salans, n'y fait peut-être pas grand chose dans la circonstance de laquelle parle Pline ; mais ce n'est pas ce dont il s'agit pour mon sujet : ce qui le regarde, est que les Pêcheurs jettent les Moules dans ces marais séparées les unes des autres & à diverses distances, & que lorsqu'ils vont les pêcher ensuite, ils les trouvent assemblées à gros paquets. Or il est visible que ces Moules n'ont pû s'approcher les unes des autres pour s'attacher ainsi, sans se mouvoir elles-mêmes, car elles ne sont point dans une eau courante.

Ce fait seul suffiroit donc pour établir leur mouvement progressif, mais il nous faut quelque chose de plus. Nous avons à sçavoir quelle partie elles emploïent à cet usage. Pour s'en instruire, il ne faut qu'ouvrir la coquille d'une Moule par le côté où elle s'entrouvre naturellement ; rien ne paroît alors plus distinctement dans

FIG. 1.

le corps de cet animal, qu'une certaine partie noire ou brune, dont la base est placée à peu près au milieu des autres parties, & dont la pointe est tournée vers le sommet de la coquille : sa longueur est environ de six ou sept lignes. On se fait une image assez ressemblante de sa figure, en concevant celle de la langue d'un animal : elle est marquée dans la Fig. 1. par la lettre *L*. Or c'est cette partie qui est la jambe de la Moule, si des figures si differentes n'empêchent point de donner les mêmes noms à des choses qui servent aux mêmes usages, ou peut-être devroit-on avec plus de ressemblance l'appeller le bras, puisque les Moules se traînent plûtôt par son moyen, qu'elles ne marchent.

Il m'eût été impossible de découvrir que cette partie fait la fonction que je viens de lui attribuer, si je n'eusse consideré des Moules qu'au bord de la mer; on ne les y peut voir que lorsqu'elle les a laissées à découvert pendant son reflux, mais elles paroissent toûjours dans l'inaction. Ce qui m'a donné la facilité d'observer de quelle maniere elles se servent de cette partie, est qu'après avoir fait porter chez moi des Moules aussi-tôt qu'elles avoient été pêchées, je les mettois dans des vases dans lesquels je versois assez d'eau de mer pour les couvrir, mais trop peu pour les dérober à mes regards. Etant alors en quelque façon dans leur élement naturel, elles me laissoient voir une partie des mouvemens qu'elles se donnent dans la mer. Cet expedient est l'expedient general que j'ai employé pour appercevoir tout ce que je rapporterai dans la suite des autres especes de Coquillages.

Je vis donc que quand la Moule se prépare à changer de place, elle commence par entr'ouvrir sa coquille. Il ne lui importe sur quel côté elle soit appuyée *, & peu après que cette coquille est entr'ouverte, on voit paroître sur les bords, la pointe de cette partie que nous avons dit ressembler à une langue; la Moule ne la laisse point là, elle lui donne bien-tôt plus d'étenduë, pour la por-

* *Voyez la Figure 2.*

ter plus loin des bords de sa coquille, elle l'allonge quelquefois jusqu'à un pouce & demi de ces bords, mais souvent moins. Quand elle a ainsi changé sa figure, en augmentant si considerablement sa longueur, elle s'en sert pour tâter à droit ou à gauche, devant & derriere, comme pour examiner le terrain qui l'environne, & découvrir de quel côté il lui sera plus aisé d'avancer. Toutes ces préparations faites, elle semble se déterminer à aller d'un certain côté, du moins voit-on qu'elle replie l'extremité de cette partie qui est charnuë & très-flexible sur quelque corps pour le saisir ou s'y cramponner en quelque façon; de sorte que réduisant alors cette même partie à peu près à son étenduë naturelle, sans lui laisser abandonner le corps sur lequel elle a recourbé sa pointe, elle oblige sa coquille à avancer vers ce corps.

FIG. 2.

Ainsi on voit que la manœuvre dont les Moules se servent dans leur mouvement progressif, ressemble assez à celle d'un homme qui étant couché sur le ventre voudroit s'approcher de quelque endroit en se servant seulement de son bras; il porteroit ce bras sur le corps le plus éloigné qu'il pourroit saisir avec la main, en le racourcissant ensuite, il obligeroit son corps à quitter sa place, comme les Moules quittent la leur. Aussi est-ce sur cette ressemblance que j'ay nommé d'abord cette partie le bras de la Moule, parceque son extremité fait aussi en se recourbant la fonction de main; & toute la difference qui est entre l'usage que l'homme feroit de son bras dans la circonstance précedente, & celui que la Moule fait de cette partie, est qu'elle la racourcit veritablement, au lieu qu'il ne feroit que plier le bras.

Les Moules ne profitent pas souvent de la facilité qu'elles ont à se mouvoir, car elles sont toutes ordinairement attachées les unes aux autres, ou a d'autres corps par differens fils, desquels nous parlerons au long dans un autre Memoire; & ce n'est que lorsque ces fils sont rompus qu'il leur arrive quelquefois de faire usage de cet espece de bras. On voit souvent des Moules détachées au

bord de la mer, aufquelles apparemment il eft de quelque utilité.

Du Lavignon.

Le Coquillage auquel on a donné le nom de Lavignon fur les côtes de Poitou & d'Aunis, eft fans doute une efpece de *Chama* ou *Chame*, puifqu'il a le caractere effentiel à ce genre, qui eft d'être une coquille à deux battans qui reftent toûjours entr'ouverts, c'eft-à-dire que les deux pieces dont leurs coquilles font compofées, ne font jamais appliquées exactement l'une fur l'autre, telles que font celles des Huitres, des Moules, & de diverfes autres efpeces de Coquillages. Auffi peut-on rendre en François le mot *Chama* par *Coquille beante*, comme Gaza l'a traduit en Latin par *Hiatula*.

FIG. 3. 4. 5.

Les Lavignons ont non-feulement ce caractere effentiel au genre des Coquilles beantes, mais ils ont encore cela de commun avec les efpeces dont parle Rondelet, que leur coquille eft mince & très fragile, de maniere qu'on la rompt aifément en la preffant entre deux doigts, qu'ils vivent comme ce même *Chama* dans la bouë; mais ils different en même tems de ces efpeces que Gefner dit être appellées Flammes ou Flamettes en François, & Poivrées en Italien, parcequ'elles font fur la langue le même effet que le poivre, le goût du Lavignon étant très-infipide.

Leur coquille eft affez polie, & blanche fur tout interieurement; car fouvent la plus ancienne partie de la furface exterieure de cette coquille, c'eft-à-dire les endroits voifins de fon fommet, ont une couleur noirâtre qu'ils ont prife de la bouë noire dans laquelle les Lavignons vivent. Ils fe tiennent enfoncez dans cette bouë, quelquefois à plus de cinq à fix pouces de profondeur; mais malgré cela on connoît facilement les endroits où ils font, par de petits trous ronds d'environ une ligne de diametre qui reftent au-deffus des Lavignons. Il y en a un ou deux qui répondent à chacun de ces animaux, qui font fort près

les uns des autres, & en grande quantité dans les endroits où on les trouve.

Quoique leur coquille ſoit naturellement entr'ouverte, elle l'eſt trop peu pour laiſſer voir leurs parties interieures ; mais ſi on l'ouvre beaucoup en coupant les deux muſcles qui ſont à peu près au bout de la longueur de leurs coquilles & qui ſervent à la fermer, on verra auſſitôt la partie qu'ils emploïent à leurs mouvemens progreſſif. On a coupé ces muſcles marquez *MM* au Lavignon repreſenté dans la Fig. 3. Auſſi laiſſe-t'il appercevoir ſon eſpece de jambe marquée *I*, qui paroît placée à peu près au milieu de la coquille, ayant ſon origine vers le ſommet. Toute ſon extremité *I* eſt en ligne droite & trenchante, elle s'arrondit ſeulement vis-à-vis les deux tuyaux charnus marquez *CC*, au lieu que de l'autre côté elle avance un peu, & forme une eſpece de pointe emouſſée marquée *P*. C'eſt-là la ſtructure commune de cette partie ; j'ai cependant vû des Lavignons dont la pointe émouſſée *P* étoit poſée directement de l'autre côté, c'eſt-à dire qu'elle étoit dans l'endroit arrondi qui eſt le plus proche des tuyaux *CC*, & tournée vers ces tuyaux comme elle l'eſt ici vers *P*, mais peut-être étoient-ce des monſtres dans cette eſpece de Coquillage.

Ordinairement les Lavignons emploïent cette partie pour s'enfoncer dans la bouë, & pour ſe rapprocher enſuite de la ſurface de l'eau lorſqu'ils ont envie de quitter leur ancien trou. Comme la bouë les couvre pendant cette derniere action, il n'eſt pas ſi aiſé de décrire comment ils l'exécutent que la premiere que l'on apperçoit diſtinctement ; cependant ce que nous allons dire de la maniere dont ils s'enfoncent dans la vaſe, doit ſuffire pour faire comprendre de quelle maniere ils s'en retirent, puiſqu'ils n'ont pour cela qu'à faire préciſement le contraire de ce qu'ils font dans l'autre operation.

De quelque côté qu'on poſe un Lavignon, pourvû qu'on ne l'appuye pas directement ſur le ſommet de ſa

coquille, il s'enfonce aiſément dans la bouë ; mais on ne voit jamais mieux l'action de ſon eſpece de jambe qu'en le couchant ſur le plat de la coquille. On remarque facilement alors qu'il augmente non-ſeulement la longueur, mais auſſi la largeur de cette partie ; il l'allonge auſſi & la rend pointuë ſur-tout dans l'endroit marqué *P* Fig. 3. dont il ſe ſert d'abord pour s'ouvrir un chemin dans la vaſe : ce chemin ouvert, il inſinuë toute l'extremité de ſa jambe ſous cette vaſe, ce qui lui eſt d'autant plus aiſé que quoiqu'elle ſoit trenchante naturellement, il rend encore alors ſon trenchant plus fin, parce qu'en allongeant & élargiſſant cette partie il l'applatit extrêmement ; tout cela ſe fait ſans ſe déplacer en aucune façon. Le trenchant de cette partie étant ainſi enfoncé, il le recourbe comme on le voit dans la Fig. 4. Or il eſt aiſé de concevoir que ſi alors il racourcit cette partie en lui laiſſant toute ſa largeur, qu'il redreſſe d'abord ſa coquille ſi elle étoit poſée ſur le plat, ou ſi elle étoit ſur ſa baſe, comme dans la Fig. 4. qu'il doit neceſſairement la faire enfoncer dans la bouë, ſi la réſiſtance que la coquille trouve à entrer dedans, eſt moindre que celle que le trenchant recourbé trouve à s'élever, & ſans doute que cette derniere réſiſtance eſt plus grande que l'autre, car la coquille s'enfonce par le moyen que je viens de décrire. Auſſi paroît-il vrai-ſemblable que le bord de cette coquille, qui eſt très-mince, très trenchant, & fait en quelque maniere en coin, trouve moins de difficulté à penetrer dans la bouë que l'extremité de cette partie, qui par ſon recourbement occupe la place d'un aſſez gros corps, n'en rencontre à ſortir de ſa place. C'eſt en réïterant ſouvent le même manege que le Lavignon s'enfonce autant dans la bouë qu'il le veut.

Il remonte apparemment au-deſſus de cette bouë, en faiſant un uſage tout contraire de la même partie dont il ſe ſert pour s'enfoncer dedans ; je veux dire qu'il fait ſortir hors des bords de ſa coquille ſon extremité, & qu'il

qu'il la recourbe ou l'applatit avant de l'avoir allongée autant qu'elle le peut être, ayant eu soin d'ôter la bouë qui pourroit lui résister par-dessus, c'est-à-dire qu'au lieu que le recourbement de cette partie, Fig. 4. embrasse la vase qui est comprise dans l'espace *RCOr*, qui est entre cette partie recourbée & le bord de la coquille: cette même partie, lorsqu'il veut monter, ne trouve aucune bouë dans cet espace *RCOr*, parce qu'avant de prendre la figure que nous lui voyons, il a vuidé cet espace. Il nous est donc aisé de comprendre que si dans cette situation le Lavignon acheve d'allonger son espece de jambe autant qu'elle le peut être, en conservant la largeur qu'a le recourbement, qu'il poussera sa coquille en haut, par la même raison qu'il l'a tirée en-bas auparavant; c'est-à-dire, parceque cette coquille qui est faite en espece de coin, trouvera moins de résistance à ouvrir la bouë, que l'extremité large de cette jambe qui fait la fonction de pied, n'en trouve à descendre.

Le Lavignon peut encore glisser sur la bouë, lorsque sa coquille est couchée sur le plat. Il allonge pour cela la pointe émoussée marquée *P* Fig. 3. & ayant appuyé l'extremité de cette pointe sur la bouë, il l'allonge encore davantage, & fait par conséquent avancer sa coquille, comme un homme qui est dans un batteau le fait avancer en poussant la terre avec une perche. Mais nous aurons lieu de parler de ce mouvement plus au long, à l'occasion de quelques autres especes de Coquillages.

Au reste cet animal lorsqu'il enfonce sa coquille dans la bouë, ne la met pas de maniere que la base de cette coquille soit en-bas. Par le plus ou le moins de recourbement qu'il donne à un des côtez *R* ou *r* de sa jambe, il enfonce plus ou moins une des extremitez de sa coquille, de façon que la base *CO* de cette coquille fait un angle avec l'horizon. On peut le remarquer dans la même Fig. 4. où le bout de la coquille proche de *C* est plus élevé que celui qui est auprès de *O*. Plus même ce Coquillage s'enfonce, plus il éleve le côté *C* par rapport à

l'autre; de ſorte que lorſqu'il eſt enfoncé à quelques pouces de profondeur, la baſe *CO* fait un angle peu moindre qu'un droit avec l'horizon.

Il n'eſt neanmoins pas indifferent lequel des deux bouts de cette coquille ſoit le plus bas, il en eſt un qui doit être toûjours le plus élevé. Pour en connoître la cauſe, il ne faut que ſçavoir que cet eſpece de Coquillage, comme pluſieurs autres eſpeces dont nous traiterons dans la ſuite, ont deux tuyaux charnus poſez près d'un des bouts de la longueur de leur coquille, c'eſt-à-dire fort proche de l'angle curviligne que fait la baſe avec le côté du ſommet. Ces deux tuyaux paroiſſent dans la Fig. 3. marquez par les lettres *Cc*. Or le Lavignon ſe ſert de ces deux tuyaux pour ſe conſerver une communication avec l'eau du milieu de la bouë dans laquelle il eſt enfoncé. Car il les allonge juſqu'à la ſurface de l'eau, à peu près comme ils paroiſſent dans la Fig. 5. & ſouvent beaucoup davantage. On voit aiſément que l'animal, du fond de ſon trou, & quoique couvert par la vaſe, peut profiter de l'eau qui eſt au-deſſus de lui, puiſqu'il ne faut que remarquer que ces deux tuyaux ont chacun deux ouvertures à l'une & l'autre de leurs extremitez. La premiere de ces ouvertures eſt marquée *Cc* Fig. 3. & 5. & la ſeconde eſt *OO* Fig. 3. Auſſi s'en ſervent-ils à reſpirer l'eau, comme nous nous ſervons de nôtre bouche pour donner paſſage à l'air dans nos poûmons. C'eſt ce qui eſt très-ſenſible, lorſqu'on laiſſe peu d'eau au-deſſus de la bouë dans laquelle ils ſont enfoncez, on remarque d'une maniere claire & l'eau qui entre & l'eau qui ſort alternativement par ces deux tuyaux. Il ſont ſouvent en la jettant divers jets. Il m'a paru qu'ils peuvent l'un & l'autre attirer l'eau & la rejetter.

FIG. 5.

Ce ſont ces tuyanx qui ſont les trous ronds que nous avons dit être au-deſſus de chaque Lavignon. Si-tôt que l'animal s'eſt enfoncé dans la vaſe, l'eau applaniſſant aiſément les ſurfaces qui réſiſtent peu, bouche bien vîte le trou qu'il a fait dedans cette vaſe en y entrant ; c'eſt-

pourquoi il allonge ses tuyaux pour conserver deux especes de canaux depuis la surface de l'eau jusqu'à soi, lesquels canaux ont le même diametre que ces tuyaux.

Les Lavignons peuvent non-seulement allonger beaucoup ces tuyaux, & les raccourcir jusqu'à les renfermer entierement dans leurs coquilles, ce qu'ils font toutes les fois qu'on veut les prendre, mais ils les peuvent encore remuer en tout sens. Quelquefois même ils ne se contentent pas de mettre le bord de ces tuyaux de niveau avec la surface superieure de la bouë, ce qui est leur situation la plus ordinaire. Ils les élevent par-dessus cette bouë, où ils les replient sur sa surface, sur laquelle ils tracent par leur moyen differens sillons.

Ces tuyaux charnus dont les Lavignons se servent pour attirer l'eau au milieu de leur coquille & la rejetter ensuite, nous fournissent une occasion de faire une remarque generale sur les especes de Coquillages, qui vivent ordinairement cachez sous le sable ou sous la bouë. C'est que ces Coquillages ont tous un ou deux tuyaux charnus semblables à ceux des Lavignons par leur fonction, quoique souvent differens par leurs figures, qui sont plus ou moins longs selon que ces animaux s'enfoncent plus ou moins dans le sable. La raison en est si claire qu'à peine est-il necessaire de la dire; ils doivent se conserver une communication libre avec l'eau, & pour cela ils doivent empêcher le sable ou la vase de les couvrir entierement. Or ils ne peuvent se menager cette communication, à moins que le bout de ces tuyaux ne puisse aller jusqu'à la surface superieure du terrain dans lequel ils vivent; de sorte que la longueur du tuyau & celle de la coquille jointes ensemble, sont la mesure de la plus grande profondeur à laquelle ils peuvent rester pendant quelque tems. Aussi voyons-nous que les Lavignons qui ont de très-longs tuyaux descendent fort avant dans la vase, & que les Moules & tous les Limaçons de mer, qui n'ont point de pareils tuyaux, restent toûjours sur la surface de la terre.

De la Palourde.

On ne doit pas prendre la Palourde des côtes de Poitou, d'Aunis & de Saintonge pour une espece de genre nommé *Chama peloris*, ainsi que l'a fort bien remarqué Rondelet ; car soit que le nom de *Peloris*, qui paroît avoir quelque ressemblance avec celui de *Palourde*, ait été donné à ce genre, parce que les coquilles qu'il comprend sont plus grandes que les autres especes de Chama ou Coquilles beantes, comme quelques uns le prétendent, soit qu'il lui vienne du nom d'un Promontoire de Sicile appellé *Pelore*, comme d'autres le veulent. Il est certain que la Palourde n'est point une espece de *Chama Peloris*, puisqu'elle n'est pas une coquille beante, elle ferme sa coquille très-exactement. Elle n'est point aussi la Pelorde des côtes de Provence, car elle ne vit point comme elle dans la vase.

Je ne vois aucune figure ni aucune description dans Rondelet qui convienne parfaitement à l'espece de Coquille dont je parle. Car quoiqu'elle convienne avec la coquille épaisse, par l'épaisseur & la solidité de sa coquille, elle en differe parcequ'elle est cannelée sur toute la surface superieure de sa coquille, par de legeres cannelures qui partant des environs du sommet, vont se terminer à la base qu'elles rencontrent à angles plus ou moins aigus, selon qu'elles sont plus proches ou plus éloignées du milieu de cette base.

Voyez Fig. 6.

La Coquille de la Palourde est à deux battans, sa couleur est d'un blanc sale, c'est-à-dire un peu jaunâtre, du moins en quelques endroits de sa surface exterieure, mais sa surface interieure est assez blanche. Leur longueur ordinaire est d'un pouce & demi & quelque chose de plus, & leur largeur d'environ un pouce : elle a bien demi ligne d'épaisseur autour de ses bords.

Ce Coquillage a comme le Lavignon deux tuyaux charnus, mais beaucoup plus courts, quoique plus gros : il ne les étend jamais à plus de trois lignes. Leur ouver-

Voyez CC. Fig. 6.

ſure exterieure a alors un peu plus d'une ligne. Il n'eſt pas aiſé de dire lequel eſt le plus long & le plus gros de ces tuyaux lorſque l'animal eſt en vie; car quoique celui qui eſt le plus proche du ſommet *c* paroiſſe communément le plus petit, & le plus éloigné *C* le plus grand; on voit dans d'autres tems tout le contraire, ſelon qu'il lui plaît d'allonger & de groſſir plus un de ces tuyaux. La diſſection n'eſt pas même bien ſûre pour connoître cette grandeur, car elle change fort leur figure; cependant il paroît que dans cette eſpece, comme dans les Lavignons, le plus long tuyau eſt le plus éloigné du ſommet. Les tuyaux de la Palourde ſont découpez très-finement & comme en frange au bord de leur ouverture exterieure: celle qui eſt interieure, c'eſt-à-dire qui porte l'eau au milieu de la coquille eſt ſimplement ronde, on voit l'ouverture interieure du tuyau le plus éloigné du ſommet marquée *O* Fig. 7. elle cache dans la figure l'ouverture de l'autre tuyau.

La Palourde ne fait pas toûjours paroître ces tuyaux; c'eſt ſeulement lorſqu'elle eſt dans l'eau: ſi-tôt qu'on la touche elle les renferme entierement: quelques courts qu'ils ſoient elle pouſſe ſouvent par leur moyen l'eau à plus d'un demi pied de ſa coquille, & cela en raccourciſſant ou étreciſſant un de ſes tuyaux après l'avoir extrêmement gonflé. Lorſqu'elle les allonge elle fait auſſi ſortir une petite partie de ſa chair par l'ouverture de ſa coquille, ce qu'on peut voir Fig. *6.* où tout ce qui n'eſt pas cannelé dans le contour de cette coquille eſt la chair de la Palourde. Elles ſe tiennent quelquefois ſur la ſurface du ſable; mais elles ſont ſouvent enfoncées dedans autant que la longueur des tuyaux *cC* le peut permettre, ſelon ce que nous avons dit dans l'article précedent.

Pour s'enfoncer dans le ſable, ou pour s'élever au-deſſus, elles employent un manege aſſez ſemblable à celui du Lavignon; auſſi ne nous arrêterons-nous point à l'expliquer. Il ſuffira de faire voir dans la Fig. 7. ouverte parcequ'on a coupé les muſcles qui ſervent à la fermer,

la partie qu'elles employent à cet usage marquée *I*, elle est differente de celle du Lavignon par son extremité qui est plus grande que le reste, au lieu que dans celle du Lavignon cette extremité est plus petite.

Du Sourdon.

Sur les côtes de Poitou & d'Aunis on nomme Sourdon un Coquillage dont la coquille est à deux battans, & beaucoup plus convexe que celles dont nous venons de parler : elle est aussi plus petite, car sa longueur n'est que d'environ 14 lignes, & sa largeur de 9 ou 10 lignes. La surface exterieure de cette coquille est ornée de cannelures assez larges, à côtes arrondies, qui partent toutes du sommet, la plus grande partie desquelles vont en ligne droite à la base, & les autres en se recourbant un peu, ou devenant concaves par rapport au bord de la coquille dont elles sont le plus proche, vont se terminer au-dessus de la base ; mais la surface interieure de cette coquille est presque toute polie, je veux dire qu'elle n'est cannelée que dans une bande d'environ une ligne de large ou un peu plus, qui regne tout autour du bord de la coquille. Il n'est point d'animal plus propre que le Sourdon à faire voir la verité de l'explication que je donnai dans les Memoires de 1709. pag. 392. de la formation des cannelures des coquilles qui paroissent sur leur surface exterieure, pendant que leur surface interieure est polie. Je supposois dans ce Memoire qu'il étoit necessaire, pour former ces cannelures, que tout le contour du corps de l'animal fût naturellement cannelé, & c'est ce que le Sourdon donne souvent la facilité d'observer lorsqu'on le met dans l'eau de la mer, il allonge par-delà tout le bord de sa coquille une partie de son corps, qui paroît cannelée de la même maniere que la coquille qui le couvre ordinairement.

La coquille de cet animal est blanche, sur-tout interieurement, car exterieurement elle est quelquefois d'un blanc sale. Il se tient dans le sable, mais peu enfoncé,

FIG. 8.

auſſi les tuyaux dont le Sourdon ſe ſert pour attirer & jetter l'eau ſont-ils très-courts, car le plus long & le plus gros, qui eſt le plus éloigné du ſommet de la coquille, ne s'étend guere à plus d'une ligne de ſon bord. Ces tuyaux ſont non-ſeulement découpez en frange, comme ceux des Palourdes, autour de leurs ouvertures, mais ils ont encore quelques eſpeces de poils au-deſſous de cette même ouverture; ce qu'on peut remarquer dans le plus gros tuyau *C* de la Fig. 8. où on a repreſenté un Sourdon qui commence à s'enfoncer dans le ſable.

Quoique ces animaux s'enfoncent peu avant dans le ſable, ils en ſont pourtant couverts entierement. On connoît neanmoins non-ſeulement les endroits où ils ſont lorſque la mer a abandonné ce terrain pendant ſon reflux, par les trous qui paroiſſent au-deſſus d'eux, comme au-deſſus des Lavignons, Palourdes & des autres Coquillages à tuyaux, mais beaucoup mieux encore par une infinité de petits jets d'eau qu'on voit paroître ſur tout ce terrain; car malgré le peu de longueur de leurs tuyaux, les Sourdons pouſſent l'eau plus loin qu'aucuns des Coquillages dont nous avons parlé. Ces jets vont quelquefois à plus de deux pieds de diſtance du Sourdon, qui en pouſſe ſouvent de nouveaux.

Il n'eſt guere de Coquillage qui execute ſes mouvemens progreſſifs par le moyen d'une partie qui ait plus de reſſemblance avec celles que nous employons au même uſage. Cette partie molle au reſte comme celles de tous les autres, repreſente aſſez une jambe mal faite avec ſon pied, ou pour dire encore quelque choſe de plus reſſemblant, elle a fort l'air d'un pied-bot. On la peut voir dans la Fig. 9. qui eſt celle d'un Sourdon qu'on a ouvert, en coupant les muſcles qui ſervent à fermer ſa coquille. Elle y eſt marquée par les lettres *PIT*; *I* montre l'endroit qui reſſemble à la jambe; *P* celui qui a l'air d'un pied dont *T* marque le talon. Toute cette partie eſt aſſez groſſe dans l'état où elle eſt repreſentée dans cette Figure.

FIG. 9.

Avec le ſecours de cette partie le Sourdon peut ou s'enfoncer dans le ſable, ou s'en retirer, & lorſqu'il eſt ſur la ſurface de ce même ſable, il peut ou aller en avant ou à reculons. Ce que j'appelle aller en avant, eſt avancer du côté des cornes. La ſtructure de ſon eſpece de jambe eſt très-commode pour toutes ces differentes actions: s'il veut s'enfoncer dans le ſable, il allonge cette partie en diminuant extrêmement ſon épaiſſeur, de ſorte qu'il rend toute ſon extremité *P T* trenchante, Fig. 9. & 10. & l'ayant porté environ à un demi pouce de diſtance du bord de la coquille, rendant en même tems obtus l'angle preſque droit que le pied *P* fait avec la jambe *I* dans la Fig. 9. il ſe ſert de ſon trenchant *P T* pour ouvrir le ſable, dans lequel il fait entrer tout ce pied, & même une partie de la jambe. Il accroche enſuite le ſable inferieur avec le bout du pied, d'où l'on voit que ſi alors il change encore l'angle que ce pied fait avec la jambe, je veux dire que s'il le rend encore un angle droit comme il eſt dans ſon état naturel, ou ce qui eſt la même choſe, s'il raccourcit cette jambe, qu'il obligera ſa coquille d'approcher du bout de ce pied qui ne change point de place, parcequ'il eſt cramponné contre le ſable, & qu'il obligera ainſi la coquille de s'enfoncer.

FIG. 9. & 10.

FIG. 10.

On remarque auſſi ſans doute que le talon de ce pied eſt du côté des tuyaux, ou ce qui revient au même, que le bout du pied regarde le côté oppoſé à celui où ſont ces tuyaux, choſe neceſſaire afin que le bout de la coquille où ils ſont reſte toûjours le plus élevé, qui eſt la poſition que cet animal eſt obligé de prendre lorſqu'il ſe tient dans le ſable.

Si à preſent le Sourdon veut retourner ſur le ſable, on voit bien qu'il n'a qu'à faire ſortir de ſa coquille la même extremité *TP* de ſon pied, & allonger alors tout d'un coup ſa jambe, comme on le voit dans la Fig. 10. car le ſable ſervant de point d'appuy à l'extremité de ce pied, la jambe ne pourra s'allonger ſans faire élever la coquille.

Enfin

Enfin si on conçoit le Sourdon couché sur le plat de sa coquille, il n'est pas plus difficile d'imaginer comment il pourra aller à reculons ou en avant: tout se passera dans ces actions ici à peu près comme dans les actions précedentes, avec cette difference qu'il n'a pas besoin de se servir du trenchant *P T* pour s'ouvrir un chemin. Car, par exemple, pour aller à reculons, il n'a autre chose à faire, qu'après avoir allongé sa jambe, & changé l'angle droit qu'elle fait avec le pied en un angle obtus, qu'à engager la pointe *P* du pied dans le sable, & réduire ce pied & cette jambe à peu près à leur grandeur & leur situation naturelle, sans abandonner le sable. Car il est clair que le sable arrêtant la pointe du pied, qu'elle obligera la coquille d'avancer de ce côté-là, c'est-à-dire que le Sourdon ira à reculons.

Pour aller au contraire en avant, il engagera la même pointe *P* de ce pied dans le sable tout auprés du bord de la coquille; de sorte qu'augmentant tout d'un coup la longueur de cette jambe, dont le pied *P* rencontre un point d'appui, la coquille sera poussée en avant.

Des Tellines.

Je conserve le nom de Tellines aux deux especes de Coquillages dont je vais parler, nom qu'on leur donne sur les côtes de Provence & en Italie, qui est le même en Latin & en Grec, quoiqu'il soit assez incertain si les Coquillages que nous allons examiner, & que les Auteurs modernes ont donné sous le nom de Tellines, sont les mêmes ausquels les Grecs & les Latins donnent ce nom. Ce qui me détermine à m'en servir, est qu'ils n'ont point de nom fixe sur les côtes de Poitou & d'Aunis; quelques-uns les y appellent des Palourdons, mais ils nomment de même divers autres Coquillages; tel est celui qui est couvert de la coquille ridée, quoique ce soient des especes trés differentes; d'autres les appellent des *Lavegnes*, qui est la même chose en langage vulgaire que des petites especes de Lavignons.

Cependant ces deux eſpeces de Coquillages ſont fort differens ; enfin ce ſont ces Coquillages que l'on nomme Flion en Normandie.

FIG. 11. 12. & 13.

Les plus grandes Tellines de la premiere des deux eſpeces que j'ai obſervées ſur les côtes de Poitou & d'Aunis, ont environ 13 à 14 lignes de long, & ſeulement 5 lignes de large : leur coquille eſt ſolide, parce qu'elle eſt aſſez épaiſſe, quoique beaucoup moins que celles des Palourdes, ayant ſes ſurfaces exterieure & interieure trés polies, ce qui lui donne un œil luiſant. Il faut pourtant excepter le bord de ſon contour, qui eſt cannelé ou découpé comme une ſoye trés fine dans la largeur d'environ une demie ligne : on ne voit point quelquefois ces cannelures déliées ſur le contour de la ſurface exterieure. Les deux côtez qui partant du ſommet vont joindre la baſe ſont de grandeur fort inégale, l'un eſt au moins à l'autre comme 3 eſt à 2. La couleur de la ſurface exterieure eſt blanche en quelques endroits, & jaunâtre en d'autres : elle eſt plus blanche interieurement dans les endroits où elle eſt blanche ; mais une partie de cette ſurface interieure, c'eſt la plus proche du ſommet, eſt d'une aſſez belle couleur de pourpre.

FIG. 11. & 12.

FIG. 13.

FIG. 12.

Ces Coquillages ſe tiennent cachez ſous le ſable, où la grandeur de leurs tuyaux qui n'ont pas plus d'une ligne de long & un peu moins d'une ligne de diametre, ne leur permet pas de s'enfoncer avant. Lorſque la mer laiſſe à ſec, dans les grandes marées, le terrain qu'ils habitent, on les trouve ſouvent hors de leur trou, auprès duquel ils ſont couchez ſur le plat de leur coquille, ſoit qu'ils ſortent ainſi pour reſpirer l'air, ou plus probablement ſoit qu'ils veüillent chercher l'eau qui les a abandonné ; auſſi quoi qu'on les trouve ſouvent auprès de leur trou, on les rencontre quelquefois à plus d'un pied de diſtance de ce même trou, & on peut remarquer, par le ſillon qu'ils ont tracé ſur le ſable, le chemin qu'ils ont ſuivi.

Ces Tellines ont une eſpece de pied comme les Sourdons, mais la jambe à laquelle le talon de ce pied

eſt joint eſt très-court. On voit ce pied dans la Fig. 11. Lorſqu'elles veulent s'en ſervir, elles donnent une figure trenchante au côté de ce pied qui eſt le plus éloigné du ſommet, & le rendent concave vers le ſommet ou convexe vers la baſe de la coquille. Il ne reſſemble pas mal alors à certaines lames de coûteaux dont la pointe releve un peu, parceque le trenchant de la lame eſt convexe auprés de cette pointe, laquelle pointe eſt au contraire concave du côté du dos de la lame. La Fig. 12. repreſente cette partie prête à s'ouvrir un chemin dans le ſable.

Il ſeroit inutile de détailler tous les divers mouvemens de ce Coquillage, qui s'éxecutent de maniere peu differente de ceux du Sourdon. Je me contenterai de dire qu'ils font tous les mouvemens communs aux autres Coquillages avec beaucoup d'agilité & de viteſſe; mais auſſi dois-je parler de quelques mouvemens qui leur ſont particuliers, le petit ſaut que je leur ai vû faire quelquefois eſt de ceux-là; voici comme ils l'éxecutent. Ils rendent leur eſpece de pied preſque auſſi long que leur coquille, auſſi ne lui donnent-ils pas alors toute la largeur qu'il a lorſqu'il paroît une lame de coûteau dans la Fig. 12. Ils recourbent extrêmement cette partie ainſi allongée, de façon qu'ils portent ſon bout *P* Fig. 13. très prés du bout de la longueur de la coquille. L'ayant mis dans cette poſition, ils pouſſent le ſable qui eſt du côté de la baſe de la coquille & non celui qui eſt dans la direction de ſa longueur, & cela ſuffit pour redreſſer leur coquille que nous avons conſiderée juſqu'ici couchée ſur le plat: cette coquille redreſſée de façon que ſon ſommet la ſoûtient perpendiculairement ſur le ſable, l'animal débande avec une extrême viteſſe cette partie que nous avons dit être très recourbée, ce qui le pouſſe auſſi très vite en lui faiſant faire une eſpece de petit ſaut, car il s'éleve en avançant. Ce n'eſt pas ſans raiſon qu'il ſe met ainſi ſur le ſommet de ſa coquille, lorſqu'il veut faire ce mouvement qui le chaſſe avec viteſſe; car il eſt clair que c'eſt la poſi-

tion la plus favorable qu'il puiſſe choiſir pour que le ſable réſiſte le moins qu'il eſt poſſible à ſon action, puiſqu'il ne touche qu'une très-petite partie de ſa coquille. Ce que nous avons dit pour expliquer comment la Telline redreſſe ſa coquille pour s'appuier ſur ſon ſommet, ſuffit preſque pour faire comprendre comment étant couchée ſur un côté, elle ſe retourne ſur l'autre; car il eſt évident qu'elle a ſeulement beſoin pour cela de redreſſer ſa coquille ſur ſon ſommet, & alors de continuer à pouſſer un peu le ſable de côté comme elle l'a fait pour la redreſſer; ce dernier effort la renverſera ſur le côté oppoſé à celui où elle étoit couchée.

*FIG. 15. & 14.

L'autre eſpece de Telline dont j'ai à parler reſſemble plus aux Lavignons, par la figure de ſa coquille, qu'aux Tellines de l'eſpece précedente: elle n'eſt point découpée en ſcie ſur ſes bords, les côtez qui viennent du ſommet joindre la baſe ſont à peu près d'égale longueur; ſi elle a plus de ſolidité que celle des Lavignons, elle en a beaucoup moins que celle des autres Tellines, ſa ſurface ſuperieure n'a point cet œil brillant qu'ont les autres Tellines, auſſi ſont-elles beaucoup moins polies; elles ont quelquefois certains termes d'acroiſſement ſi marquez, qu'il ſemble que chaque piece de ſa coquille eſt formée de petits morceaux collez ſur de plus grands. Les lettres *AA* Fig 15. ſont auprès d'un de ces termes d'accroiſſement, leur longueur eſt à peu près de 15 lignes, & leur largeur de 10 ou 11. Cette eſpece de Telline ſe tient comme la précedente peu enfoncée dans le ſable, parceque les tuyaux de l'une & de l'autre ſont de la même longueur.

La partie que ces Coquillages employent à leur divers mouvemens, a auſſi comme celle dont les Sourdons ſe ſervent au même uſage, l'air d'une jambe avec ſon pied; mais ce qui reſſemble au pied eſt plus long que dans les Sourdons, & moins épais. Ce ſeroit tomber dans des repetitions auſſi ennuyeuſes qu'inutiles, que de décrire les differens mouvemens qu'elles ſe donnent, puiſqu'il ſuffit

de marquer que toutes leurs actions sont semblables à celles des Tellines précedentes. Il y a à la verité quelque difference dans la Figure de la partie qui les produit, mais les Fig. 14. & 15. les font assez voir. La 14. représente cette partie telle qu'elle paroît lorsqu'on à ouvert leur coquille en coupant les muscles qui servent à la fermer, & la 15. représente cette partie telle qu'elle devient lorsqu'elle est prête à percer le sable.

De l'œil de Bouc.

Les Grecs ont donné à cette espece de Coquillage le nom de *Lepas*, que Gaza en traduisant l'Histoire des animaux d'Aristote a rendu en Latin par celui de *Patella.* On l'appelle *Berdin* & *Berlin* sur les côtes de Normandie, & c'est sur celles de Poitou & d'Aunis qu'on le nomme *œil de Bouc*, & quelquefois *Jamble.*

La coquille de cet animal est d'une seule piece assez dure ; elle représente une portion de cône dont la section esl une ellipse. Ce n'est pourtant pas une ellipse bien exacte, car cette figure est beaucoup moins ouverte du côté de la tête de l'animal, que de celui qui lui est opposé. Sa surface exterieure a diverses cannelures, qui viennent du sommet du cône à sa base, ou plûtôt à l'ellipse de sa section. La coulenr la plus commune de ces coquilles est grisâtre ; on en voit neanmoins de diverses autres couleurs. FIG. 16.

L'animal qui habite cette coquille n'en est pas entierement couvert : tout ce qui représente la base ou la section du cône, est la chair de l'animal sur laquelle il n'y a jamais de coquille ; de sorte que si l'on renverse le cône en mettant son sommet perpendiculairement à l'horizon, on voit alors les parties du corps de l'œil de Bouc qui ne sont point revêtuës de coquilles. Les lettres *AA AA* &c. Fig. 17. marquent l'endroit où la coquille cesse de le couvrir. On y distingue aussi sa tête *T*, à côté de laquelle sont deux petites cornes *CC* recourbées vers elle. FIG. 17.

On ne peut appercevoir cette base charnuë de l'œil de Bouc, si l'on n'emploïe la force pour la séparer des pierres sur lesquelles elle est attachée d'une maniere ferme & stable, lorsque la mer abandonne ce Coquillage pendant son reflux. Il est representé dans la Fig. 16. tel qu'il paroît alors. Aussi Borelli l'a mis parmi ceux qui restent pendant toute leur vie fixez dans un même endroit. Aristote cependant avoit pris soin d'avertir qu'il se détachoit des pierres pour aller chercher la nourriture qui lui est convenable.

C'est à la verité ce qui n'est pas aisé de remarquer au bord de la mer, car lorsque les œil-de Bouc restent à sec pendant le reflux, ils changent aussi peu de place que les pierres ausquelles ils sont attachez, & lorsque la mer est haute il n'est pas possible de les observer. Il y a pourtant un mouvement qu'on leur voit faire de basse mer, mais qui ne leur fait point changer de place : tout ce mouvement se réduit à élever leur coquille à une ligne ou une ligne & demie de distance de la pierre sur laquelle leur base est appliquée, mais ils la rabaissent avec une grande vitesse aussi tôt qu'on les touche. Quoique je n'aye jamais pû appercevoir les œil-de-Bouc se donner d'autres mouvemens au bord de la mer, ceux que j'ai gardé en vie chez moi, m'ont fait connoître qu'ils ont un mouvement progressif, & comment ils l'executent; c'est par le moyen de la grosse partie charnuë qui est au milieu de l'ouverture de la coquille, ou qui fait la base de l'animal : elle est marquée *P* Fig. 17. sa substance est beaucoup plus solide que celle des autres parties, & son volume égale celui de toutes les autres prises ensemble. C'est aussi une remarque que tout ce que nous avons vû jusques ici sur les Coquillages, nous donne lieu de faire sçavoir que la partie qu'ils emploïent à leurs mouvemens progressif, a presque autant de chair elle seule que tout le reste du corps de l'animal.

Les œil-de-Bouc se servent de cette partie pour se mouvoir, comme nos Limaçons terrestres emploïent au même

uſage leur empatement; auſſi le mouvement progreſſif de ceux-ci n'eſt pas plus vîte que celui de ceux-là.

De differentes eſpeces de Coquillages compriſes en Latin ſous les noms de Turbo, Trochus, Buccinum, *&c.*

Toutes les differentes eſpeces de Coquillages que je renferme dans cet article, ſont revêtuës d'une coquille d'une ſeule piece tournée en ſpirale, comme celle de nos Limaçons terreſtres, quoique plus ou moins allongée; auſſi peut-on les appeller avec raiſon des eſpeces de Limaçons de mer. Leur mouvement progreſſif s'execute comme celui des Limaçons, par le moyen d'une groſſe partie muſculeuſe à laquelle on donne le nom d'empatement dans les Limaçons. Il ſuffit pour faire remarquer cette reſſemblance de faire voir dans la Fig. 18. la partie qu'une petite eſpece de Buccinum emploïe à cet uſage. Elle eſt marquée cette partie par la lettre *E*, & toutes les autres eſpeces de Coquilles tournées en ſpirales ont une partie ſemblable à peu de choſe près à celle-ci, & deſtinée aux mêmes actions.

On ne voit cette partie que lorſqu'ils veulent ſe mouvoir, dans les autres tems elle eſt entierement retirée dans leur coquille, elle ſert même à les y renfermer, & cela par le moyen d'un petit couvercle qui eſt attaché à ſon bout. Ce couvercle eſt donné à toutes ces eſpeces de Coquillages, afin qu'elles puiſſent être cloſes de tous côtez comme les coquilles à deux battans. Il eſt d'une matiere dure, quoiqu'elle le ſoit moins que celle de la coquille. Il eſt aiſé de comprendre comment ces animaux bouchent avec ce couvercle, comme avec une eſpece de porte, l'ouverture de leur coquille. Il ne faut que ſçavoir que ce couvercle eſt attaché à la ſurface ſuperieure du bout de leur empatement, c'eſt-à-dire à la partie de cet empatement, qui étant allongée ſe trouve la plus proche du ſommet de la coquille. Car on imaginera ſans peine, que lorſque ces Coquillages retireront à eux leur empatement, en le pliant de façon que ſa partie inferieure, ou

celle qui étoit appliquée ſur la terre, ſoit ramenée ſur leur tête ; on imaginera, dis-je, ſans peine que ce couvercle bouchera alors l'ouverture de ſa coquille, puiſque la ſurface de l'empatement ſur laquelle il eſt collé ſe trouve par là la plus proche de cette ouverture ; & c'eſt ce que la Fig. 18. fait voir dans un coup d'œil. Car on y peut remarquer le couvercle *C*, & l'on ſçait que lorſque l'animal fait rentrer ſon empatement dans la coquille, il poſe la ſurface *P* ſur ſa tête. Il eſt donc ſeulement neceſſaire que la figure de ce couvercle ſoit la même que celle de l'ouverture de la coquille.

Une petite eſpece de Limaçon terreſtre dont j'ai parlé dans les Memoires de cette année, bouche auſſi ſa coquille par le même artifice.

Du Bernard l'Hermite.

FIG. 19. & 20.

Le Bernard l'Hermite eſt un animal de mer aſſez connu; pluſieurs Auteurs en ont parlé depuis Ariſtote qui l'a décrit avec ſoin ſous le nom de *Cancellus*. Ainſi on ſçait de reſte que n'ayant naturellement ni coquille, ni écaille, ni matiere cruſtacée ſur la plus grande partie de ſon corps, il le couvre en ſe logeant dans les coquilles que d'autres animaux ont formées. Il habite aſſez indifferemment des coquilles d'eſpeces très-differentes, mais pourtant tournées en ſpirales : telles ſont celles des Buccinum, des Turbines, des Natices, &c. Il ſe retire quelquefois ſi avant dans ſa coquille, qu'on la prendroit pour une coquille vuide : mais lorſqu'il veut changer de place, il vient auprés de ſon ouverture, & allongeant alors deux groſſes pates ſemblables à celles des Ecreviſſes, des Homars & des Chancres, il les cramponne ſur quelque pierre ou ſur le ſable ; de ſorte qu'en les repliant enſuite, il oblige la coquille dans laquelle il eſt logé d'avancer vers l'endroit qu'il tient ſaiſi.

Ariſtote en diſtingue deux eſpeces, dont celle qui habite les Nerites eſt plus courte que celle qui habite les

Turbines,

Turbines, & a la pate droite beaucoup plus petite que la gauche.

Rondelet ne convient pas que cette derniere circonstance mette une difference entre ces deux eſpeces, c'eſt en quoi il me paroît avoir raiſon; car le Bernard l'Hermite qu'on voit repréſenté dans la Fig. 20. dépoüillé de ſa coquille, n'étoit point dans une Nerite, mais dans une coquille de l'eſpece de celle qu'on voit Fig. 18. cependant il a auſſi la pate gauche plus groſſe que la droite. Rondelet prétend donc que cela eſt commun à tous les Bernards l'Hermites, dont il donne une raiſon très-probable, qui eſt que la pate droite étant plus éloignée du bout de l'ouverture de la coquille que la pate gauche, elle ſe trouve plus preſſée, ce qui empêche qu'elle ne profite autant que l'autre de la nourriture que prend l'animal. Il n'eſt que dommage qu'une raiſon ſi ingenieuſe n'explique pas un fait certain; car quoique Rondelet n'ait point vû de Bernard l'Hermite qui eût la pate gauche plus groſſe que la droite, il y en a certainement beaucoup qui l'ont telle. Celui qui a été repreſenté dans la Fig. 19. étoit un de ceux-là, les pates droites & gauches ſont marquées par les lettres *D* & *G*. Au reſte il ne paroîtra pas ſurprenant que le côté droit profite autant que le gauche, quoique la coquille ſoit plus large auprès de ce dernier côté, lorſqu'on ſçaura que les Bernards l'Hermites ſont très à leurs aiſes dans ces coquilles, & qu'elles ne les preſſent que ſous leur ventre qui s'entortille autour de la rampe de ces coquilles.

Dans la Fig 19. la pate droite eſt plus groſſe que la gauche.

On pourroît auſſi ajoûter à la deſcription qu'Ariſtote à donnée de cet animal, qu'outre les deux groſſes pates à ſerres dont nous venons de parler & les quatre autres jambes, ce qui fait en tout ſix jambes, cet animal a par-delà ſa poitrine de chaque côté trois petits corps longs qui égalent le tiers de chaque jambe, leur molleſſe empêche effectivement qu'on ne les puiſſe prendre pour des jambes, mais je crois qu'ils ſervent à attacher cet animal autour de la rampe de la coquille, Ces petits corps ſont

III Fig. 20. la partie *AO* eſt cette partie du corps de l'animal qui n'eſt couverte que par une peau très mince, le reſte a une eſpece d'écaille plus molle que celle des Ecreviſſes, ou ſemblable à la leur lorſqu'elle commence à prendre quelque conſiſtance.

Des eſpeces d'Orties de mer, qui paroiſſent toûjours attachées aux pierres.

Toutes les eſpeces d'Orties ont été diſtribuées ſous deux genres par Ariſtote dans ſon Hiſtoire des Animaux Livre 5. Chapitre 16. dont l'un comprend celles qui reſtent pendant toute leur vie fixées en un même endroit comme des plantes, & l'autre contient au contraire toutes les eſpeces d'Orties qui changent de place, & qui aiment les rivages & les lieux unis. Diſtribution de l'exactitude de laquelle les obſervations que j'ai faites me donnent plus que lieu de douter, puiſque je n'ay point trouvé d'eſpeces d'Orties, même parmi celles qui ſe tiennent dans les trous des pierres, qui ne fuſſent capables de quelque mouvement progreſſif. A la verité la plûpart de celles que l'on voit attachées ſur les pierres ſe meuvent avec une telle lenteur, qu'en ſe rapportant aux apparences, on a eu beaucoup de raiſon de les regarder comme immobiles; & je les euſſe priſes ſans doute pour telles, ſi je ne les euſſe examinées qu'au bord de la mer, leur mouvement progreſſif étant auſſi lent que celui d'une aiguille d'horloge, car à peine parcourent-elles un pouce ou deux dans une heure; de ſorte qu'on ne peut appercevoir ce mouvement que comme on apperçoit celui de ces aiguilles, en remarquant l'endroit où la partie de l'Ortie la plus allongée eſt à une certaine heure, & celui où cette même partie ſe trouve à l'heure ſuivante.

Je ne ſçai ſi on a eu plus de raiſon de leur donner le nom d'Orties, qui leur eſt commun avec une plante terreſtre très-connuë, parce qu'on a prétendu qu'elles excitoient, comme cette plante, une demangeaiſon cuiſante dans les parties qui les avoient touchées; du moins

ſçai-je que toutes les eſpeces d'Orties qui viennent ſur les côtes de Poitou & d'Aunis ne produiſent point un pareil effet. Quelques vilains que ſoient les noms qu'on leur a donnez ſur ces côtes & ſur celles de Normandie, ils me ſemblent mieux fondez, puiſqu'ils retracent une image de la figure que ces Orties font paroître en un grand nombre de circonſtances. On les appelle dans les premiers endroits Culs de Chevaux,& dans les autres Culs d'Anes. La partie marquée *A* Fig. 21. 22. 23. en fait voir la raiſon.

Pline n'a pû ſe réſoudre à les mettre parmi les animaux, il les a fait après Ariſtote d'une eſpece de nature moyenne entre celles des plantes & des animaux, quoique par des raiſons differentes; car une des plus grandes reſſemblances qu'Ariſtote trouvât entre les Orties & les plantes, c'eſt que les Orties ne lui ont paru avoir aucun conduit pour donner ſortie à leurs excremens, au lieu que Pline dit qu'elles les jettent par un tuyau délié : ce tuyau pourroit bien être une des cornes de l'Ortie; mais ce que jettent ces cornes, deſquelles nous parlerons dans la ſuite, n'a point du tout l'air d'un excrement, puiſque c'eſt une eau très-claire. Quoiqu'il en ſoit, ſi nous nous en tenons aux idées communes, nous devons regarder les Orties comme de veritables animaux; car, ſelon ces idées, peut-on refuſer le nom d'animal à des corps ſi bien organiſez, qui donnent non-ſeulement des marques de ſentiment lorſqu'on les touche, mais qui attrapent des poiſſons & des coquillages & qui les mangent, enfin qui ont un mouvement progreſſif, comme Ariſtote & Pline l'ont reconnu, de diverſes eſpeces?

Ces Orties prennent ſucceſſivement tant de figures & ſi differentes, qu'il n'eſt guere poſſible de les décrire ſous une figure déterminée. Les plus remarquables cependant de ces figures, & du mêlange deſquelles toutes les autres ſont en quelque façon formées, peuvent ſe réduire à celles que l'on voit dans les Figures 21. 22. 23. 24. & 25. on peut dire en general que la figure exterieure du

corps de l'Ortie approche de celle d'un cône tronqué,dont la baſe eſt appliquée ſur les pierres, auſquelles on la trouve toûjours adherente : mais la baſe de ce cône qui paroît ſouvent circulaire, eſt tantôt elliptique, tantôt de quelque figure irreguliere; quelquefois ce cône eſt perpendiculaire à ſa baſe, quelquefois oblique : ſa hauteur change à proportion que la baſe s'agrandit ou diminuë; je veux dire, que quand la baſe devient plus grande, la hauteur devient plus petite, & qu'il eſt plus élevé lorſque la baſe eſt plus étroite en tout ſens.

La ſurface ſuperieure de l'Ortie, ou celle qui eſt oppoſée à ſa baſe, n'eſt pas auſſi plane que devroit l'être celle d'un cône tronqué, elle eſt ordinairement convexe. Au milieu de cette ſurface eſt une ouverture tantôt plus grande, tantôt plus petite, ſelon qu'il plaît à l'Ortie de l'augmenter ou de la diminuer. Mais pour nous faire une image plus reſſemblante de l'Ortie, & des parties interieures qu'elle laiſſe voir lorſqu'elle agrandit l'ouverture dont nous venons de parler, repreſentons-nous ſon exterieur, que nous avons conſideré juſqu'ici comme un cône tronqué, ſous la figure d'une de ces bourſes dans leſquelles les joüeurs mettent les jettons; auſſi l'exterieur de l'Ortie leur reſſemble-t-il fort, avec cependant cette difference, que ſon ouverture qui repreſente celle de la bourſe ſe ferme, ſans que le reſte de l'envelope de l'Ortie ſe pliſſe de haut en-bas, comme les bourſes auſquelles nous les comparons. Au milieu de cette eſpece de bourſe eſt placé le corps ou l'interieur de l'Ortie, qui ordinairement approche aſſez de la figure conique; il eſt attaché aux parois interieurs de cette envelope ou bourſe juſques un peu au-deſſus de la moitié de ſa hauteur, le reſte ne leur eſt point adherent; & ces parois ſont plus ou moins éloignez de cette partie du corps qui ne leur eſt point attachée, ſelon que l'ouverture ſuperieure eſt plus ou moins grande. Auſſi lorſque cette ouverture eſt preſque fermée, comme dans la Fig. 21. on voit très-peu de l'interieur de l'Ortie : ſi elle l'élargit davantage,

comme dans la Fig. 22. on apperçoit distinctement la partie exterieure *A*, & quelques unes des cornes *CCC*, & enfin si elle augmente encore cette ouverture, presque toutes ses cornes paroissent: elles sont semblables par leur figure à celles des Limaçons, mais par leur fonction elles ressemblent peut-être davantage à celles des Coquillages, puisqu'il arrive souvent que l'Ortie pousse des jets d'eau très-fins par leur extremité lorsqu'on la touche. Ces cornes sont attachées aux parois interieures de la bourse, ou envelopés tout auprès de son ouverture: elles sont disposées en trois rangs differens placez les uns sur les autres, qui tous ensemble en contiennent environ 150.

Si l'Ortie non contente d'avoir aggrandi extrêmement l'ouverture *A*, replie le contour de cette bourse sur elle-même, comme on retourne un bas, ou rend exterieure une partie de sa surface interieure, elle montre alors toutes ses cornes étenduës, ce qui forme une figure assez singuliere, & qui ne represente pas mal une fleur épanoüie. L'Ortie qu'on voit dans la Fig. 22. a pris cette figure, toutes ses cornes paroissent étenduës. On voit aussi lorsque l'Ortie a pris cette figure une espece de petit anneau qui est très-près du bord de la surface interieure de cette membrane, lequel est composé d'un grand nombre de demi-boules d'une très-belle couleur bleuë: trois de ces demi-boules sont marquées *OOO* dans la même Fig. 22.

La varieté qui est entre la couleur des Orties de differentes especes, ou entre celles de la même espece, égale presque la varieté qui est entre les figures qu'une même Ortie prend successivement: les unes sont verdâtres, les autres blanchâtres, d'autres couleur de rose, quelques autres de diverses sortes de couleurs brunes. Dans quelques Orties ces couleurs paroissent partout sur leur surface, dans d'autres elles sont mêlées par rayes ou par taches; quelquefois ces taches sont distribuées regulierement, quelquefois irregulierement, mais toûjours d'une

maniere très-agreable. La plûpart des vertes, telles que celles de l'espece representée Fig. 22. & 23. ont une bande bleuë tout autour de leur base d'une ligne de largeur; cette base est *BB* Fig. 22. 23. & 24. la difference de ces couleurs ne peut point établir entre ces sortes d'Orties une varieté d'espece, il seroit plus sûr de les distinguer par la tissure differente de leur chair. Les Orties representées dans les Figures 22. & 23. qui sont de même espece, sont par exemple differentes de celle de la Fig. 21. parceque quoiqu'elles prennent souvent la même forme de celle qui y est representée, elles n'ont jamais une chair si dure, ou ce qui fait encore une difference plus remarquable, la chair de la surface exterieure de la Fig. 21. paroit chagrinée, au lieu que celles des autres n'est jamais telle. Il n'est pas necessaire de dire que cette chair exterieure n'est point couverte de coquille, ou de quelque substance semblable.

Quelque lent que soit le mouvement progressif de ces animaux, il dépend neanmoins d'une méchanique remarquable. Pour la connoître, cette méchanique, il suffit de sçavoir ce que des yeux mediocrement attentifs découvrent de la structure de l'Ortie, ce qu'il nous sera aisé d'expliquer, si nous continuons de concevoir sa figure semblable à celle des bourses dans lesquelles on met les jettons, le fond de ces bourses est plat & rond, & represente la base de l'Ortie, qui est appliquée sur les pierres ausquelles elle est adherente, & le corps de la bourse est, comme nous l'avons déja dit, l'envelope dans laquelle toutes les parties de l'Ortie sont renfermées, mais de maniere qu'elles ne remplissent jamais cette envelope que quand l'Ortie ferme entierement son ouverture. Or toute cette bourse qui contient l'Ortie est une partie veritablement musculeuse, ou plûtôt un assemblage de muscles droits & circulaires ausquels je ne donnerai que le nom de canaux, parcequ'ils paroissent veritablement tels lorsqu'on les découvre. La base de ces Orties *BBB* Fig. 21. 22. 23. ne paroît pas, parcequ'elles

ſont poſées ſur cette baſe ; mais on la peut voir dans la Fig. 24. qui repreſente une Ortie renverſée. Cette baſe eſt compoſée de divers canaux poſez les uns auprès des autres, qui partant du centre vont aboutir à la circonference. Si je leur donne le nom de canaux, c'eſt parcequ'on les voit ſouvent remplis d'une liqueur aqueuſe, ce qui eſt très-ſenſible, car on la fait ſortir en perçant ce canal. On obſerve auſſi ſur cette même baſe divers canaux circulaires qui ont tous pour centre commun le centre de la baſe. Ces canaux ne paroiſſent pas dans la Fig. 24. on y voit ſeulement ceux qui comme les rayons d'un cercle vont du centre à la circonference. Le corps de la bourſe ou la ſurface conique eſt auſſi compoſée d'un plan de canaux circulaires, qui ſont tous paralleles à la baſe & trés proches les uns des autres. Sous ce plan de canaux circulaires eſt un autre plan qui ne contient que des canaux droits, chacun deſquels à ſon origine à la baſe, & ſe termine au cercle de la ſection, où chacun va du fond de la bourſe en ligne droite à ſon contour ſuperieur. Mais ce qu'il eſt eſſentiel de remarquer, eſt que l'on ne voit jamais les canaux circulaires & les droits en même tems dans un même endroit, ſoit que le gonflement des uns entraîne l'affaiſſement des autres, ou ſimplement que lorſque les ſuperieurs ſont gonflez, ils cachent les inferieurs ; de ſorte que ſi l'on voit les canaux droits dans toute leur longueur, comme ils paroiſſent Fig. 23. dans l'eſpace *AIIFBD*, on ne voit alors aucun des canaux circulaires ; & dans les endroits où l'on voit les canaux circulaires, ou une portion de ces canaux, on ne voit point de canaux droits comme on peut l'appercevoir dans l'eſpace *ACIFRA*. Enfin les canaux droits paroiſſent en partie dans les endroits où il n'y a qu'une partie des canaux circulaires enflez, on peut le remarquer dans l'eſpace *IFTO*, où les canaux droits ſont ſenſibles, & où tous les canaux circulaires ne ſont pas gonflez, comme dans l'eſpace *COTR*. Au reſte ces canaux ne ſont pas moins viſibles dans l'Ortie, qu'ils le ſont dans

cette Figure, du moins dans les eſpeces qui ne ſont pas chagrinées comme celle de la Fig. 21. mais ils paroiſſent enflez ou affaiſſez avec une varieté prodigieuſe, qu'un grand nombre de deſſeins auroit à peine ſuffi à repreſenter, & entre leſquels nous avons choiſi la Fig. 23. parce-qu'elle eſt la plus propre à expliquer ce que nous avons à dire dans la ſuite. Quelquefois on voit ſeulement des canaux droits dans toute l'étenduë de cette ſurface ſuperieure, au lieu qu'on en a repreſenté ici de circulaires; dans d'autres tems on n'apperçoit que des canaux circulaires. Enfin quelquefois on voit certaines bandes de canaux circulaires tout autour du corps de l'Ortie, qui laiſſent voir au-deſſus & au-deſſous d'elles des portions de ces canaux droits. Tous ces changemens qui arrivent aux canaux droits & circulaires du corps de la bourſe, ou de la ſurface conique ne lui ſont pas particuliers, les canaux droits & circulaires de la baſe ſont ſujets à ces mêmes changemens. Il ſemble qu'il ne dépend que de l'Ortie de rendre leſquels elle veut de ces canaux ſenſibles, en gonflant les uns & les autres dans toute leur étenduë, ou dans une partie ſelon qu'elle le trouve plus convenable: mais ce qui eſt très-certain, eſt que ces canaux ne paroiſſent jamais que lorſqu'ils ſont remplis par une humeur aqueuſe trés-claire, qu'on en fait ſortir aiſément en leur faiſant une ouverture avec la pointe d'une épingle.

Il n'eſt pas aiſé de ſçavoir comment les Orties rempliſſent & vuident ces canaux à leur gré; on pourroit peut-être ſoupçonner avec fondement que les trois rangs de cornes qui ſont attachées au haut du contour de la bourſe Fig. 22. ſont des reſervoirs qui contiennent la liqueur aqueuſe que l'Ortie emploïe à gonfler ces canaux; car ces cornes ſont remplies d'une ſemblable liqueur, de ſorte que les cornes ſont pleines ou vuides, ſelon que les tuyaux qui correſpondent à chacune d'elles ſont vuides ou pleins, étant aiſé peut-être à l'Ortie de faire paſſer cette liqueur des cornes dans les canaux, & des canaux

dans

dans les cornes. Mais ceci ne me paroît qu'une ſimple conjecture ; ce que je ſçai de certain du gonflement & de l'affaiſſement de ces canaux, c'eſt qu'ils cauſent non-ſeulement tous les divers changemens que l'on apperçoit dans la figure de l'Ortie, mais auſſi ſon mouvement progreſſif.

Pour nous arrêter ſeulement à cette derniere action qui ſuffira pour nous donner une idée des autres, concevons d'abord une Ortie poſée ſur une bâſe circulaire, & dont le corps n'eſt pas plus incliné ſur un côté de cette bâſe que ſur les autres. Telles ſont celles des Fig. 21. & 22 & telle étoit celle de la Fig. 23. lorſque la partie de la bâſe qui eſt actuellement allongée vers *D* étoit poſée en *E* & plus arondie, & celle qui eſt en *R* étoit en *S*. Pour comprendre comment cette Ortie s'éloignera de *S* en *R* & viendra de *E* en *D*, ſuppoſant qu'elle s'eſt déterminée à avancer vers *D*, il faut remarquer que les canaux droits s'allongent en ſe gonflant, ce qui leur eſt commun avec la plûpart des tuyaux mous & à reſſort ; de ſorte que ſi l'Ortie gonfle tous les canaux droits compris dans ſa ſurface *AEBFII*, & qu'elle gonfle encore plus que les autres ceux qui ſont tournez vers *E*, il eſt clair que par ce gonflement le canal qui étoit en *E* devenu plus long, doit ſe trouver poſé vers *D*, ſi l'on imagine qu'en même tems l'Ortie enfle auſſi, c'eſt-à-dire allonge cette partie des canaux droits de ſa bâſe qui ſont tournez vers *E* ; car ſi les canaux droits de la bâſe conſervoient leur premiere longueur, cet allongement des canaux de la ſurface conique ne ſerviroit ou qu'à faire paroître l'Ortie plus haute de ce côté-là, ce qui arrive quelquefois, ou qu'à lui faire une eſpece de boſſe, comme on le voit dans d'autres tems. Il eſt donc clair que l'Ortie en gonflant tous les canaux droits ſoit de ſa bâſe, ſoit de ſa ſurface conique, qui ſont tournez vers le côté où elle veut avancer, approche le bord de ſa bâſe de cet endroit, qu'elle a fait avancer de *E* en *D* Fig. 23. Mais voyons ce qui ſe paſſe du côté oppoſé à celui-ci, je veux dire du côté

dont l'Ortie s'éloigne. Il eſt viſible que pour éloigner ſa bâſe de *S*, & la poſer en *R*, il faut concevoir une manœuvre oppoſée à celle qui ſe fait de l'autre côté, que les canaux droits, qui partans du centre de la bâſe alloient en *S*, ſont racourcis & plus affaiſſez qu'ils n'étoient auparavant, & que l'Ortie remplît tous les canaux circulaires qui ſont ſur la ſurface conique tournée vers *S*; d'où il arrive que l'Ortie ſe racourcit de ce côté-là, & que ce qui étoit poſé en *S* eſt contraint de venir en *R*, & cela ſuffit pour éloigner l'Ortie de *S* dans le tems qu'elle s'approche de *D*. Mais il y a encore une choſe qu'il eſt neceſſaire de remarquer, & de laquelle dépend la continuation de ce mouvement; c'eſt que l'Ortie raccourciſſant les canaux droits de la bâſe qui alloient vers *S* beaucoup plus que le autres, & gonflant fort les canaux circulaires, oblige une partie de la ſurface du cône de ſe replier ſous la bâſe vers laquelle elle eſt tirée, tant par le grand raccourciſſement des canaux droits qui ſont poſez vers *S*, que par le gonflement des circulaires de la ſurface conique, qui preſſants les droits qui ſont ſous eux les font replier; de ſorte qu'une partie de cette ſurface conique ſe trouve recourbée ſous l'Ortie de la bâſe de laquelle elle fait en quelque façon partie, comme on le voit en *R*, par lequel moyen l'Ortie eſt un peu approchée dans cet endroit. Ainſi il eſt viſible que la même force qui ſuffiroit pour faire avancer l'Ortie vers *D*, en la pouſſant de ce côté-là, ſeroit trop foible pour la faire avancer vers *R*; & par conſéquent ſi l'Ortie tenant toûjours gonflez les canaux circulaires de la ſurface conique qui eſt vers *R*, affaiſſe un peu les canaux droits de ſa bâſe qui ſont vers *D*, en rempliſſant en même tems ceux qui ſont du côté de *R*; il eſt clair que ces canaux de la bâſe, qui par le recourbement qui eſt en *R* trouveront de la réſiſtance à s'étendre de ce côté-là, pourront s'étendre au contraire commodément du côté de *D*, vers lequel les canaux qui ſe raccourciſſent en même tems que ceux qui s'allongent leur per-

mettront de s'approcher ; ainsi l'Ortie a donc fait un pas & est en état d'en faire un second, puisque les canaux droits de la bâse du côté vers lequel elle avançoit ne sont plus gonflez : car il lui sera aisé sans changer de place de remplir à peu près également de tous côtez tant les canaux droits que les circulaires, parce qu'elle ne fera aucun changement à ceux de sa bâse ; de sorte qu'elle prendra une figure approchante de celles que l'on voit Fig. 21. & 22. où elle étoit avant de commencer à se mouvoir, & par conséquent elle sera en état de repeter le même manege, & de continuer à avancer vers le même côté.

C'est par le moyen de ce gonflement & de cet affaissement des canaux tant droits que circulaires, que les Orties changent leur figure exterieure en tant de façons; mais quelque chose qu'elles fassent, leur manœuvre est toûjours très-lente, & se fait d'une maniere presque insensible lorsqu'on les regarde continuellement.

J'ai vû quelques Orties se servir de leurs cornes pour marcher : ces Orties étoient de celles qui vivent dans les trous des pierres ; elles ont du moins certaines especes, les cornes un peu plus longues que les autres proportionnellement à leur grosseur : mais lorsqu'elles se traînoient par le moyen de ces cornes, la position de leur figure étoit renversée, c'est-à-dire que leur bâse étoit en haut & leurs cornes embas, comme on le voit dans la Fig. 24. Ces sortes d'Orties ont les cornes extrêmement gluantes & mêmes rudes au toucher, ainsi elles peuvent se tirer en avant par leur moyen avec facilité.

Il est assez surprenant qu'un animal moû comme l'est celui-ci, qui n'a point de patte ni rien d'équivalent, puisse manger d'autres animaux très-bien défendus ce semble par leurs coquilles, tels que sont les Moules ou d'autres Coquillages à deux battans, & les diverses especes de Limaçons de mer, car il faut ouvrir les coquilles à deux battans, & trouver moyen d'ôter le couvercle de ces Limaçons. Néanmoins il est certain que le Orties se nourrissent de la chair de ces animaux, mais il ne pa-

roît pas aiſé de découvrir de quelle adreſſe elles ſe ſervent pour la tirer des coquilles, & cela parce qu'elles font entrer ces Coquillages tous entiers par leur bouche, ou plûtôt par l'ouverture marquée *A* Fig. 21. 22. & 23. qu'elles élargiſſent extrêmement, & peu moins que celle du contour de la bourſe à laquelle les cornes ſont attachées. Ayant ainſi fait entrer ces Coquillages tous entiers dans leur corps par cette ouverture, elles la reſſerrent de maniere qu'il ne paroît pas qu'elles contiennent un ſi gros corps au milieu du leur. C'eſt alors qu'elles ſuccent ces Coquillages à leur aiſe; mais comme les yeux ne peuvent appercevoir ce qui ſe paſſe dans l'interieur de l'Ortie, on ne peut auſſi découvrir quelle adreſſe elles emploïent pour cela : tout ce qu'on voit eſt qu'elles font ſortir les coquilles vuides par la même ouverture par laquelle elles les avoient fait entrer pleines. J'ai vû quelquefois des Orties d'une grandeur médiocre jetter ainſi des coquilles des plus groſſes Moules vuides; mais j'en ai vû d'autres qui en rejettoient ſans avoir mangé l'animal qui les habite, peut-être parce qu'elles avoient été trop difficiles à ouvrir. J'en ai rencontré de même qui étoient obligées de faire ſortir de cette ouverture des buccinum entiers : ce qui m'a paru ſingulier eſt une de ces Orties, qui faiſoit paſſer une groſſe Moule qu'elle n'avoit pû manger au travers de ſa bâſe, qui, comme on ſçait, n'a aucune ouverture; de ſorte qu'elle étoit contrainte pour s'en délivrer de ſe faire une très-grande playe, & cela apparemment parce que cette Moule trop groſſe pour l'ouverture qui lui avoit donné entrée dans le corps de l'animal, n'avoit paſſé par cette ouverture qu'avec beaucoup de force, & parce qu'elle s'étoit trouvée heureuſement placée, & que quand l'Ortie l'aura voulu faire ſortir, après avoir tenté inutilement de la manger, elle ne ſe ſera pas preſentée dans la même poſition à cette ouverture; de ſorte que les efforts qu'elle aura emploïé pour la chaſſer, auront ſuffi pour que la bâſe de la coquille de la Moule ait percé celle de l'Ortie.

Au reste pour faire sortir ces coquilles du milieu de sa bouche, sur-tout lorsqu'elles sont un peu grosses, l'Ortie ne se contente pas de l'élargir extrêmement, elle retourne cette bouche comme on retourne un bas, & cela après avoir auparavant retourné de même tout le bord du contour auquel sont attachées les cornes, c'est à dire que la surface interieure de ce contour devient exterieure, après que l'Ortie l'a replié de telle sorte, qu'elle l'a réduit à enveloper sa bâse; ce qu'on peut remarquer dans la Fig. 25. où le contour de la bourse *CCC* à la surface exterieure de laquelle les cornes sont attachées, paroît servir de bâse à cet animal, parce qu'il couvre sa veritable bâse; renversant ensuite sa bouche, comme il a renversé les bords de la bourse, il lui fait enveloper à son tour cette bourse qui l'envelope ordinairement elle-même. Les lettres *OOOO* sont le contour de cette bouche renversée, & tout ce qu'on voit au-dessus est l'intérieur de l'Ortie au milieu de laquelle on distingue une partie marquée *S* qui paroît être le succoir dont elles se servent pour vuider les Coquillages qu'elles ont renfermés dans leur bouche.

Ce même renversement tant de la bourse ou envelope exterieure, que de la bouche, sert à un autre usage bien necessaire à la conservation de l'espece des Orties, puisque c'est par ce même moïen qu'elles mettent au jour leurs petits; car les Orties sont vivipares, comme je l'ai observé. Cette observation n'étoit pas necessaire pour détruire ce qu'Aristote en a dit, qui les fait naître de pierres, ou des fentes de ces pierres. Nous ne sommes pas dans un siecle où l'on s'avisât d'attribuer à une telle cause l'origine d'un corps si bien organisé; mais on auroit pû croire qu'elles font des œufs, ou du moins être incertain de la maniere dont elles se perpétuënt. Or ce que j'ai observé plus d'une fois suffit pour nous éclaircir là-dessus; car j'ai vû ces petites Orties sortir du corps de l'Ortie leur mere, aussi bien formées que l'Ortie même qui leur donnoit naissance, & telles

FIG. 25.

qu'on les voit dans la Fig. 25. Mais il est necessaire pour cette opération qu'elle se renverse de la maniere dont nous l'avons décrit ci-dessus ; & alors elle fait sortir par une grande ouverture *EE* Fig. 25. qui la traverse, les petites Orties qu'elle est en état de mettre au jour. Quoiqu'elle en contienne quelquefois plus de douze dans son corps, & que cette ouverture fût assez grande pour en laisser passer plusieurs à la fois, elle les met pourtant hors de son corps une à une, elle les pousse indifferemment par tous les endroits de cette ouverture. Mais on apperçoit ordinairement dans l'endroit même où une petite Ortie commence à paroître, une espece de petit intestin tourné en spirale marqué *I.* Toutes ces petites Orties avant leur naissance sont sur la bâse interieure de l'Ortie, au-dessous de la membrane où nous voyons l'ouverture *EE* ; elles y sont logées dans differens replis qui sont sur cette bâse.

FIG. 26.

Des Orties errantes.

FIG. 27.

Au nom près, ces especes d'Orties ne m'ont paru avoir rien de commun avec celles dont nous venons de parler. Il est vrai qu'on prétend qu'elles excitent comme les autres une douleur cuisante dans les parties qui les ont touchées. Quelques Auteurs même disent davantage, car ils assurent qu'elles causent cette même douleur aux yeux de ceux qui les regardent. Cependant quoique j'en aye rencontré une quantité prodigieuse sur les côtes de Poitou & d'Aunis, je n'y en ai jamais trouvé aucune ni de ces especes ici, ni des précedentes qui produisent l'effet qu'on leur attribuë, & auquel probablement les unes & les autres doivent leur nom. On distingue les dernieres de celles qui paroissent toûjours fixée sur des pierres, en les appellant *Orties détachées*, ou *Orties errantes.*

Les noms qu'on leur donne sur les differentes côtes du Royaume varient si fort, à des distances mêmes très-petites, qu'il seroit long de les rapporter. Si je voulois

en donner un nouveau à ces Orties qui en ont déja trop d'anciens, je les appellerois *Gelées de mer*; nom qui caracterise si fort la substance dont elles sont formées, qu'il vaut seul une petite description pour aider à les reconnoître.

Aussi la chair de ces Orties, si l'on peu l'appeller chair, paroît une vraïe gelée d'eau de mer, elle en a ordinairement la couleur & toûjours la consistance; & si on en prend un morceau entre les mains, leur chaleur naturelle suffit pour le faire entierement dissoudre en eau, comme une gelée de boüillon qu'on mettroit sur le feu. Ces gelées malgré cela sont de vrais animaux, & ceux qui ont crû qu'elles n'avoient aucune structure reguliere ne les ont pas regardées d'assez près. Il y en a à la verité de très-differentes entr'elles, mais ce sont des gelées d'especes differentes, & celles qui sont de même espece ont exactement la même figure. Les divers morceaux de ces Orties qu'on trouve au bord de la mer, sont apparemment la cause pour laquelle on ne les a pas regardées comme des corps fort organisez, parce qu'on n'a pas observé dans ces fragmens toute la regularité qu'on ne devoit chercher que dans la masse entiere dont ils faisoient partie.

On ne sçauroit ni donner une idée de toutes ces differentes especes d'Orties, ni décrire même en détail toute la méchanique qui entre dans la composition d'une de ces especes, sans s'engager dans des choses d'une longue discussion, peut-être aurai-je occasion d'en parler dans un autre endroit. Je me contenterai de faire ici quelques remarques sur ce que toutes ces especes d'Orties ont de commun dans leur structure. On sera moins étonné après cela qu'elles soient capables de mouvemens volontaires.

Quoiqu'elles soient toutes communément de la couleur d'une gelée d'eau, il y en a de verdâtres, telle que l'eau de la mer la paroît quelquefois; d'autres ont tout autour de la circonference marquée *DD* &c. Fig. 27. une bande

de deux ou trois lignes de largeur de couleur de pourpre ; j'en ai vû d'autres ſur le fond couleur d'eau , deſquelles diverſes taches brunes étoient ſemées d'une maniere fort agreable à la vûë.

La figure d'un champignon peut extrêmement aider notre imagination à concevoir celle de ces gelées. Le convexe du champignon repreſente aſſez leur côté convexe ; elles l'ont, ce côté , plus ou moins convexe les unes que les autres, comme on le voit dans les champignons d'eſpeces differentes. Cette ſurface convexe des gelées n'offre rien de très-remarquable ; il paroît ſeulement à la vûë ſimple qu'elle eſt garnie d'une infinité de petits grains ou de petits mamelons de même couleur que le reſte de l'Ortie. Mais la ſurface oppoſée à celle-ci, c'eſt-à-dire la concave, qui eſt auſſi celle qu'on a repreſenté dans la Fig. 27. fait voir des parties très-organiſées. Un peu au-delà de ſon bord qui eſt mince & découpé, on diſtingue très-ſenſiblement divers cercles concentriques, qui couvrent cette ſurface juſqu'aux deux tiers du rayon de ſa circonference. Ces cercles ne regnent pourtant pas tout autour de cette circonference : les plus proches du centre ſont ſeparez en ſeize arcs differens, & ceux qui en ſont les plus éloignez ſont ſeulement partagez en huit arcs. Ces ſéparations ſont faites par des eſpeces de canaux ou réſervoirs toûjours pleins d'eau , qu'ils peuvent communiquer à d'autres canaux plus petits ; qui ſont renfermez entre-deux des circonferences des cercles que l'on voit ici. On doit regarder toutes les petites bandes renfermées entre deux de ces circonferences , comme des organes très-remarquables de la gelée, puiſqu'elles ſont tout autant de canaux.

Pour s'aſſuter que ce ſont des canaux, ainſi que je viens de le dire, il ſuffit d'appliquer le doigt en haut du grand réſervoir *C* , & en preſſant un peu ce réſervoir, faire gliſſer ſon doigt de haut embas, c'eſt-à-dire de *C* vers *D*, par ce moyen on oblige l'eau qu'il contient d'avancer vers *D* , où ſe trouvant trop reſſerrée, on en voit une

une partie qui enfile à droit & à gauche tous les petits canaux qui ſe terminent dans le réſervoir.

La fonction de ces grands canaux ou réſervoirs qui vont du centre à la circonference, & ceux des canaux circulaires paroît être la même que celle des vaiſſeaux qui portent chez nous le ſang. Ils fourniſſent une eau, peut-être préparée, à toute la bâſe de cet animal ; & ſi la chair ne paroît qu'une vraie gelée, c'eſt qu'elle a très-peu de parties ſolides & fort minces, qui ſont toutes extrêmement gonflées par cette eau, qui eſt apparemment renfermée dans une infinité de petits réſervoirs inſenſibles à la vûë.

Je m'en ſuis convaincus en faiſant boüillir très-long-tems dans un chaudron plein d'eau, une gelée dont la bâſe *DDD* &c. avoit plus de deux pieds de diametre. Elle ne s'eſt point entierement réduite elle-même en eau, comme il arrive aux petits morceaux que l'on laiſſe fondre dans ſa main ; conſervant ſa même figure, elle eſt devenuë une très-petite Ortie, c'eſt-à-dire de moins d'un demi pied de diametre, dans laquelle on voyoit préciſément les mêmes choſes que dans la grande, à cela près que ſa ſubſtance étoit ſolide, quoique flexible, & qu'on la tenoit alors dans la main ſans qu'elle laiſsât échapper aucune goutte de liqueur. Inutilement enſuite la faiſoit-on boüillir dans l'eau, elle ne diminuoit que très-peu. Ce ſont donc ces parties ſolides gonflées par l'eau qui forment la chair de l'Ortie.

Ayant une autre fois laiſſé ſecher une de ces Orties expoſée au grand Soleil pendant l'Eſté, elle s'eſt réduite preſque à rien au bout de quelques jours. Il eſt reſté ſeulement un corps très-mince, qui avoit la ſolidité du parchemin, & la couleur d'une belle colle tranſparente.

Si les canaux droits ſervent à fournir l'eau à toute la ſubſtance de l'Ortie, il ſemble qu'ils doivent en donner davantage où cette ſubſtance eſt épaiſſe, que dans les endroits où elle eſt mince. Auſſi peut-on remarquer que

la premiere bande circulaire qui va depuis le bout de la circonference jusques environ le tiers du rayon, & qui est très-mince, n'est arrosée que par huit réservoirs, au lieu que celle qui la suit, laquelle est beaucoup plus épaisse, en a seize. Les lettres *DDD* &c *EFEF* &c. marquent cette circonference circulaire, qui ne reçoit de l'eau que par la portion *ED* des canaux *D*, au lieu que la bande *CCCC* &c. *EFEF*, dont l'épaisseur augmente en talus depuis *EFEF* &c. jusqu'en *CCCC* &c. où elle a quelquefois plus de deux pouces & demi d'épaisseur dans les grandes Orties, c'est-à-dire d'un pied & demi ou deux pieds de diametre. Cette bande circulaire, dis-je, reçoit l'eau de seize canaux, sçavoir des huit marquez *CE*, & des huit autres marquez *CF*.

Vers les deux tiers du rayon, c'est-à-dire au bout des canaux droits, toutes ces especes d'Orties sont comme divisées en quatre parties par quatre bandes, ou quatre colomnes à peu près rondes dans quelques especes d'Orties, mais plates dans celle de la Figure 27. Ces bandes sont marquées *B* dans cette Figure. Dans quelques especes elles sont presque élevées perpendiculairement sur la bâse; mais dans l'espece qui est ici gravée, elles font un angle très-obtus avec le bord du plan où sont les canaux droits. Elles vont toutes quatre se joindre dans la même espece à un tronc *T* rond d'environ de même longueur que ces colomnes, c'est-à-dire du tiers du rayon. Ce tronc de figure cylindrique se partage en huit rameaux *RR* &c. Chacun de ces rameaux a à son origine deux appendices ou especes de crêtes, que les lettres *PP* font voir seulement à un de ces rameaux. On n'a pas jugé nécessaire de mettre des lettres aux autres, dont une partie est cachée dans le dessein. Ce ne sont pas seulement ces deux appendices qui sont découpées en crêtes, une partie de chaque rameau s'est découpée de la même maniere.

FIG. 27.

Dans l'espace compris sous les quatre colomnes *BBB*, est un large canal formé par une membrane épaisse, qui

eſt la ſeule choſe ſolide qui paroiſſe dans l'Ortie. Cette membrane eſt pliſſée en bourſe, ou plûtôt comme ces appeaux dont on ſe ſert pour attraper les cailles. Elle forme, comme je l'ai dit, un grand canal, qui s'arrondiſſant vers le pied des colomnes, prend la même figure que l'on donneroit à un ruban auquel on feroit entourer les quatre bras d'une croix, aſſez larges & égaux. On voit ſeulement ici une petite partie de ce canal par les ouvertures que les colomnes laiſſent entr'elles, ce qui en paroît eſt marqué *I*.

Ce large canal eſt rempli d'une matiere liquide, qui par ſa conſiſtance & ſa couleur reſſemble fort à une morve jaune. Ce même canal jette une & quelquefois deux branches dans chacune des colomnes. On les ſuit en partie dans la Figure, dans l'endroit qui paroît obſcur au travers du tranſparent de la colomne marquée *B*. Ces quatre canaux vont ſe rendre dans le tronc, d'où ils ſe diſtribuënt dans les huit rameaux. On peut aiſément les ſuivre dans toute leur route, parce qu'ils ſont pleins de la même matiere jaunâtre qui eſt contenuë dans le grand canal; & que la couleur de cette matiere eſt fort differente de la couleur tranſparente du reſte de l'Ortie. Cette même matiere paroît dans toutes les crêtes, & toutes les découpures des rameaux. Il n'eſt pas aiſé de découvrir ſi elle eſt ou un excrement de l'Ortie, ou quelque eſpece d'aliment. Je ſçai bien qu'au bout de chaque rameau de l'Ortie il y a des ouvertures à toutes les branches des canaux qui portent cette liqueur; mais il me paroît incertain ſi ces ouvertures lui donnent une ſortie ou une entrée : car ſelon qu'on preſſe ces branches ou du côté de leur tronc, ou du côté de leur bout, on fait aller cette liqueur de differens côtés.

Ces ouvertures paroiſſent dans la Figure 28. où l'on a repreſenté dans ſa grandeur naturelle le bout d'un de ces rayons, lequel a la figure d'une pyramide à baſe triangulaire. Le tronc *T* du canal qui paſſe au milieu de cette pyramide, & les divers rameaux *RR* &c. dans leſquels

FIG. 28.

le tronc se divise, paroissent aisément au travers de l'épaisseur de cette pyramide, qui est souvent aussi transparent que le seroit un prisme de cristal. Les lettres *OOO* sont auprès des ouvertures de chacun de ces rameaux.

Nous en aurons assez dit pour donner une idée generale de la structure des gelées de mer, lorsque nous aurons ajoûté que tous les rameaux *RR* &c. ne sont pas necessairement dans la position où l'on les voit dans la Figure; qu'étant assez flexibles, ils pourroient être jettez sur tout autre endroit de la circonference que celui où ils sont representez, & qu'au lieu qu'ils sont tous posez ensemble d'un même côté, ils pourroient être chacun en particulier placez sur quel endroit de cette circonference on auroit voulu choisir.

Toutes les regles que la mer apporte au bord de la côte paroissent sans aucune action, apparemment que les chocs qu'elle leur fait essuyer contre les pierres, ou même contre le sable, suffisent pour leur ôter la vie, car il est certain qu'elles vivent. Pour le prouver, il me suffit de dire que celles que l'on trouve au bord de la côte sont plus pesantes que l'eau, au fond de laquelle elles vont toûjours lorsqu'on les plonge dedans. Quoiqu'on en voye nager sur la surface de l'eau en pleine mer, où il semble qu'elles ne peuvent se soutenir que par quelque espece d'action, il paroît souvent alors que leurs rameaux s'agitent; l'agitation continuelle de l'eau de la mer nous laisse incertains, si le mouvement que l'on apperçoit dans ces rameaux leur est propre, ou s'il vient de celui de l'eau dans laquelle ils sont : mais au moins est-il sûr qu'elles peuvent se soûtenir sur l'eau par une autre action. C'est ce que j'ai observé dans quelques Orties que la mer avoit laissées dans de certains endroits desquels l'eau ne s'écoule jamais, parce qu'ils sont plus profonds que ceux qui les environnent. C'est dans ces endroits-là où l'eau est aussi tranquille, lorsque la mer est basse que l'est celle d'un étang, que j'ai observé dans les Orties le mouvement par le moyen duquel elles se

ſoûtiennent ſur l'eau. Ce mouvement eſt une eſpece de mouvement de contraction & de dilatation du contour, & d'une partie de la bâſe de l'Ortie, qui reſſemble en quelque façon au ſyſtole & au diaſtole. L'Ortie dans la contraction rend la ſurface de ſon corps, qui repreſente le convexe du chapiteau d'un champignon, beaucoup plus convexe qu'elle ne l'eſt naturellement, c'eſt-à-dire qu'elle éleve un peu tout ſon contour *DD* &c. en le recourbant vers le tronc *T*, & dans la dilatation elle rend cette même ſurface un peu moins convexe, & fait en même tems tomber ſur l'eau tout le contour de ſa bâſe, qui s'étoit élevée dans la contraction; d'où l'on voit qu'en repetant alternativement ces deux mouvemens; elle bat l'eau de tems en tems, ce qui eſt capable de la ſoûtenir deſſus, de la même maniere qu'un homme qui nage s'y ſoûtient.

Des Etoiles de mer.

C'eſt ſans doute à leur figure que ces poiſſons de mer doivent leur nom, puiſqu'elle eſt ſemblable à celle ſous laquelle on nous peint les Etoiles qui ornent le Firmament. Les Etoiles de mer ſont découpées, ou plûtôt comme diviſées en cinq parties[a], qu'on peut nommer rayons. Il y a pourtant des Etoiles qui n'ont naturellement que quatre rayons, & j'ai vû quelquefois un ſeul rayon qui étoit une véritable Etoile, mais cela eſt rare. Leur ſurface ſuperieure, ou celle à laquelle les jambes ne ſont pas attachées, eſt couverte par une peau très-dure; c'eſt peut-être ce qui a déterminé Ariſtote à les ranger parmi les teſtacées ou animaux à coquilles: Mais Pline donne avec plus de raiſon à cette peau le nom de *Callum durum*; car elle reſſemble par ſa ſolidité à une eſpece de cuire; elle eſt heriſſée de diverſes petites éminences d'une matiere beaucoup plus dure, & qui reſſemble fort à celle des os ou des coquilles. Cette peau ſuperieure eſt differemment colorée dans diverſes Etoiles de l'eſpece dont nous parlons ici, car il y a des eſpeces

FIG. 29. & 30.

qui en ſont fort differentes. Dans quelques-unes elle eſt rouge, dans d'autres violette, dans d'autres bleuë, & jaunâtre dans d'autres, & enfin elle eſt ſouvent de diverſes couleurs moyennes entre celles-ci.

Les mêmes couleurs ne paroiſſent pas ſur la ſurface inferieure, qui eſt preſque couverte par les jambes; & par diverſes pointes qui bordent ſes côtez, plus longues que celles de la ſurface ſuperieure, quoiqu'elles ayent moins d'une ligne, celle-ci eſt d'un blanc jaunâtre. On voit au milieu de l'Etoile, lorſqu'on la regarde par deſſous, une petite bouche ou ſuccoir *S*, dont elles ſe ſervent pour tirer la ſubſtance des coquillages deſquels elles ſe nourriſſent, comme Ariſtote l'a fort bien remarqué. Il auroit eu moins de raiſon s'il avoit aſſuré, comme il paroît par la traduction de Gaza, que les Etoiles ont une telle chaleur, qu'elles brûlent tout ce qu'elles touchent. Rondelet qui veut faire parler Ariſtote plus raiſonnablement, dit que cela doit s'entendre des choſes qu'elles ont mangées, qu'elles digerent très-vîte. Pline cependant a adopté le ſentiment d'Ariſtote dans le ſens que Gaza l'a traduit; car il dit expreſſément Liv. 10. Chap. 60. *Tam igneum fervorem eſſe tradunt*, parlant de l'Etoile, *ut omnia in mari contacta adurat*. Après quoi il parle comme d'une choſe differente de la facilité qu'elle a à digerer. On a crû apparemment devoir leur attribuer une chaleur ſemblable à celle des Aſtres dont elles portent le nom. Quoiqu'il en ſoit de cette chaleur imaginaire, il eſt certain qu'elles mangent les Coquillages, & qu'elles ont autour leur ſuccoir cinq dents *DD*, ou plûtôt cinq petites fourchettes d'une eſpece de matiere oſſeuſe, par le moyen deſquelles elles tiennent les Coquillages pendant qu'elles les ſuccent. Peut-être que c'eſt avec les mêmes pointes qu'elles ouvrent leurs coquilles, lorſqu'elles ſont de deux pieces.

Chaque rayon de l'Etoile eſt fourni d'un ſi grand nombre de jambes, qu'il n'eſt pas étonnant qu'elles le couvrent preſque tout entier du côté où elles lui ſont atta-

chées. Elles y ſont poſées dans quatre rangs differens, chacun deſquels eſt d'environ 76 jambes, c'eſt-à-dire que chaque rayon en a 304, & par conſéquent l'Etoile entiere eſt pourvûë de 1520 jambes nombre aſſez merveilleux, ſans que Bellon le pouſsât juſqu'à près de cinq mille. Tout ce grand attirail de jambes ne ſert cependant qu'à executer un mouvement très-lent ; auſſi ſont-elles ſi molles qu'elles ne ſemblent guere meriter le nom de jambes. A proprement parler ce ne ſont que des eſpeces de cornes, telles que celles de nos limaçons de Jardins, mais dont les Etoiles ſe ſervent pour marcher. Ce n'eſt pas ſimplement par leur peu de conſiſtance qu'elles reſſemblent à des cornes de limaçons ; elles ne leur ſont pas moins ſemblables par leur couleur & leur figure, ainſi il ſeroit inutile de les décrire plus au long.

Ces jambes auſſi ſont ſouvent retirées comme les cornes d'un limaçon ; c'eſt ſeulement lorſque l'Etoile veut marcher qu'on les voit dans leur longueur, encore l'Etoile ne fait-elle paroître alors qu'une partie de ces jambes : mais dans le tems même que l'Etoile, ou plûtôt leur reſſort naturel les tient elles-mêmes raccourcies, on apperçoit toûjours leur petit bout qui eſt un peu plus gros que l'endroit qui eſt immédiatement au-deſſous. Ce ſont ſeulement les bouts de ces jambes que l'on voit dans les deux rayons *AA* Fig. 30. mais on voit ſur les trois autres rayons pluſieurs de ces jambes allongées, comme elles le ſont lorſque l'Etoile s'en ſert pour marcher. La mechanique que l'Etoile emploïe pour marcher, ou plûtôt pour alonger ſes jambes, doit nous paroître d'autant plus curieuſe qu'on l'apperçoit clairement, choſe rare dans ces ſortes d'opérations de la nature, dont les cauſes nous ſont ordinairement ſi cachées, que nous pouvons également les expliquer par des raiſonnemens très-oppoſez. Il n'en eſt point, dis-je, de même de la mechanique dont l'Etoile ſe ſert pour allonger ſes jambes. Il eſt aiſé de la remarquer très-diſtinctement, ſi-tôt que l'on

a mis à découvert les parties interieures d'un des rayons, en coupant sa peau dure du côté de la surface superieure de l'Etoile, ou de la surface opposée à celle sur laquelle les jambes sont situées, l'intérieur de l'Etoile paroît alors divisé en deux parties par une espece de corps cartilagineux, quoique assez dur. Ce corps semble composé d'un grand nombre de vertebres faites de telle façon, qu'il se trouve une coulisse au milieu du corps qu'elles forment par leur assemblage à chaque côté de cette coulisse, on voit avec plaisir deux rangs de petites spheroïdes elliptiques ou de boules longues, d'une clarté & d'une transparence très-grande, longues de plus d'une ligne, mais moins grosses que longues. Il semble que ce soient autant de petites perles rangées les unes auprès des autres, dans l'ordre où elles paroissent dans le rayon *R* que l'on a ouvert Fig. 30. Les rangs de ces boules sont marquez *BB*. Entre chaque vertebre est attachée une de ces boules de part & d'autre de la coulisse, mais à deux distances inégales, ce qui forme deux rangs de boules aux deux côtez de cette coulisse ; je veux dire que leur disposition est telle de chaque côté de la coulisse, qu'après la boule qui en est des plus proche, on trouve entre les deux vertebres suivantes une boule qui en est plus éloignée, & la boule qui suit est posée vis-à-vis la plus proche, & celle qui vient après vis-à-vis la plus éloignée, & ainsi de suite. Ces petites boules sont formées par une membrane mince, mais pourtant assez forte, dont l'intérieur est rempli d'eau, ensorte qu'il n'y a que la surface de la boule qui soit membraneuse.

Il n'est pas difficile de découvrir que ces boules sont faites pour servir à l'allongement des jambes de l'Etoile. On commence à le soupçonner dès-lors qu'on a remarqué que le nombre des boules est égal à celui des jambes, & enfin que chaque boule répond à une jambe. Mais on en dévelope toute la méchanique ingénieuse, lorsqu'en pressant avec le doigt quelqu'une de ces boules, on les voit se vuider, & que dans le même tems on observe

ſerve que les jambes qui leur correſpondent ſe gonflent. Enfin lorſqu'on voit qu'après avoir ceſſé de preſſer ces mêmes boules, elles ſe rempliſſent pendant que les jambes s'affaiſſent & ſe raccourciſſent à leur tour ; car qui ne ſent pas après cela que tout ce que l'Etoile a à faire pour enfler ſes jambes, c'eſt de preſſer les boules comme on les preſſoit tout à l'heure avec le doigt ? Il eſt aiſé d'imaginer mille manieres dont elle le peut faire. Ces boules preſſées ſe déchargent de leur eau dans les jambes qu'elles gonflent & étendent auſſi-tôt : mais dès-lors que l'Etoile ceſſe de preſſer les boules, le reſſort naturel des jambes qui les affaiſſe, les raccourcit & chaſſe l'eau dans les boules dont elle étoit ſortie.

Ces jambes ainſi allongées, l'Etoile s'en ſert pour marcher; elle n'étend qu'une partie de celles de chaque raïon, & même à des inſtances aſſez inégales & avec peu d'ordre, comme on le peut remarquer dans la Fig. 30 où on a repreſenté une Etoile poſée ſur le dos, qui ayant le bout d'un de ſes rayons ſous la pierre P, tâche d'avancer vers cette pierre ; les jambes qui touchent cette pierre ſervent à l'en approcher, & les autres jambes qui ne portent ſur aucun corps, en cherchent quelqu'un qu'elles puiſſent ſaiſir. Ces jambes rencontrent la pierre ou le corps vers lequel elles veulent avancer, en faiſant avec lui un angle très-aigu; de ſorte que l'Etoile les tenant toûjours fixes ſur ce corps, & tâchant de leur faire faire un angle droit avec ce même corps, oblige le ſien d'en approcher.

Au reſte il n'eſt pas neceſſaire aux Etoiles pour marcher d'être ainſi renverſées, la poſition contraire leur eſt également commode ; mais on a choiſi celle-cy, parce qu'elle laiſſe voir les jambes, qui dans l'autre poſition ſont cachées par le corps. Elles peuvent auſſi marcher ſur les pierres & ſur le ſable, ſoit qu'elles ſoient à ſec, ſoit qu'elles ſoient couvertes par l'eau de la mer.

On auroit pû avoir du penchant à regarder les jambes des Etoiles, comme les parties dont elles ſe ſervent à reſpirer l'eau, à cauſe de la reſſemblance qui eſt

entre leur figure & celle des tuyau charnus des autres poiſſons dont nous avons parlé. Les Etoiles n'ont point de ſi gros tuyaux pour ſervir à cet uſage ; c'eſt de quoy elles ſont dédommagées par une quantité prodigieuſe de petits tuyaux dont toute leur peau eſt remplie. Lorſqu'on prend des Etoiles en certains tems où elles ſont fort gonflées par l'eau, on voit bien vîte l'effet de ces tuyaux, en appercevant une infinité de jets d'eau très-déliez qui ſortent partout de leur peau. Mais ſi l'on regarde alors avec attention l'Etoile, on voit que chacun de ces jets part d'un petit tuyau peu ſenſible à la vûë, qui le devient pourtant d'autant plus qu'on l'oblige de ſortir davantage en preſſant la peau de l'Etoile auprès de l'endroit où on l'a remarqué. Il paroît de figure conique, & d'une couleur blanche. Ces petits tuyaux ne ſont jamais diſtribuez ſéparément. Il y en a ordinairement ſix attachez les uns auprès des autres dans un petit eſpace. Pour les faire plus aiſément remarquer, on a repreſenté Fig. 31. un bout d'un rayon vû à la louppe, dans laquelle les lettres *CCC* ſont poſées auprès de trois de ces petits amas de tuyaux, qui ſont repreſentez allongez tels qu'ils le ſont lorſqu'ils jettent l'eau, ou qu'on les fait paroître en preſſant la peau de l'Etoile en *RRR* ; & dans tous les autres endroits du rayon où l'on n'a pas jugé à propos de mettre des lettres, on voit les mêmes amas de tuyaux, mais affaiſſez.

Ce Memoire beaucoup trop long ne contient qu'une partie des obſervations que j'ay faites ſur le mouvement progreſſif des animaux de mer ; un autre Memoire en contiendra la ſuite.



fig. 2.

fig. 3.
S
M M
P C
C
I O O

fig. 5.
L
B

fig. 6.
C
C
C
C

fig. 7
I O

g. 9.
M
I I P

fig. 10.
P I T

fig. 11.

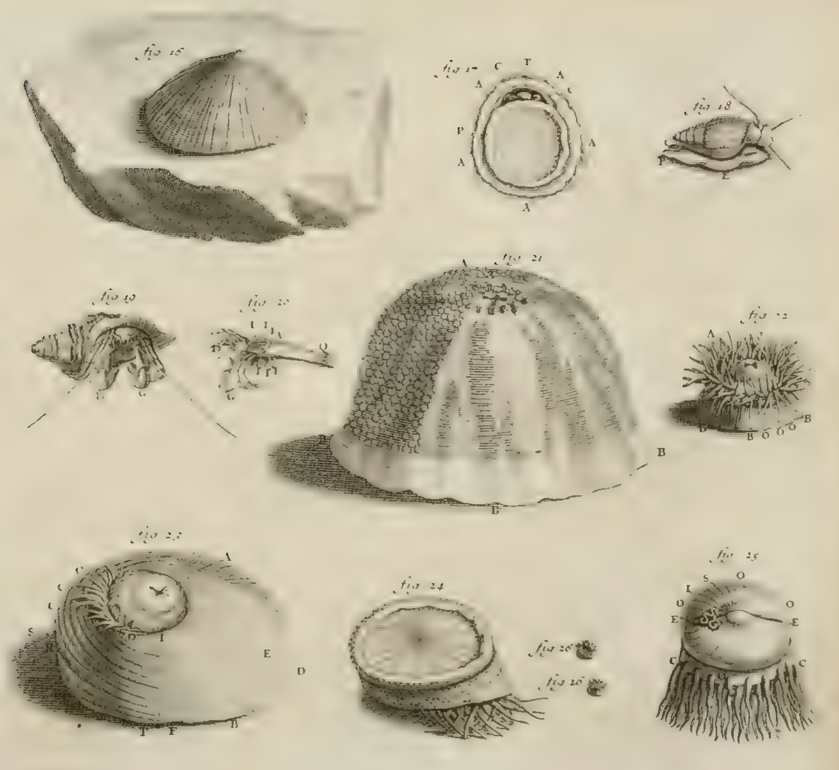
13.
P

fig. 14.
C
C
I

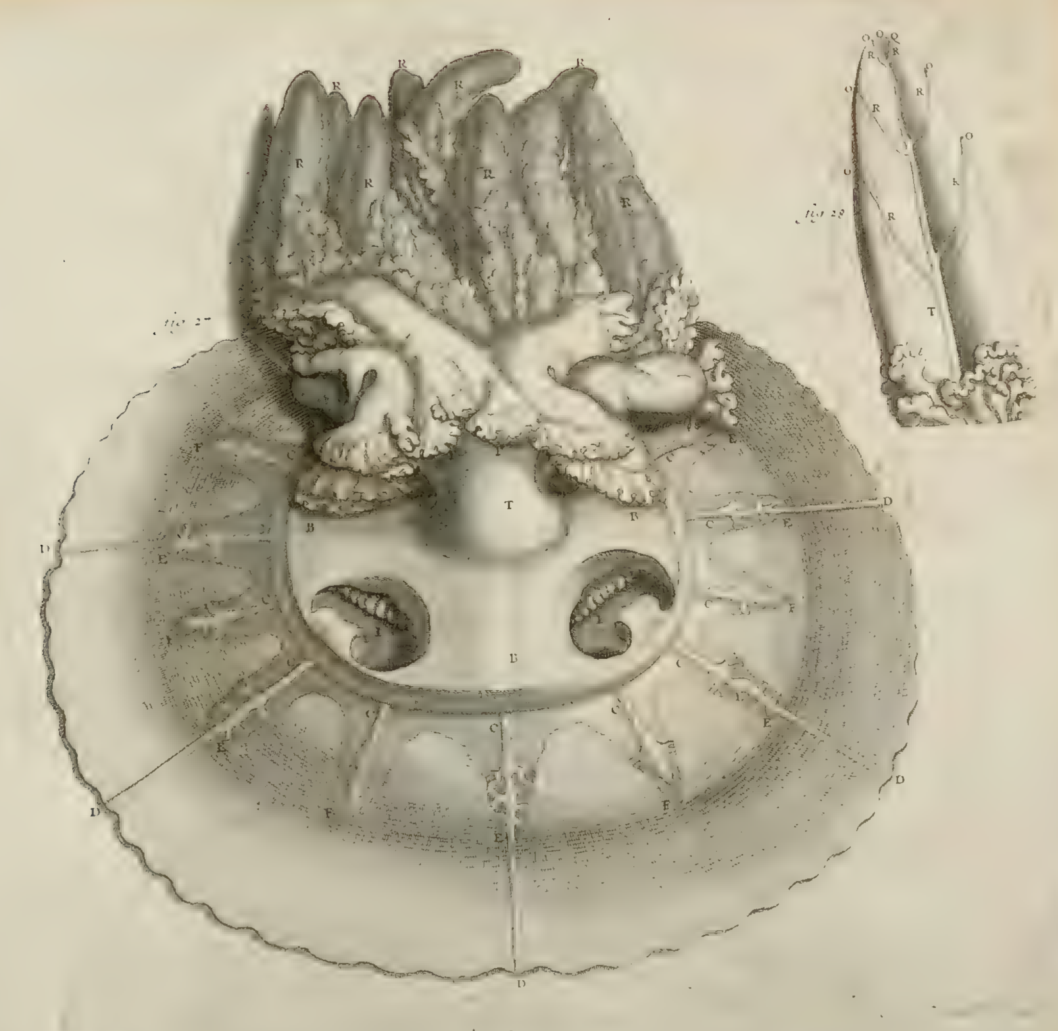
fig. 15.
A A.
I

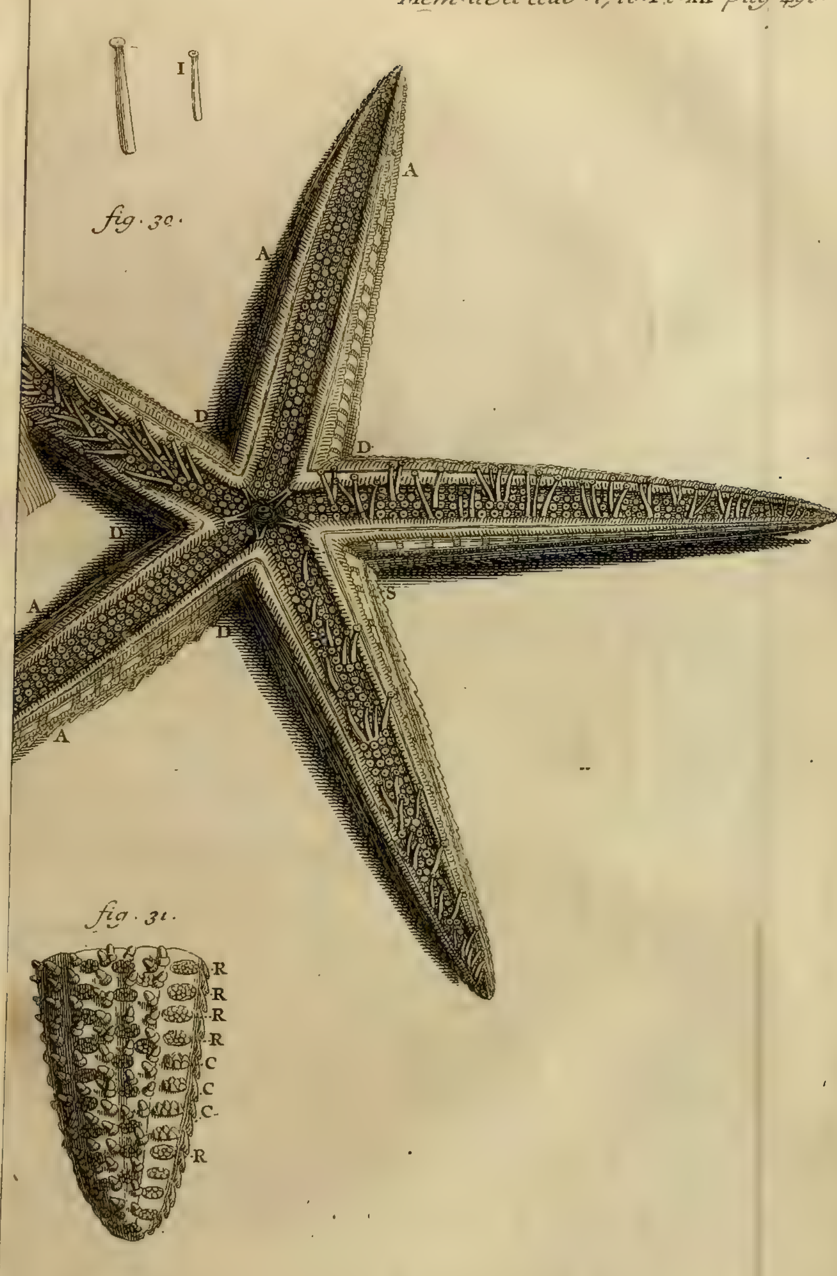

Mem de l'Acad


fig. 17.
C
T
A
A
C
P
A
A
A
fig. 18.
C
P
E
fig. 21.
A
B
B
B
fig. 22.
A
D
B O O O
fig. 24.
fig. 26.
fig. 26.
fig. 25.
S
O
I
O
O
E
E
C
C
D
Q




R
R
O O O
R R
O
O
R
R
O
O
R
R
fig. 28.
R
T
E
C
B
D
C
E


fig 27
fig 28
R
T
B
D
E
C
F
I
O


I
fig. 30.
A
A
D
D
D
A
S
D
A
fig. 31.
R
R
R
R
C
C
C
R



DES MOUVEMENS

Commencés par des viteßes quelconques, & ensuite primitivement accelerés en raison des tems écoulés, dans des milieux résistans en raison des sommes faites des viteßes effectives du mobile, & des quarrés de ces mêmes vitesses.

PAR M. VARIGNON.

1710. 27. Aoust.

DAns le Mem. du 4. Juin dernier, on a vû ce que des mouvemens primitivement accelerés en raison des tems écoulés, en commençant à zero de vitesse, deviendroient dans des milieux résistans en raison des sommes faites des vitesses que le mobile y auroit effectivement malgré leurs résistances, & des quarrés de ces mêmes vitesses : on a vû, dis-je, dans ce Memoire quelles seroient alors ces vitesses, les especes qu'elles feroient parcourir au mobile dans des tems quelconques, &c. Voici presentement ce qui arriveroit aussi dans ces milieux à des mouvemens commencés par des vitesses quelconques, & ensuite accelerés encore primitivement en raison des tems écoulés, c'est-à-dire, à des mouvemens qui dans un milieu sans résistance auroient encore des accroissemens égaux de vitesse en tems égaux, ainsi que Galilée le suppose dans la chute des corps. Nous nous servirons pour cela du Lemme par où commence le Memoire qu'on vient de citer.

PROBLÊME.

FIG. I. II. III.

La construction générale du Lemme de la pag. 243. étant ici supposée, trouver les Courbes ARC *des résistantes totales ou des vitesses perduës;* HUC *des vitesses restantes ou actuelles, &c. dans les hypothéses,* 1°. *des résistances en*

raiſon des ſommes faites de ces viteſſes & de leurs quarrés ; 2°. des viteſſes primitives en raiſon des ſommes faites d'une initiale conſtante quelconque augmentée d'autres, qui comme dans le Probl. de la pag. 244. croitroient en raiſon des tems écoulés depuis le commencement du mouvement : ainſi qu'il arriveroit dans l'hypothéſe de Galilée ſur la peſanteur, ſi d'une force quelconque differente de la peſanteur quelconque d'un corps, on le jettoit verticalement de haut en bas dans un milieu ſans réſiſtance ni action.

SOLUTION.

FIG. I. II III. I. Suivant les art. 1. 2. du Lemme de la pag. 243. en ſe ſervant toûjours des noms qui y ſont employés, la premiere des deux hypothéſes de ce Problême-ci, laquelle eſt $z = u + \frac{uu}{a} = \frac{au + uu}{a}$, donnera encore ici, comme dans la Solut. du Probl. de la pag. 245. $z\ (TE) = \frac{au + uu}{a}$ $= \frac{AB \times TV + TV \times TV}{AB} = \frac{AB \times RV + RV \times RV}{AB} = \frac{AB \times \overline{TV - TR} + \overline{TV - TR}^2}{AB}$ $= \frac{a \times \overline{v - r} + \overline{v - r}^2}{a}$, en ſuppoſant $AB = a$ conſtante ; & la ſeconde donnera $v = TV = TX + XV = AF + FX = AF + AT = b + t$; d'où réſulte $dv = dt$, & $b + t - r = v - r = TV - TR = RV = TU = u$. Donc en ſubſtituant ces valeurs de z, u, dv, dans les deux formules générales $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z}$, $\frac{dt}{a} = \frac{dv - du}{z}$, de l'art. 2. du Lemme de la pag. 243. La premiere ſe changera ici en $\frac{dt}{aa} = \frac{dr}{a \times \overline{b + t - r} + \overline{b + t - r}^2}$ pour la Courbe ARC des réſiſtances totales ; & la ſeconde, en $\frac{dt}{aa} = \frac{dt - du}{au - uu}$ pour la Courbe HUC des viteſſes reſtantes $TU\ (u)$, comme dans la Solution 1. du Probl. de la pag. 245. Mais avec cette difference que ces viteſſes TU commençant (*hyp.*) à zero en A dans ce Problême là, & ici à une premiere viteſſe $= AF\ (b)$; la Courbe HUC doit ici paſſer par un point H de AB perpendiculaire en A ſur l'axe ATC, & pro-

longée où besoin sera du côté de B, lequel point H donne $AH = AF (b)$, au lieu que dans le Probl. de la pag. 144. Corol. 2. pag. 147. cette Courbe des vitesses restantes (u) devoit passer par A.

II. Pour construire les deux Courbes HUC, ARC, il faut considerer que la derniere équation $\frac{dt}{aa} = \frac{dt - du}{au + uu}$ de la Courbe HUC, donnant $audt + uudt = aadt - aadu$, ou $aadu = aadt - audt - uudt$, donne aussi $dt = \frac{aadu}{aa - au - uu}$ pour l'équation de cette Courbe, comme dans la Solut. 1. du Probl. de la pag. 246. pour celle de ce Problême-là.

III. Soit encore (comme dans cette Solution-là) $\frac{5a^3y}{\overline{a+y}^2} = aa - au - uu$. L'on aura ici comme là $u = \frac{a-y}{a+y} \times \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}a$, $dt = -\frac{a}{\sqrt{5}} \times \frac{dy}{y}$, & $y = \frac{aa\sqrt{5} - aa - 2au}{a\sqrt{5} + a + 2u}$: lesquelles équations font voir que les y doivent être les ordonnées GT d'une logarithmique LGC sur l'asymptote ATC, de laquelle elle s'approche à l'infini du côté de C, y aïant sa soûtangente $= \frac{a}{\sqrt{5}}$. La derniere $y = \frac{aa\sqrt{5} - aa - 2au}{a\sqrt{5} + a + 2u}$ de ces trois équations fait voir de plus que $AT (t)$ infinie, qui rend ainsi $GT (y) = 0$, doit rendre aussi $aa\sqrt{5} - aa - 2au = 0$, & conséquemment $u = \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$ après un tems infini : de sorte qu'en prenant AD de cette valeur sur AB perpendiculaire à AT, c'est à dire $AD = \frac{a\sqrt{5} - 2}{2} = AB \times \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$; la droite DC parallele à AT, sera une asymptote de la Courbe HUC des vitesses restantes $TU (u)$.

IV. Cette même équation $y (GT) = \frac{aa\sqrt{5} - aa - 2au}{a\sqrt{5} + a + 2u}$ fait voir qu'au commencement du mouvement en A, la premiere vitesse u (*hyp.*) $= b$, doit rendre la premiere ordonnée logarithmique $AL (y) = \frac{aa\sqrt{5} - aa - 2ab}{a\sqrt{5} + a + 2b}$: de sorte que cette premiere ordonnée AL sera positive ou négative, & conséquemment aussi toutes les autres ordonnées

GT (y) de la même logarithmique LGC, ſelon que b (AF) ſera moindre ou plus grande que $\frac{a\sqrt{5}-a}{2}$ (AD); & $AL=0$ avec toutes les GT (y) $=0$, c'eſt-à-dire, la logarithmique LGC confonduë avec ſon aſyptote ATC, ſi b (AF) $=\frac{a\sqrt{5}+a}{2}$ (AD). Ce qui produit deux cas dans les Fig. 1. 2. 3. Le premier de AL & de toutes les GT (y) poſitives du côté de H par rapport à A, ſi b (AF ou AH) $<\frac{a\sqrt{5}-a}{4}$ (AD) comme dans les Fig. 1.2. Le ſecond de AL & de toutes les GT (y) negatives de l'autre côté de A vers F, ſi b (AF ou AH) $>\frac{a\sqrt{5}-a}{2}$ (AD), comme dans la Fig. 5. Ce qui change ici les équations $\frac{5a^3 y}{\overline{a+y}^2}=aa-au-uu$, & $u=\frac{a-y}{a+y}\times\frac{a\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}a$, de l'art. 3. en $\frac{\pm 5a^3 y}{\overline{a\pm y}^2}=aa-au-uu$, & en $u=\frac{a\mp y}{a\pm y}\times\frac{a\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}a$, dont les ſignes ſuperieurs, haut & bas de la fraction, ſont pour le cas des Fig. 1. 2. & les inferieurs pour celui de la Fig. 3.

V. Cela étant, ſi l'on prend $AB=a$, perpendiculaire en A ſur AT, & par tout enſuite TU (u) $=\frac{AB\mp GT}{AB\pm GT}\times\frac{AB\sqrt{5}}{5}-\frac{1}{2}AB\left(\frac{a\mp y}{a\pm y}\times\frac{a\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}a\right)$; c'eſt-à-dire, $TU=\frac{AB-GT}{AB+GT}\times\frac{AB\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}AB$ dans le cas des Fig. 1. 2. & $TU=\frac{AB+GT}{AB-GT}\times\frac{AB\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}AB$ dans celui de la Fig. 3. La ligne HUC qui paſſera par tous les points U ainſi trouvés, ſera la Courbe cherchée des viteſſes reſtantes u (TU) malgré les réſiſtances ſuppoſées, laquelle (*art.* 1.) eſt exprimée par $dt=\frac{aadu}{aa-au-uu}$. *Ce qu'il falloit premierement trouver.*

VI. Cette Courbe HUC des viteſſes TU (u) reſtantes des primitives TV (v) malgré les réſiſtances ſuppoſées, étant ainſi conſtruite, il n'y aura plus qu'à prendre par tout $UR=TV$ (*hyp.*) $TX+XV=AF+FX=AF+AT$; & la ligne ARC, qui paſſera par tous les

points R ainsi trouvés, sera ici (*Lem. art.* 1. *pag.* 243.) la Courbe des résistances totales TR (r), ou des vitesses perduës, exprimée (*art.* 1.) par $dt = \frac{aadr}{a \times \overline{b+t-r} + \overline{b+t-r}^2}$. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

COROLLAIRE I.

Puisque (*Solut. art.* 4.) $AL = \frac{aa\sqrt{5} - aa - 2ab}{a\sqrt{5} + a + 2b}$, il est manifeste que GT (y) en AL, doit y donner aussi $y = \frac{aa\sqrt{5} - aa - 2ab}{a\sqrt{5} + a + 2b}$. Ainsi ayant en général $y = \frac{aa\sqrt{5} - aa - 2au}{a\sqrt{5} + a + 2u}$, GT en AL doit y donner $\frac{aa\sqrt{5} - aa - 2au}{a\sqrt{5} + a + 2u} = \frac{aa\sqrt{5} - aa - 2ab}{a\sqrt{5} + a + 2b}$, & conséquemment $u = b$, ou TU (u) $= AF$ (b). Mais GT en AL, rend TU en AH. Donc la premiere AH des vitesses TU (u) au commencement A du tems AT (t) est égale à l'initiale AF (b) dans tous les cas possibles des Fig. 1. 2. 3.

COROLLAIRE II.

Puisque TU en AH, y rend dans tous les cas (*Corol.* 1.) $u = b$, l'équation (*Solut. art.* 2.) $dt = \frac{aadu}{aa - au - uu}$ de la Courbe HUC doit s'y changer en $dt = \frac{aadu}{aa - ab - bb}$; ce qui fait voir que cette Courbe doit rencontrer en H son ordonnée AH (perpendiculaire en A sur AT) sous un angle AHU dont le sinus soit à celui de son complément :: aa. $aa - ab - bb$. dans tous les cas possibles des Fig. 1. 2. 3. & conséquemment sous un angle de 45. deg. dans celui de la Fig. 1. dans qui la vitesse initiale est $b = 0$, ainsi que dans le Corol. 1. de la pag. 247. où l'on a déja trouvé la même chose pour ce cas-ci.

COROLLAIRE III.

Quant à la Courbe ARC, dont (*Solut. art.* 1.) l'équation est $dt = \frac{aadr}{a \times \overline{b+t-r} + \overline{b+t-r}^2}$, elle doit rencontrer son axe AT en A sous un angle TAR dont le sinus soit à celui

de ſon complément :: $ab + bb. aa$. Puiſque TR (r) en A, rendant $r = 0$, & t (AT) $= 0$, réduit cette équation à $dt = \frac{aadr}{ab+bb}$. De plus les dr croiſſant ou décroiſſant ici avec les $b+t-r$ (u ou TU) correſpondantes, cette Courbe ARC tournera ſa convexité ou ſa concavité en même ſens ou de même côté que la Courbe HUC tournera la ſienne.

COROLLAIRE IV.

L'équation $TU\,(u) = \frac{AB-GT}{AB+GT} \times \frac{AB\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} AB$ trouvée dans l'art. 5. de la Solut. pour le cas des Fig. 1. 2. dans leſquelles $AH\,(b)$ eſt moindre que $AD\left(\frac{a\sqrt{5}-a}{2}\right)$, fait voir que les viteſſes reſtantes TU (u) y doivent toujours croître depuis la premiere AH (b), à meſure que les GT (y) diminuent ; puiſque le rapport $\frac{AB-GT}{AB+GT}$ croît à meſure que les GT (y) deviennent plus petites ; ce qui leur arrive à l'infini (*Solut. art.* 3.) du côté de C.

COROLLAIRE V.

Au contraire l'équation TU (u) $= \frac{AB+GT}{AB-GT} \times \frac{AB\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} AB$ trouvée dans l'art. 5. de la Solut. pour le cas de la Fig. 3. dans lequel AH (b) eſt plus grande que AD $\left(\frac{a\sqrt{5}-a}{2}\right)$, fait voir que les viteſſes reſtantes TU (u) y doivent toûjours diminuer avec CT (y) ; puiſque le rapport ou la fraction $\frac{AB+GT}{AB-GT}$ diminuë à meſure que les GT deviennent plus petites, c'eſt-à-dire (*Solut. art.* 3. à l'infini du côté de C.

COROLLAIRE VI.

Quoique les TU croiſſent à l'infini (*Corol.* 4.) depuis AH du côté de C dans les Fig. 1. 2. & qu'elles diminuent au contraire à l'infini (*Corol.* 5.) du même côté de C dans la Fig. 3. Celles-là (*Fig.* 1. 2.) ne peuvent jamais

mais être plus grandes, ni celles-ci (*Fig.* 3.) plus petites que $AD\left(\frac{a\sqrt{5}-a}{2}\right)$, même quand AT seroit infinie; puisque AT infinie, rendant (*Solut. art.* 3.) $GT=0$, l'équation générale $TU=\frac{AB\mp GT}{AB\pm GT}\times\frac{AB\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}AB$ trouvée dans la Solut. art. 5. pour tous les cas (*Fig.* 1. 2. 3.) se réduiroit alors à $TU=\frac{AB\sqrt{5}-AB}{2}=\frac{a\sqrt{5}-a}{2}$ (*Solut. art.* 3.) $=AD$. Ce qui fait encore voir que dans quelque cas que ce soit, la Courbe HUC des vitesses restantes TU (u) ne peut arriver jusqu'en DC parallele à ATC qu'à une distance infinie de AD perpendiculaire à l'une & à l'autre dans l'origine A des tems ou des abscisses AT (t); & qu'ainsi dans tous les cas imaginables cette droite DC doit être une asymptote de cette Courbe HUC, comme on l'a déja vû pour tous ces cas dans l'art. 3. de la Solution, & pour celui de la Fig. 1. dans le Corol. 1. de la pag. 247. où les vitesses commencent à zero comme ici lorsque $b=0$.

COROLLAIRE VII.

Puisque (*Corol.* 6.) lorsque AH (*Fig.* 1. 2.) est moindre que AD, les vitesses TU (u) croissent toûjours jusqu'à DC; & que lorsque AH (*Fig.* 3.) est plus grande que AD, ces vitesses TU décroissent toûjours jusqu'à la même DC, à laquelle le Corol. 6. fait voir qu'elles n'aboutiront de part & d'autre qu'après un tems infini AT (t), qui à la fin rendroit TU (u) $=AD\left(\frac{a\sqrt{5}-a}{2}\right)$, & changeroit ainsi l'équation $dt=\frac{aadu}{aa-au-uu}$ de la Courbe HUC en $dt=\frac{4aadu}{4aa-2aa\times\overline{\sqrt{5}+1}-aa\times\overline{\sqrt{5}-1}^2}=\frac{4du}{4-2\sqrt{5}+2-5+2\sqrt{5}-1}=\frac{4du}{0}$; Alors par tout là les accroissemens ou décroissemens du se trouvant nuls, il est manifeste que si le mouvement continuoit, ce seroit après cela d'une vitesse constante $=AD\left(\frac{a\sqrt{5}-a}{2}\right)$ qui le rendroit uniforme. Aussi ce cas de $u=\frac{a\sqrt{5}-a}{2}$ changeant l'équation $v-r=u$ trouvée dans

la Solut. art. 1. en $v - r = \frac{a\sqrt{s} - a}{2}$, donneroit-il alors $dv - dr = 0$, ou $dv = dr$, c'eſt-à-dire (*Lem. art.* 4. *pag.* 244.) la peſanteur du mobile égale à la réſiſtance que lui feroit alors le milieu ſuppoſé, en regardant cette peſanteur conſtante comme cauſe de l'acceleration primitive (dv) continuellement (*hyp.*) ajoûtée à la viteſſe initiale AH ou AF (b) laquelle fût ici de projection verticale de haut en bas. Et cette égalité de la peſanteur du mobile avec la réſiſtance qui s'oppoſeroit ici à ſa viteſſe AD $\left(\frac{a\sqrt{s} - a}{2}\right)$, empêchant également l'une & l'autre de rien changer à cette viteſſe ; cette même viteſſe AD, non-ſeulement reſteroit uniforme tant que le mouvement continuëroit dans le milieu ſuppoſé, mais encore ſeroit la plus grande (appellée *terminale* par M. Hughens) que le mobile pût jamais y acquerir en vertu de ſa peſanteur. Ainſi, au langage de M. Hughens, la viteſſe AD $\left(\frac{a\sqrt{s} - a}{2}\right)$ à laquelle dans tous les cas les viteſſes reſtantes TU (u) ſe réduiroient ici après un tems AT (t) infini, ſeroit égale à la terminale du mobile dans le milieu ſuppoſé.

COROLLAIRE VIII.

Donc ſi la viteſſe AH (b) de projection verticale de haut en bas, ſe trouvoit égale à la terminale AD $\left(\frac{a\sqrt{s} - a}{2}\right)$ du corps jetté, c'eſt-à-dire (*Corol.* 7.) égale à la plus grande qu'il pût acquerir en vertu de ſa peſanteur conſtante en tombant dans le milieu ſuppoſé ; le mouvement de ce corps ſeroit uniforme à l'infini dès le premier inſtant de ſa chute : puiſque ce cas de u (b) $= \frac{a\sqrt{s} - a}{2}$ dès ce premier inſtant, qui rend dès-lors (comme dans le Corol. 7.) la réſiſtance du milieu égale à la peſanteur du mobile, rendant ce corps par leur équilibre comme s'il n'avoit aucune peſanteur, ni le milieu aucune réſiſtance, rendroit auſſi la viteſſe de projection hors d'état d'être augmen-

tée ni retardée, la pesanteur devant l'emporter sur la résistance pour le premier, & la résistance sur la pesanteur pour le second, ce que leur égalité une fois arrivée ne permet plus.

COROLLAIRE IX.

Ce seroit encore en ce que ce cas de b (AH) $= \frac{a\sqrt{5}-a}{2}$ (AD) ou de $2ab = aa\sqrt{5} - aa$, réduisant AL (*Solut. art.* 4.) $= \frac{aa\sqrt{5}-aa-2ab}{a\sqrt{5}+a+2b}$, à $AL = 0$, & conséquemment la logarithmique LGC à se confondre avec son asymptote ATC, en rendant aussi toutes ses GT (y) $= 0$; ce même cas réduiroit l'équation $u = \frac{a+y}{a\pm y} \times \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}a$ trouvée dans la Solut. art. 4. à u (TU) $= \frac{a\sqrt{5}-a}{2}$ (AD), c'est-à-dire que ce cas donneroit par tout $TU = AD$ (*Corol.* 1.) $= AH$, & confondant ainsi la Courbe HUC avec son asymptote DC, rendroit (malgré les résistances supposées) la vitesse TU (u) par tout uniforme $= AD \left(\frac{a\sqrt{5}-a}{2}\right)$; d'où l'on voit encore qu'en ce cas la pesanteur du mobile seroit par tout égale à la résistance du milieu, c'est-à-dire, égale à chaque résistance instantanée de ce milieu.

COROLLAIRE. X.

Cette égalité de la pesanteur constante du mobile avec chaque résistance instantanée du milieu supposé, rendant (*Lem. art.* 4. *pag.* 244.) $dr = dv$ (La Solution donnant $v = b + t$) $= dt$, fait voir aussi qu'alors la Courbe ARC des résistances totales ou des vitesses perduës dégenereroit en une ligne droite parallele à FVC, & donneroit par-là $AF = RV$ (*Solut. art.* 6.) $= TU$: de sorte que le Corol. 1. donnant $AF = AH$ (*hyp.*) $= AD$, on retrouve encore ici TU (u) $= AD \left(\frac{a\sqrt{5}-a}{2}\right)$ conformément aux précedens Corol. 8. 9. c'est-à-dire (comme dans ces deux Corollaires) que dès que la vitesse d'un corps jetté verticalement de haut en bas, sera égale à sa terminale, le

mouvement en sera uniforme pour toûjours après cela dans le milieu résistant supposé. Par conséquent lorsque la vitesse *AF* ou *AH* de projection verticale de haut en bas, sera égale à la terminale *AD* du corps ainsi jetté dans ce milieu, la Courbe *HUC* dégenerera en une ligne droite confonduë avec son asymptote *DC*, ainsi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 9.

COROLLAIRE XI.

FIG. I. Mais si la force ou vitesse *AH* ou (*Corol.* 1.) *AF* (b) de projection étoit nulle, ensorte que le mobile n'eût plus que sa pesanteur pour descendre, ainsi que dans le Probl. de la pag. 244. le point *H* se trouvant alors en *A* aussi bien que le point *F*, comme dans la Fig. 1. la Courbe *HUC* seroit non-seulement la même, mais aussi en même position que dans ce Problême-là qu'on voit n'être qu'un cas de celui-ci, lequel par conséquent donneroit aussi tous les Corollaires qu'on a tirés de celui-là, en faisant ainsi $AH\ (b) = 0$ dans tout ce qu'on voit ici & dans la suite.

COROLLAIRE XII.

FIG. I. II. III. De ce que dans tous les cas (*Corol.* 6.) $AD = \frac{a\sqrt{5}-a}{2}$, & (*Solut. art.* 5.) $AB = a$, l'on aura en général $AB.\ AD :: a.\frac{a\sqrt{5}-a}{2} :: 2.\sqrt{5}-1.$ c'est-à-dire *AB* plus grande que *AD* dans tous les cas; & conséquemment (*Corol.* 4. 5. 6.) plus grande que *AH* dans celui des Fig. 1. 2. & en telle raison qu'on voudra à *AH* dans celui de la Fig. 3.

COROLLAIRE XIII.

Il suit encore en général des Corol. 6. 7. 8. 9. que les vitesses *TU* (u) restantes de celle de projection & des primitivement accelerées, à la fin des tems *AT*, doivent être ici à la plus grande *AD* $\left(\frac{a\sqrt{5}-a}{2}\right)$ que le mobile puisse jamais avoir dans le milieu supposé en vertu de la

seule pesanteur, même après un tems infini : : *TU. AD.* Et qu'ainsi (*Lem. art.* 3. *pag.* 244.) les espaces ici parcourus en vertu de ces vitesses restantes *TU* (u) pendant un tems *AT* (t) quelconque, doivent être à ce que le mobile en parcouroit en pareil tems d'une vitesse uniforme égale à sa terminale *AD* $\left(\frac{a\sqrt{5}-a}{2}\right)$: : *ATUH. ATSD.*

COROLLAIRE XIV.

Quant à la comparaison entr'eux de ces espaces ici parcourus en vertu des vitesses restantes *TU* (u) pendant les tems *AT* (t), on voit de même (*Lem. art.* 3. *pag.* 244. que ces espaces doivent être entr'eux comme les aires correspondantes *ATUH* ($\int u\,dt$). Mais la Solution (*art.* 4.) donnant en général $\frac{\pm 5a^3y}{\overline{a\pm y}^2} = aa - au - uu$, & $u = \frac{\overline{a\mp y}}{\overline{a\pm y}} \times \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}a$ dont les signes superieurs de $\mp$, $\pm$, sont pour le cas des Fig. 1. 2. & les inferieurs pour celui de la Fig. 3. D'où résulte $du = \mp\frac{a\sqrt{5}}{2}\,dy \times \frac{\overline{a\pm y} + \overline{a\mp y}}{\overline{a\pm y}^2} = \mp\frac{a\sqrt{5}}{2} \times dy \times \frac{2a}{\overline{a\pm y}^2} = \frac{\mp dy}{\overline{a\pm y}^2} \times aa\sqrt{5}$, & conséquemment $\frac{aadu}{aa-au-uu}$ (dt) $= \frac{\mp dy \times a^4\sqrt{5}}{\pm 5a^3y} = -\frac{dy}{y} \times \frac{a}{\sqrt{5}}$, c'est-à-dire en général, $dt = -\frac{dy}{y} \times \frac{a}{5}$ comme dans l'art. 3. de la Solution ; cette Solution doit aussi donner en général $udt = \frac{-ady \pm ydy}{ay \pm yy} \times \frac{aa}{2} + \frac{dy}{y} \times \frac{aa}{2\sqrt{5}}$ (à cause de $\frac{-ady \pm ydy}{ay \pm yy} = -\frac{dy}{y} \pm \frac{2dy}{b \pm y}$) $= -\frac{dy}{y} \times \frac{aa}{2} \pm aa \times \frac{dy}{a \pm y} + \frac{dy}{y} \times \frac{aa}{2\sqrt{5}} = \frac{aa - aa\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times \frac{dy}{y} \pm aa \times \frac{dy}{a \pm y}$, dont l'intégrale est $\int u\,dt$ (*ATUH*) $= \frac{aa - aa\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times ly \pm aa \times l\overline{a \pm y} + q = \frac{aa - aa\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times lGT \pm aa \times l\overline{AB + GT} + q$, en prenant *GT* pour la valeur de y dans ly, & de $\pm y$ dans $l\overline{a \pm y}$, l'art. 4. de la Solut. donnant $\pm y$ pour expression générale de *GT* dans tous les cas. Mais celui de *ATUH* $= 0$, qui (en rendant *TU* $=$ *AH*) rend *GT* $=$ *AL*, réduit cette

intégrale à $= 0 \frac{aa - aa\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times lAL \pm aa \times l\overline{AB + AL} + q$, d'où résulte $q = \frac{aa\sqrt{5} - aa}{2\sqrt{5}} \times lAL \mp aa \times l\overline{AB + AL}$. Donc cette intégrale précise est $ATUH = \frac{aa - aa\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times lGT + \frac{aa\sqrt{5} - aa}{2\sqrt{5}} \times lAL + aa \times l\overline{AB + GT} \mp aa \times l\overline{AB + AL}$ (la Solut. art. 3. donnant $\frac{a\sqrt{5} - a}{2} = AD$) $= -\frac{a}{\sqrt{5}} \times AD \times lGT + \frac{a}{\sqrt{5}} \times AD \times lAT \pm aa \times l\overline{AB + GT} \mp aa \times l\overline{AB + AL}$.

Or si après avoir pris dans les Fig. 1. 2. $B\lambda = AL$, $B\gamma = GT$, depuis l'origine B vers λ sur AB prolongée de ce côté-là ; & dans la Fig. 3. $Ab = AB$, $b\lambda = AL$, $b\gamma = GT$, sur BA prolongée de l'autre côté de AT ; on fait λM, γP, BY, bY paralleles à TA ; & que des points M, P, Y, où elles rencontrent la logarithmique CGL prolongée aussi du côté de M, on lui fasse les ordonnées MN, PQ, YZ, perpendiculaires en N, Q, Z, sur TA prolongées de ce côté-là : l'on aura (en prenant AL pour l'unité) $lAL = 0$, $lGT = -AT$, $l\overline{AB + AL} = lA\lambda = lMN = AN$, & $l\overline{AB + GT} = lA\gamma = lPQ = AQ$. Donc l'intégrale précedente sera aussi pour lors $ATUH = \frac{a}{\sqrt{5}} \times AD \times AT \pm aa \times AQ \mp aa \times AN = \frac{a}{\sqrt{5}} \times AD \times AT \mp aa \times NQ = \frac{AB \times AD \times AT}{\sqrt{5}} \mp AB \times AB \times NQ$, dans laquelle valeur NQ aura son origine en N; qui répond à la plus grande $GT = AL = B\lambda$ dans les Fig. 1. 2. ou $GT = AL = b\lambda$ dans la Fig. 3. lorsque $AT = 0$ dans toutes ; & son terme en Z qui répond à la plus petite $B\gamma = GT = 0$ dans les Fig. 1. 2. $b\gamma = GT = 0$ dans la Fig. 3. lorsque AT est infinie dans toutes.

Donc enfin (*Lem. art. 3. pag.* 244.) les espaces parcourus pendant les tems AT (t), seront ici entr'eux dans tous les cas possibles, comme les grandeurs $\frac{AB \times AD \times AT}{\sqrt{5}} \mp AB \times AB \times NQ$ correspondantes, ou comme les correspondantes $AD \times AT \mp AB \times NQ \times \sqrt{5}$: c'est-à-dire, comme les correspondantes $AD \times AT - AB \times NQ \times \sqrt{5}$ dans cas des Fig. 1. 2. & comme les correspondantes $AD \times AT$

$+ AB \times NQ \times \sqrt{5}$ dans celui de la Fig. 3.

AUTRE SOLUTION.

I. Soit presentement $\pm \frac{5}{4} \times \frac{a^4}{5xx} = aa - au - uu$, ou $xx = \frac{5}{4} \times \frac{\pm a^4}{aa - au - uu} = \frac{5}{4} \times \frac{a^4}{\pm aa \mp au \mp uu}$, d'où résulte $x = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp au \mp uu}}$, & conséquemment $x = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp ab \mp bb}}$ au commencement du mouvement où l'on suppose la premiere vitesse $u = b$: c'est-à-dire alors $x = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{aa}{\sqrt{aa - ab - bb}}$ dans le cas (*Fig.* 1. 2.) de $b < \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$, & $x = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{aa}{\sqrt{-aa + ab + bb}}$ dans celui (*Fig.* 3.) de $b > \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$: D'où l'on voit que les superieurs des doubles signes $\pm$, $\mp$, sont pour le premier de ces deux cas, & les inferieurs pour le second.

II. L'équation $\pm \frac{5}{4} \times \frac{a^4}{xx} = aa - au - uu$ donne aussi $uu + au + \frac{1}{4} aa = \frac{5}{4} aa \mp \frac{5}{4} \times \frac{a^4}{xx} = \frac{5}{4} \times \frac{aaxx \mp a^4}{xx}$, & conséquemment $u + \frac{1}{2} a = \frac{a\sqrt{5}}{2x} \times \sqrt{xx \mp aa}$, ou $u = \frac{a\sqrt{5}}{2x} \times \sqrt{xx \mp aa} - \frac{1}{2} a$; d'où résulte $du = \frac{a\sqrt{5}}{2} \times \frac{-dx\sqrt{xx \mp aa} + \frac{xxdx}{\sqrt{xx \mp aa}}}{xx}$ $= \frac{-xxdx \pm aadx + xxdx}{xx\sqrt{xx \mp aa}} \times \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \times \frac{\pm aadx}{xx\sqrt{xx \mp aa}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{a^3 dx}{xx\sqrt{xx \mp aa}}$. Donc ayant aussi (*art.* 1) $\pm \frac{5}{4} \times \frac{a^4}{xx} = aa - au - uu$, l'on aura ici $\frac{aadu}{aa - au - uu} = \frac{\pm \frac{\sqrt{5}}{2} \times a^5 dx}{\pm \frac{5}{4} a^4 \sqrt{xx \mp aa}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{adx}{\sqrt{xx \mp aa}} = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times \frac{aadx}{2\sqrt{xx \mp aa}}$. Mais on a aussi trouvé ci dessus (*Solut.* 1. *art.* 2.) $\frac{aadu}{aa - au - uu} = dt$. Donc on aura pareillement ici $dt = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times \frac{aadx}{2\sqrt{xx \mp aa}}$. Par conséquent (en intégrant) $t = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times \int \frac{aadx}{2\sqrt{xx \mp aa}}$: c'est-à-dire $t = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times \int \frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}}$ pour le cas (*Fig.* 1. 2.) de $b < \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$, & $t = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times \int \frac{aadx}{2\sqrt{xx + aa}}$ pour celui (*Fig.* 3.) de $b > \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$.

FIG. IV. V. VI.

III. Pour trouver ces deux intégrales à la fois, soit une hyperbole équilatere LPO sur l'axe ZC, dont le centre soit Z, le demi-axe transverse $ZL = a = AB$, les abscisses $ZQ = x$, & conséquemment les ordonnées perpendiculaires correspondantes $QP = \sqrt{xx \mp aa}$: sçavoir $QP = \sqrt{xx - aa}$ dans les Fig 4. 5. pour le cas de $b < \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$, & $PQ = \sqrt{xx + aa}$ dans la Fig. 6. pour le cas de $b > \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$. Soit prise $ZM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, & faite sur elle en M une perpendiculaire MB qui rencontre l'hyperbole LPO en Δ, son asymptote ZO en D, & la droite ZP en N.

1°. Par la nature de l'hyperbole LPO, l'on aura en général $M\Delta = \sqrt{\frac{5}{4}aa \mp aa}$: sçavoir $M\Delta = \sqrt{\frac{5}{4}aa - aa} = \sqrt{\frac{1}{4}aa} = \frac{1}{2}a$ dans les Fig 4. 5. & $M\Delta = \sqrt{\frac{5}{4}aa + aa} = \sqrt{\frac{9aa}{4}} = \frac{3}{2}a$ dans la Fig. 6.

2°. Les triangles (*Constr.*) semblables ZQP, ZMN, donneront aussi en général $ZQ\,(x)\; ZM\,\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right) :: QP\,(\sqrt{xx \mp aa}).\; MN = \frac{a\sqrt{5}}{2x}\sqrt{xx \mp aa}$. De sorte qu'en prenant $MA = \frac{1}{2}a$, ce qui fera (*nomb.* 1.) tomber A en Δ dans les Fig. 4. 5. l'on aura dans toutes les trois Fig. 4. 5. 6. $AN = \frac{a\sqrt{5}}{2x}\sqrt{xx \mp aa} - \frac{1}{2}a$ (*art.* 2.) $= u$, vitesse restante à la fin du tems t malgré les résistances supposées.

IV. De plus ayant (*hyp.*) $u = b$ au commencement du mouvement, & conséquemment alors (*art.* 1.) $x = \frac{a\sqrt{5}}{2} \times \frac{a}{\sqrt{\pm aa \mp ab \mp bb}}$, & conséquemment aussi pour lors $\sqrt{xx \mp aa} = \sqrt{\frac{\frac{5}{4}a^4}{\pm aa \mp ab \mp bb} \mp aa} = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}a^4 - a^4 + a^3b + aabb}}{\sqrt{\pm aa \mp ab \mp bb}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}a^4 + a^3b + aabb}}{\sqrt{\pm aa \mp ab \mp bb}} = \frac{\frac{1}{2}aa + ab}{\sqrt{\pm aa \mp ab \mp bb}}$; si l'on prend l'abscisse $Z\varphi\,(x) = \frac{a\sqrt{5}}{2} \times \frac{a}{\sqrt{\pm aa \mp ab \mp bb}}$, & conséquemment l'ordonnée correspondante $\varphi\psi\,(\sqrt{xx \mp aa}) = \frac{\frac{1}{2}aa + ab}{\sqrt{\pm aa \mp ab \mp bb}}$, & qu'on mene la droite $Z\psi$ qui rencontre MB en H; les

les triangles ſemblables $Z\varphi\psi$, ZMH, donneront auſſi $Z\varphi \left(\frac{a\sqrt{5}}{2} \times \frac{a}{\sqrt{\pm aa \mp ab \mp bb}}\right) . \varphi\psi \left(\frac{\frac{1}{2}aa + ab}{\sqrt{\pm aa \mp ab \mp bb}}\right) :: ZM \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) . MH = \frac{1}{2}a + b$. Donc ayant déja (*art.* 3. *nomb.* 2.) $MA = \frac{1}{2}a$, l'on aura auſſi $AH = b$ viteſſe initiale ſuppoſée ; & de plus $AD = MD - AM = ZM - AM = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{5} - aa}{2}$.

V. Puiſque (*art.* 3. *nomb.* 2.) $AN = u$ viteſſe reſtante à la fin du tems t malgré les réſiſtances ſuppoſées, & (*art.* 4.) $AH = b$ viteſſe initiale, ou ſuppoſée au commencement de ce tems ; il eſt manifeſte que $t = 0$, rendant $u = b$, rend auſſi $AN = AH$, & conſéquemment ZP en $Z\psi$, QP en $\varphi\psi$, & ZQ en $Z\varphi$; ce qui réduit alors le ſecteur hyperbolique LZP à $LZ\psi$.

VI. Après cela pour trouver l'intégrale $t = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times \int \frac{aadx}{2\sqrt{xx \mp aa}}$ requiſe dans l'art. 2. ſoit l'ordonnée qp infiniment proche de QP, avec le droite Zp infiniment proche de ZP. Le triangle rectangle $ZQP = \frac{x}{2}\sqrt{xx \mp aa}$ differentié donnera $QPpq \pm PZp = \frac{dx\sqrt{xx \mp aa}}{2} + \frac{xxdx}{2\sqrt{xx \mp aa}} = \frac{2xxdx \mp aadx}{2\sqrt{xx \mp aa}}$. Mais la trapeſe $QPpq = dx\sqrt{xx \mp aa} = \frac{2xxdx \mp 2aadx}{2\sqrt{xx \mp aa}}$. Donc le ſecteur hyperbolique $\pm PZp = \frac{\pm adx}{2\sqrt{xx \mp aa}}$, ou $\frac{aadx}{2\sqrt{xx \mp aa}} = PZp$. Par conſéquent (en intégrant) $\int \frac{aadx}{2\sqrt{xx \mp aa}} = LZP + q$. Donc ayant en général (*art.* 2.) $t = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times \int \frac{aadx}{2\sqrt{xx \mp aa}}$, l'on aura auſſi en général $t = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times LZP + q$. Mais le cas de $t = 0$, rendant (*art.* 5.) $LZP = LZ\psi$, réduit cette intégrale à $0 = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times LZ\psi + q$, d'où réſulte $q = -\frac{4}{a\sqrt{5}} \times LZ\psi$. Donc cette intégrale complette eſt $t = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times LZP - \frac{4}{a\sqrt{5}} \times LZ\psi$

$=\frac{4}{a\sqrt{5}} \times \psi ZP$ (l'art. 5. donnant $ZM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, & conséquemment $\frac{2}{ZM} = \frac{4}{a\sqrt{5}}$) $= 2 \times \frac{\psi ZP}{ZM}$, en commençant à l'origine ψ vers O à l'infini.

VII. Donc en prenant par tout du point A ſur la droite ATC parallele à ZC, les abſciſſes $AT = 2 \times \frac{\psi ZP}{ZM}$ l'on aura auſſi par tout (*art.* 6.) ces $AT = t$ pour les tems écoulés depuis le commencement du mouvement. Mais on a d'ailleurs (*art.* 3. *nomb.* 2.) les $AN = u$ pour les viteſſes reſtantes à la fin de ces tems malgré les réſiſtances ſuppoſées. Donc en faiſant autant de rectangles NT, de chacune des AT (t) & AN (u) correſpondantes, la ligne UC qui paſſera par tout leurs angles U ainſi trouvés à l'infini, ſera la Courbe cherchée des viteſſes (u) reſtantes à la fin des tems (t) malgré les réſiſtances ſuppoſées, laquelle on a vû (*Solut.* 1. *art.* 2.) avoir $dt = \frac{aadu}{aa - au - uu}$ pour ſon équation, les AT (t) & AN (u) venant (*art.* 3. *nomb.* 2. *art.* 6.) d'en réſulter. *Ce qu'il falloit encore premierement trouver.*

VIII. Si l'on prend preſentement $AF = AH$ (*art.* 4.) $= b$ ſur DA du côté de M, & qu'on mene la droite FV inclinée de 45. degrés ſur FX parallele à ATC, leſquelles rencontrent UT prolongée en V, X; le Lem. art. 1. pag. 244. donnera $TV = v$ pour les viteſſes primitives qui dans le vuide, & à la fin des tems AT ou FX, réſulteroient de l'initiale AF (b) & de l'acceleration qu'on y ſuppoſe avec Galilée en raiſon de ces tems écoulés, deſquelles viteſſes primitives TV (v) les reſtantes à la fin de ces mêmes tems dans le milieu réſiſtant ſuppoſé, ſeroient TU (u). Le même Lem. art. 1. pag. 243. fait voir auſſi qu'après la conſtruction précedente (*art.* 7.) de la Courbe VC de ces viteſſes reſtantes TU (u), ſi l'on prend par tout $UR = TV$, la ligne ARC, qui paſſera par tous les points R ainſi trouvés, ſera pareillement la Courbe des réſiſtances totales TR (r) faites par le milieu réſiſtant ſuppoſé pendant chaque tems entier écoulé AT (t); & conſé-

quemment aussi la Courbe des vitesses perduës ou retranchées des primitives TV (v) pendant chacun de ces tems entiers, en sorte que les restantes à la fin de ces tems malgré les résistances supposées, ne soient que TU (u) $= UR - TR = TV - TR = RV$ conformément à l'art. 1. du Lem. de la pag. 243. *Ce qu'il falloit encore secondement trouver.*

Corollaire XV.

Puisque (*hyp.*) $u = b$ au commencement du mouvement, qui rend AT (t) $= 0$, il est manifeste que T en A rendra ici TU (u) $= b$ (*Solut.* 2. *art.* 4.) $= AH$; & qu'ainsi la Courbe UC passera par H, ainsi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 1.

Corollaire XVI.

Le cas de x infinie dans $\frac{a\sqrt{5}}{2x}\sqrt{xx \mp aa} - \frac{1}{2}a$ (*Solut.* 2. *art.* 3. *nomb.* 2.) $= AN$ (*Solut.* 2. *art.* 7.) $= TU$, rendant pour lors TU (u) $= \frac{a\sqrt{5}}{2x}\sqrt{xx} - \frac{1}{2}a = \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$ (*Solut.* 2. *art.* 4.) $= AD$; cette même x (ZQ) infinie rendant aussi pour lors le secteur hyperbolique $\div ZP$ infini, & conséquemment le tems AT $\left(2 \times \frac{\div ZP}{ZM}\right)$ pareillement infini; il est manifeste que ce cas de AT (t) infini, doit rendre par tout ici la derniere vitesse TU (u) $= AD$, qui pour cette raison est appellée *terminale* : c'est-à-dire que AD $\left(\frac{a\sqrt{5} - a}{2}\right)$ doit être la plus grande de toutes les vitesses possibles TU (u) restantes des primitives TV (v) malgré les résistances supposées dans les Fig. 4. 5. dans lesquelles la vitesse initiale AD (b) est moindre que AD $\left(\frac{a\sqrt{5} - a}{2}\right)$; & la moindre de toutes les possibles dans la Fig. 6. dans laquelle l'initiale AH (b) est plus grande que cette terminale AD $\left(\frac{a\sqrt{5} - a}{2}\right)$. D'où l'on voit que DC parallele à ATC, doit être une asymptote de la Courbe HUC

des viteſſes reſtantes TU (u) dans tous les cas poſſibles, ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 6. Et delà ſuivent encore les Corol. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. de la maniere qu'on les a vû ſuivre de ce Corol. 6.

COROLLAIRE XVII.

Pour ce qui eſt des eſpaces ici parcourus pendant les tems AT (t) en vertu des viteſſes TU (u) reſtantes des primitives TV (v) à chaque inſtant de ces tems; la Solut. 2. art. 2. ayant donné $u = \frac{a\sqrt{5}}{2x}\sqrt{xx \mp aa} - \frac{1}{2}a$, & $dt = \frac{4}{a\sqrt{5}} \times \frac{aadx}{2\sqrt{xx \mp aa}}$, doit donner auſſi $udt = \frac{aadx}{x} - \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{aadx}{2\sqrt{xx \mp aa}}$. Donc, en intégrant, $\int udt$ ($ATUH$) $= aa \times lx - \frac{2}{\sqrt{5}} \times \int \frac{aadx}{2\sqrt{xx \mp aa}} + q$ (cette même Solut. 2. art. 3. 6. donnant $x = ZQ$, & $\int \frac{aadx}{2\sqrt{xx \mp aa}} = LZP$) $= aa \times lZQ - \frac{2}{\sqrt{5}} \times LZP + q$. Mais le cas de $ATUH = 0$, qui rend auſſi AT (t) $= 0$, rendant (*Solut.* 2. *art.* 5.) $LZP = LZ\psi$, & $ZQ = Z\varphi$, réduit cette intégrale à $0 = aa \times lZ\varphi - \frac{2}{\sqrt{5}} \times LZ\psi + q$, d'où réſulte $q = -aa \times lZ\varphi + \frac{2}{\sqrt{5}} \times LZ\psi$. Donc cette intégrale préciſe eſt $ATUH = aa \times lZQ - aa \times lZ\varphi - \frac{2}{\sqrt{5}} \times LZP + \frac{2}{\sqrt{5}} \times LZ\psi = aa \times l\frac{ZQ}{Z\varphi} - \frac{2}{\sqrt{5}} \times \psi ZP$ qui a ψ pour origine fixe. Donc (*Lem. art.* 3. *pag.* 244.) les eſpaces parcourus pendant les tems AT $\left(2 \times \frac{\psi ZP}{ZM}\right)$, doivent être ici entr'eux comme les grandeurs $aa \times l\frac{ZQ}{Z\varphi} - \frac{2}{\sqrt{5}} \times \psi ZP$ correſpondantes, ou comme les correſpondantes $a \times l\frac{ZQ}{Z\varphi} - \frac{2}{a\sqrt{5}} \times \psi ZP$, c'eſt-à-dire (*Solut.* 2. *art.* 3.) comme les correſpondantes $ZL \times \frac{ZQ}{Z\varphi} - \frac{\psi ZP}{ZM}$

COROLLAIRE XVIII.

Pour exprimer ſans logarithmes, & par le moyen de la ſeule hyperbole LPO, les eſpaces ici parcourus, déja exprimés (*Corol.* 14.) en ſeuls logarithmiques; ſoient du centre Z par les points φ, $\mathcal{Q}$, q, les arcs de cercles $\varphi\beta$, $\mathcal{Q}\Pi$, $q\pi$, leſquels rencontrent en β, Π, π, l'aſymptote ZO de l'hyperbole LPO, deſquels points β, Π, π, ſoient les ordonnées $\beta\delta$, $\Pi\mu$, $\pi\nu$, perpendiculaires à cette aſymptote, & qui rencontrent l'hyperbole en δ, μ, ν.

Cela fait, ſi l'on appelle $\Pi\mu$, s; ayant déja (*Solut.* 2. *art.* 3. 4.) $ZL = a$, $Z\varphi = \frac{a\sqrt{5}}{2} \times \frac{a}{\sqrt{\pm aa \mp ab \mp bb}}$, $Z\mathcal{Q} = x$; l'on aura non-ſeulement $Z\beta = \frac{a\sqrt{5}}{2} \times \frac{a}{\sqrt{\pm aa \mp ab \mp bb}}$, & $Z\Pi = x$; mais encore $sx = \frac{1}{2}aa$, ou $2s = \frac{aa}{x}$; & par conſéquent $\frac{aadx}{x} = 2sdx = 2 \times \Pi\mu\nu\pi$. Or (*Corol.* 17.) $udt = \frac{aadx}{x} - \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{aadx}{2\sqrt{xx \mp aa}}$. Donc auſſi $udt = 2 \times \Pi\mu\nu\pi - \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{aadx}{2\sqrt{xx \mp aa}}$. Par conſéquent $\int udt$ ($ATUH$) $= -2 \times O\Pi\mu O - \frac{2}{\sqrt{5}} \times \int \frac{aadx}{2\sqrt{xx \mp aa}} + q$, en prenant $\Pi\mu\nu\pi$ pour l'élement de l'aire $O\Pi\mu O$, laquelle diminuant à meſure que $ATUH$ augmente, doit réſulter négative d'un élement poſitif. Or (*Solut.* 2. *art.* 6.) $\int \frac{aadx}{2\sqrt{xx \mp aa}} = LZP$. Donc $ATUH = -2 \times O\Pi\mu O - \frac{2}{\sqrt{5}} \times LZP + q$. Mais le cas de $ATUH = 0$, le même que celui de AT (t) $= 0$, qui (*Solut.* 2. *art.* 5.) rend $Z\mathcal{Q} = Z\varphi$, & conſéquemment (*Conſtr.*) $Z\Pi = Z\beta$, rendant ainſi $O\Pi\mu O = O\beta\delta O$, & $LZP = LZ\psi$, réduit cette intégrale à $0 = -2 \times O\beta\delta O - \frac{2}{\sqrt{5}} \times LZ\psi + q$, d'où réſulte $q = 2 \times O\beta\delta O + \frac{2}{\sqrt{5}} \times LZ\psi$. Donc cette intégrale préciſe eſt $ATUH = 2 \times O\beta\delta O + \frac{2}{\sqrt{5}} \times LZ\psi - 2 \times O\Pi\mu O - \frac{2}{\sqrt{5}} \times LZP$ $= 2 \times \beta\delta\mu\Pi - \frac{2}{\sqrt{5}} \times \psi ZP$, difference d'aires qui ont leurs

origines en β, ψ. Donc aussi (*Lem. art. 3. pag.* 244.) les espaces ici parcourus pendant les tems AT $\left(2\times\frac{\psi ZP}{ZM}\right)$ doivent être ici entr'eux comme les differences $2\times\beta\delta\mu\Pi$ $-\frac{2}{\sqrt{5}}\times\psi ZP$ correspondantes, ou comme les correspondantes $\beta\delta\mu\Pi\times\sqrt{5}-\psi ZP$.

COROLLAIRE XIX.

FIG. VII. VIII. IX.

Tout ce qu'on voit des Fig. 4. 5. 6. dans les Fig. 7. 8. 9. y demeurant le même, pour y trouver encore autrement le rapport des espaces ici parcourus pendant les tems AT $\left(2\times\frac{\psi ZP}{ZM}\right)$, soit du centre Z par A l'hyperbole équilatere ωAC entre les asymptotes orthogonales ZC, $Z\omega$, dans les Fig. 7. 8. 9. avec son opposée KYG entre les mêmes asymptotes prolongées vers K, G, dans la Fig. 9. Soient prises ensuite sur CK les abscisses $ZV=\frac{\overline{ZM}^2-\overline{MH}^2}{ZL}$ constante, & $ZS=\frac{\overline{ZM}^2-\overline{MN}^2}{ZL}$ variable : positives l'une & l'autre dans les Fig. 7. 8. qui ont MH, MN, plus petites que MD égale à ZM, & négatives dans la Fig. 9. qui les a plus grandes que cette même MD ou ZM. De sorte que si l'on fait les ordonnées VX, SY, correspondantes paralleles à MA, & qui rencontrent les hyperboles ωAC, KYG, en X, Y; ces hyperboles opposées donnant $VX=\frac{ZM\times MA}{ZV}$, $SY=\frac{ZM\times MA}{ZS}$, ces ordonnées YX, SY, se trouveront pareillement positives dans les Fig. 7. 8. & négatives dans la Fig. 9. de même que les diviseurs ou numerateurs ZV, ZS, le dénominateur commun $ZM\times MA$ étant positif de part & d'autre ; d'où l'on voit que ces trois Figures sont ici telles qu'elles y doivent être.

Cela posé, les art. 3. 4. de la Solut. 2. donnant $ZL=a$, $ZM=\frac{a\sqrt{5}}{2}$, $MA=\frac{1}{2}a$, $AH=b$, $AN=u$, & conséquemment $MH=\frac{1}{2}a+b$, $MN=\frac{1}{2}a+u$, donneront XV $\left(\frac{\overline{ZM}^2-\overline{MH}^2}{ZL}\right)=\frac{\frac{5}{4}aa-\frac{1}{4}aa-ab-bb}{a}=\frac{aa-ab-bb}{a}$,

& les $ZS\left(\frac{\overline{ZM}^2-\overline{MN}^2}{ZL}\right)=\frac{\frac{5}{4}aa\frac{1}{4}\overline{aa-au-uu}}{a}=\frac{aa-au-uu}{a}$, qui dans le cas de TU (u) $=$ AH (b) deviennent $ZS=\frac{aa-ab-bb}{a}=ZV$, & qui augmentant ou diminuant alternativement avec les TU (u), doivent avoir leurs élemens $Ss=\frac{adu+2udu}{a}$. L'on aura de plus $VX\left(\frac{ZM\times MA}{ZV}\right)$ $=\frac{aa\sqrt{5}}{4}\times\frac{a}{aa-ab-bb}$, & $SY\left(\frac{ZM\times MA}{ZS}\right)=\frac{aa\sqrt{5}}{4}\times\frac{a}{aa-au-uu}$. Donc en ajoûtant l'ordonnée sy parallele à SY, & infiniment près d'elle, l'on aura ici dans tous les cas $SY\times Ss$ ($SYys$) $=\frac{aa\sqrt{5}}{4}\times\frac{adu+2udu}{aa-au-uu}=\frac{a\sqrt{5}}{4}\times\frac{aadu+2audu}{aa-au-uu}$.

Or (*Solut.* 2. *art.* 2.) $\frac{aadu}{aa-au-uu}=\frac{4}{a\sqrt{5}}\times\frac{aadx}{2\sqrt{xx+aa}}$ (*Solut.* 2. *art.* 6) $=\frac{4}{a\sqrt{5}}\times PZp$, ou PZp, $=\frac{a\sqrt{5}}{4}\times\frac{aadu}{aa-au-uu}$. Donc $SYys-PZp=\frac{a\sqrt{5}}{4}\times\frac{2audu}{aa-au-uu}=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{aaudu}{aa-au-uu}$. Mais l'art. 2. de la Solut. 1. donnant $dt=\frac{aadu}{aa-au-uu}$, doit aussi donner $\frac{\sqrt{5}}{2}\times udt=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{aaudu}{aa-au-uu}$. Donc $\frac{\sqrt{5}}{2}\times udt=SYys$ $-PZp$; & (en intégrant) $\frac{\sqrt{5}}{2}\times\int udt=\int SYys-\int PZp+q$ $=VSYX-LZP+q$.

Mais le cas de $\int udt$ ($ATUH$) $=0$, qui rend TU (u) $=AH$ (b), & conséquemment ZS $\left(\frac{aa-au-uu}{a}\right)=$ $\frac{aa-ab-bb}{a}=ZV$, ou $VS=0$, rendant ainsi $VSYX=0$, & (*Solut.* 2. *art.* 5.) $LZP=LZ\psi$, réduit cette intégrale à $0=-LZ\psi+q$, d'où résulte $q=LZ\psi$. Donc cette intégrale précise est $\frac{\sqrt{5}}{2}\times ATUH=VSYX-LZP+$ $LZ\psi=VSYX-\psi ZP$, ou $ATUH=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\overline{VSVX-\psi XP}$. Donc aussi (*Lem. art.* 3. *pag.* 244.) les espaces parcourus pendant les tems AT $\left(2\times\frac{\psi ZP}{ZM}\right)$, doivent être ici entr'eux comme les differences $VSYX-\psi ZP$ des aires hyperboliques $VSYX$, ψZP correspondantes depuis les origines fixes V, ψ, vers Z, O.

COROLLAIRE XX.

La même chose se peut encore trouver en considerant que $PZp . NZn :: \overline{ZP}^2 . \overline{ZN}^2 :: \overline{ZQ}^2 . \overline{ZM}^2 :: \overline{QP}^2 . \overline{MN}^2 :: \overline{ZQ}^2 - \overline{QP}^2 . \overline{ZM}^2 - \overline{MN}^2 :: \pm \overline{ZL}^2 . \overline{ZM}^2 - \overline{MN}^2 :: \pm ZL . \frac{\overline{ZM}^2 - \overline{MN}^2}{ZL}$ (*Corol.* 19.) $:: \pm ZL . \pm ZS :: ZL . ZS$. Le supérieur du double signe $\pm$ étant pour les Fig. 7. 8. & l'inférieur pour la Fig. 9. c'est-à-dire pour les trois ensemble $PZp . NZn :: ZL . ZS$. Car ayant ainsi $ZS = \frac{ZL \times NZn}{PZp} = \frac{ZL \times ZM \times Nn}{2 \times PZp}$ (soit PZp constant & égal $ZL \times dn$, dont dm soit conséquemment un infiniment petit constant) $= \frac{ZM \times Nn}{2dm}$; l'on aura $SY \left(\frac{ZM \times MA}{ZS}\right) = \frac{2 \times MA \times dm}{Nn}$ (*Solut.* 2. *art.* 3. 4.) $\frac{ZL \times dm}{Nn}$; outre que ZS (*Corol.* 19.) $= \frac{\overline{ZM}^2 - \overline{MN}^2}{ZL}$, augmentant alternativement avec MN, aura son élement $Ss = \frac{2 \times MN \times Nn}{ZL}$. Donc $SY \times Ss$ ($SYys$) $= 2\, MN \times dm$. Par conséquent ayant déja $PZp = ZL \times dm$ (*Solut.* 2. *art.* 3. 4.) $= 2 \times MA \times dm$, l'on aura pareillement $SYys - PZp = 2 \times MN \times dm - 2 \times MA \times dm = 2dm \times AN$ (*Solut.* 2. *art.* 3. *nomb.* 2.) $= 2dm \times TU$. Donc dm étant (*hyp.*) constante, la somme $VSYX - \int ZP$ des $SYys - PZp$ sera par tout ici proportionelle à la somme $ATUH$ des vitesses TU correspondantes, & conséquemment encore (*Lem. art.* 3. *pag.* 244.) en raison des espaces ici parcourus pendant les tems $AT \left(2 \times \frac{\int ZP}{ZM} \right)$ en vertu de ces vitesses restantes malgré les résistances supposées, ainsi que dans le Corol. 19.

COROLLAIRE XXI.

La même chose se peut encore démontrer plus simplement, en considerant seulement que puisque (*Corol.* 19.) $\frac{\sqrt{s}}{2} \times udt = SYys - PZp$, il n'y a qu'à prendre les instans dt constans pour avoir les vitesses TU, (u) ou AN par

par tout ici en raison des differences élementaires $SYys - PZp$ correspondantes ; & conséquemment aussi les sommes de ces vitesses, ou (*Lem. art. 3. pag.* 244.) les espaces ici parcourus pendant les tems $AT\left(2\times\frac{\psi ZP}{ZM}\right)$, encore entr'eux comme les sommes $VSYX - \psi ZP$ de ces differences élementaires, c'est-à-dire, comme les differences dont les aires hyperboliques correspondantes $VSYX$ surpassent les hyperbolyques ψZP pareillement correspondantes.

On verra comme dans la réflexion italique de la pag. 364. que lorsque AT *est infinie, cette difference d'aires hyperboliques alors infinies, est pareillement infinie, en ce que la premiere* VSYX *se trouve pour lors multiple de la seconde* ψZP. *Ce qui fera voir que l'espace ici parcouru pendant un tems* AT $\left(2\times\frac{\psi ZP}{ZM}\right)$ *infini, seroit aussi infini.*

Les espaces ici parcourus pendant des tems quelconques pourroient encore se trouver en d'autres manieres, telles que sont celles des Corol. 11. 12 13. 14. du Prob. de la pag. 244. lesquelles sont trop faciles à accommoder à la généralité de celui-ci pour s'y arrêter davantage.

COROLLAIRE XXII.

Puisque (*Corol.* 19.) $\pm ZS = \frac{aa - au - uu}{a} = a - \frac{au - uu}{a}$, le superieur du double signe $\pm$ étant pour les Fig. 7. 8. & l'inferieur pour la Fig. 9. l'on aura aussi $\frac{au + uu}{a} = a \mp ZS$ (*Solut. 2. art.* 3.) $= ZL \mp ZS$: sçavoir $\frac{au + uu}{a} = ZL - ZS = LS$ dans les Fig. 7. 8. & $\frac{au + uu}{a} = ZL + ZS$ (soit du centre Z le quart de cercle $L\lambda$ dans la Fig. 9.) $= Z\lambda + ZS = \lambda S$ dans la Fig. 9. Donc les résistances instantanées du milieu étant ici (*hyp.*) comme les $u + \frac{uu}{a}$ ou $\frac{au + uu}{a}$ correspondantes ; les LS, λS, correspondantes seront ici comme ces mêmes résistances instantanées, la derniere desquelles après un tems infini (qui rendroit

$u = \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$ suivant le Cor. 16.) seroit $\frac{aa\sqrt{5} - aa}{2a} + \frac{5aa - 2aa\sqrt{5} + aa}{4a}$ $= \frac{2aa\sqrt{5} - 2aa + 5aa - 2aa\sqrt{5} + aa}{4a} = \frac{4aa}{4a} = a$ (*Solut.* 2. *art.* 3.) $= ZL = Z\lambda$; & laquelle de plus (*Corol.* 7.) seroit égale à la pesanteur constante du mobile. Donc les résistances instantanées du milieu doivent être ici à cette pesanteur :: LS. ZL. dans les Fig. 7. 8. Et :: λS. $Z\lambda$. dans la Fig. 9. Ainsi en prenant ZL ou son égale $Z\lambda$ pour cette pesanteur du mobile, l'on aura ici LS dans les Fig. 7. 8. & λS dans la Fig. 9. pour les résistances instantanées que lui fait le milieu supposé à la fin des tems correspondans $AT \left(2 \times \frac{\frac{1}{2}ZP}{ZM} \right)$; & chaque ZS pour la difference de force dont cette pesanteur du mobile supasse alors chacune de ces résistances dans le cas des Fig. 7. 8. où est alors surpassée par chacune d'elles dans celui de la Fig. 9. c'est-à-dire, pour ce qu'il y aura de cette pesanteur employé à produire l'augmentation de vitesse qui (*Corol.* 4.) survient au mobile à l'instant de cette résistance dans le premier de ces deux cas, ou pour ce qu'il y aura de cette resistance employé (*Corol.* 5.) à retarder ce mobile dans le second.

COROLLAIRE XXIII.

Donc lorsque $ZS = 0$, la vitesse du mobile n'augmente ni ne diminuë plus du tout. Mais ce cas, qui rend $VS = VZ$, rendant pareillement (*Corol.* 19.) $\overline{ZM}^2 - \overline{MN}^2 = 0$, & conséquemment $ZM = MN = MA + AN$, rend AN (TU) $= ZM - MA = DM - MA = AD$. Ce même cas rendant de plus (*Corol.* 19.) $aa - uu - uu = 0$, doit rendre au contraire x (ZQ) infinie dans l'équation $\pm \frac{5}{4} \times \frac{a^4}{xx} = aa - au - uu$ de l'art. 1. de la Solut. 2. & conséquemment aussi le tems $AT \left(2 \times \frac{\frac{1}{2}ZP}{ZM} \right)$ infini. Donc la vitesse AN (TU) du mobile doit être encore ici AD après un tems infini; & conséquemment AD doit être la plus grande (*Fig.* 7. 8.) que le milieu

réſiſtant ſuppoſé puiſſe permettre au mobile, même après un tems infini, dans le cas de l'initiale *AH* moindre que cette derniere viteſſe *AD*; & la moindre qu'il puiſſe lui laiſſer (*Fig. 9.*) dans le cas de *AH* plus grande que *AD*. Donc quoique les viteſſes *AN* (*TU*) s'accelerent ici toûjours (*Corol.* 4.) dans le premier de ces deux cas, & qu'elles s'y retardent toûjours (*Corol.* 5.) dans le ſecond; la plus grande dans le premier, & la moindre dans le ſecond, ne peut jamais être qu'égale à la finie *AD*, même après un tems infini, ainſi qu'on l'a déja vû dans les Corol. 6. 16. Et delà ſuivent encore les Corol. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. de la maniere qu'on les a vû ſuivre du Corol. 6.

Le rapport trouvé dans le Corol. 22. entre la peſanteur du mobile, la réſiſtance qui s'y oppoſe à chaque inſtant, & la difference ou l'excès de force dont cette peſanteur ſurpaſſe cette réſiſtance, ou eſt ſurpaſſée par elle; ſuit encore en général de l'équation $\frac{dt}{aa} = \frac{dt - du}{au + uu}$ *trouvée pour la Courbe* HUC *dans l'art.* 2. *de la Solut.* 1. *ainſi qu'on l'a déja vû dans la Remarq.* 3. *pag.* 371. *pour le cas du Probl. de la pag.* 244. *dont l'équation eſt la même que celle-ci, excepté ſeulement que* AT (t) = 0, *rend là* TU (u) = 0, *& ici* TU (u) = AH (b)

COROLLAIRE XXIV.

On ſçait que les aires hyperboliques *VSYX* croiſſent ou décroiſſent en progreſſion arithmetique à meſure que leurs abſciſſes *ZS* décroiſſent ou croiſſent en progreſſion geometrique. Mais on vient de voir (*Corol.* 22.) que ces abſciſſes *ZS* ſont ici comme les differences ou excès de force dont la peſanteur conſtante du mobile ſurpaſſe les réſiſtances inſtantanées du milieu réſiſtant ſuppoſé, ou eſt ſurpaſſée par elles. Donc en prenant ces differences ou excès de force en progreſſion geometrique, les aires hyperboliques *VSYX* croîtront arithmetiquement à meſure que ces differences ou excès de forces diminuëront geometriquement. Par conſéquent les tems écoulés du mouvement étant ici (*Solut.* 2. *art.* 6.) comme les ſecteurs

$\text{⸸}ZP$ correſpondans, & (*Corol.* 19. 20. 21. les eſpaces ici parcourus pendant ces tems, étant comme les differences $VSYX - \text{⸸}ZP$ correſpondantes; ces eſpaces doivent pareillement être ici entr'eux comme des differences d'aires hyperboliques, dont la plus grande croiſſe en progreſſion arithmetique à meſure que les differences de forces de la peſanteur aux réſiſtances inſtantanées du milieu ſuppoſé, diminuent geometriquement; & la moindre ſoit en raiſon des tems écoulés depuis le commencement du mouvement.

COROLLAIRE XXV.

Fig. IV. V. VI.

La ſuppoſition qu'on fait par tout dans ce Memoire (*Solut.* 1. *art.* 1.) de $v = b + t$, donnant $u. v :: u. b + t$. l'on aura auſſi par tout ici (*Solut.* 2. *art.* 3.4.6.) $u. v :: AN. AH + 2 \times \frac{\text{⸸}ZP}{ZM} :: \frac{AN \times ZM}{2}. \frac{AH \times ZM}{2} + \text{⸸}ZP$ (en menant la droite ZA dans les Fig. 4. 5. 6.) :: $AZN. AZH + \text{⸸}ZP$. c'eſt-à-dire que chaque viteſſe effective ou reſtante u (TU) ſera par tout ici à la primitive v (TV) dont elle reſte malgré les réſiſtances ſuppoſées, comme le triangle rectiligne variable AZN correſpondant ſera à la ſomme faite du conſtant AZH & du ſecteur hyperbolique $\text{⸸}ZP$ pareillement correſpondant. D'où l'on voit qu'après un tems infini AT $\left(2 \times \frac{\text{⸸}ZP}{ZM}\right)$ où cette viteſſe primitive TV (v) ſeroit infinie dans un milieu ſans réſiſtance, de même que (*Solut.* 2. *art.* 6.) le ſecteur $\text{⸸}ZP$ qui ſeroit alors $O\text{⸸}ZO$; la viteſſe TU (v) reſtante de cette primitive malgré les réſiſtances ſuppoſées, ne ſeroit que finie, le triangle AZN ſe trouvant ſeulement alors égal au fini AZD. Ce que s'accorde encore avec les Corol. 6. 16. 23.

COROLLAIRE XXVI.

Fig. VII. VIII. IX.

Suivant le Lem. art. 3. pag. 244. l'eſpece ici parcouru pendant quelque tems AT $\left(2 \times \frac{\text{⸸}ZP}{ZM}\right)$ que ce ſoit, malgré les réſiſtances ſuppoſées, eſt à ce que le mobile en

auroit parcouru pendant un pareil tems dans un milieu ſans réſiſtance ni action :: $\int udt . \int vdt$ (la Solut. 1. art. 1. donnant $v = b + t$) :: $\int udt . \int bdt + \int tdt$ :: $\int udt . bt + \frac{1}{2}tt$ (*Corol.* 19. & *Solut.* 2. *art.* 6.) $\frac{2}{\sqrt{5}} \times \overline{VSYX - \frac{1}{4}ZP} . 2 \times \frac{AH \times \frac{1}{4}ZP}{ZM} + 2 \times \frac{\frac{1}{4}ZP \times \frac{1}{4}ZP}{ZM \times ZM} :: \frac{ZM \times ZM}{\sqrt{5}} \times \overline{VSYX - \frac{1}{4}ZP} . AH \times ZM \times \frac{1}{4}ZP + \frac{1}{4}ZP \times \frac{1}{4}ZP :: \frac{ZM \times ZM}{\sqrt{5}} . \frac{AH \times ZM \times \frac{1}{4}ZP + \frac{1}{4}ZP \times \frac{1}{4}ZP}{VSYX - \frac{1}{4}ZP}$ (la Solut.) 2. art. 3. 4. donnant $ZM = \frac{a\sqrt{5}}{2} = MA \times \sqrt{5}$) :: $ZM \times MA . \frac{AH \times ZM \times \frac{1}{4}ZP + \frac{1}{4}ZP \times \frac{1}{4}ZP}{VSYX - \frac{1}{4}ZP}$.

SCHOLIE.

I. Pour ce qui eſt de la Courbe KEC des réſiſtances inſtantanées (dr), dont les ordonnées, proportionelles à ces réſiſtances, ſont (*hyp.*) $ET = z = \frac{au + uu}{a}$, on trouvera que ſon équation eſt $dt = \frac{aadz}{\overline{a - z} \times \sqrt{4az + aa}}$, comme dans le Scholie de la pag. 372. Mais cette équation qui dans ce Scholie faiſoit paſſer cette Courbe par A, la fera paſſer ici par K dans tous les cas poſſibles, ayant ſa premiere ordonnée AK (z) $= \frac{ab + bb}{a}$; puiſque u (*hyp*) $= b$ en A, y doit rendre $z \left(\frac{au + uu}{a} \right) = \frac{ab + bb}{a}$.

FIG. I. II. III.

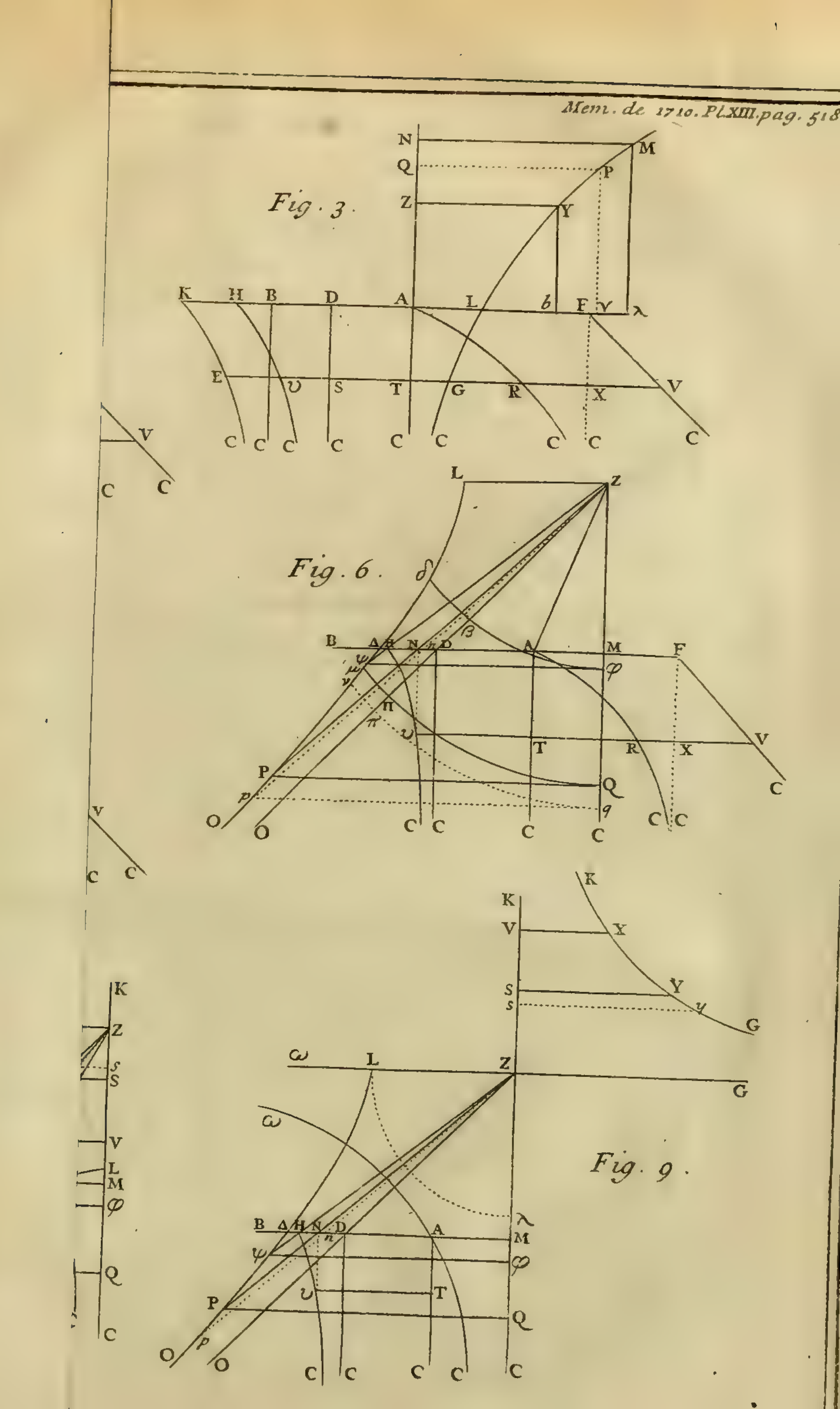
II. Cette valeur de $z = \frac{ab + bb}{a}$ en A, ſubſtituée dans l'équation $dt = \frac{aadz}{\overline{a - z} \times \sqrt{4az + aa}}$, la changeant en $dt = \frac{a^3dz}{\overline{aa - ab - bb} \times \sqrt{4ab + 4bb + aa}} = \frac{a^3dz}{\overline{aa - ab - bb} \times \overline{2b + a}}$, fait voir que la rencontre en K de la Courbe KEC avec ſa premiere ordonnée AK, s'y doit faire ſous un angle dont le ſinus ſoit à celui de ſon complément :: $a^3 . \overline{aa - ab - bb} \times \overline{2b + a}$ :: $\frac{aa}{2} . \frac{aa - ab - bb}{a} \times \overline{b + \frac{1}{2}a}$. Le Corol. 19. donne $\frac{aa}{2} = \frac{ZL \times ZL}{2}$, $\frac{aa - ab - bb}{a} = ZV$, $b + \frac{1}{2}a = MH$ dans les Fig. 7. 8 9. Ce qui peut ſervir à exprimer encore autrement le rapport des ſinus précedens.

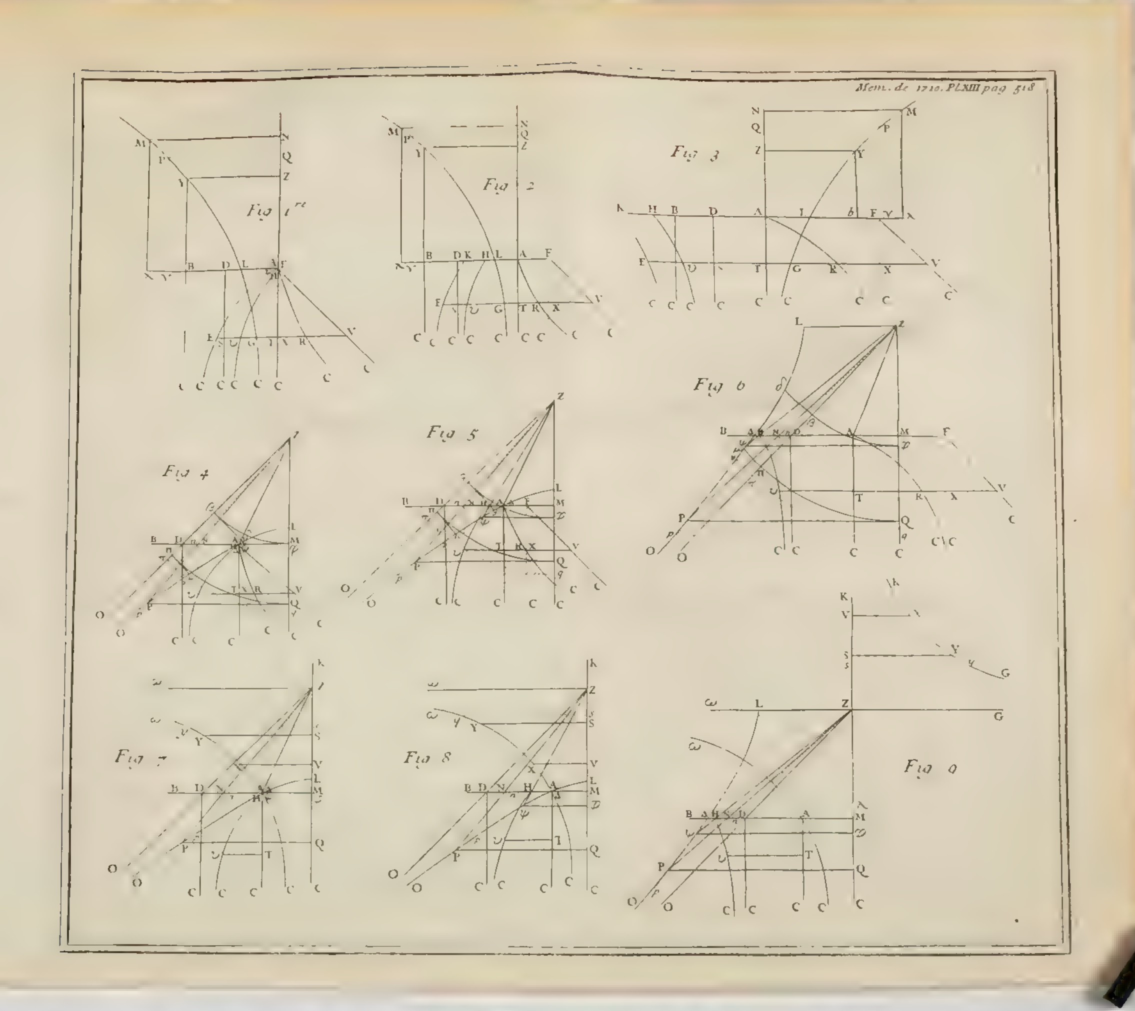
III. La ſuppoſition qu'on fait par tout ici de $z = \frac{au + uu}{a}$, fait voir que dans tous les cas les TE (z) croîtront ou diminuëront toûjours avec les TU (u) & qu'ainſi la Courbe KEC des réſiſtances inſtantanées tournera toûjours ſa convexité en même ſens que la Courbe HUC des viteſſes reſtantes, par rapport à leur axe commun ATC.

IV. Puiſque (*Solut.* 1. *art.* 5. *Solut.* 2. *art.* 4. & *Corol.* 6. 7. 9. 10. 16.) AT infinie rend $u = \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$, cette valeur de u ſubſtituée dans la précedente de $z = \frac{au + uu}{a}$, la doit changer en $z = \frac{aa\sqrt{5} - aa}{2a} + \frac{5aa - 2aa\sqrt{5} + aa}{4a} = \frac{2aa\sqrt{5} - 2aa + 5aa - 2aa\sqrt{5} + aa}{4a} = \frac{4aa}{4a} = a$; ce qui fait voir que AT (t) infinie doit auſſi rendre TE (z) $= a = AB$; & conſéquemment que la droite BC parallele à AT, doit être une aſymptote de la Courbe KEC des réſiſtances inſtantanées, comme DC diſtante de AT de la valeur de AD $\left(\frac{a\sqrt{5} - a}{2}\right)$ en eſt une de la Courbe des viteſſes reſtantes HUC. Dans la Fig. 3. le point B de l'aſymptote BC de la Courbe KEC, doit être entre en D & H, lorſque AH (b) $>$ AB (a); & entre H, K, lorſque AH (b) $<$ AB (a): il ſeroit en H ſi $AH = AB$.

Il eſt aiſé de voir qu'en faiſant b=0 *dans tout ce qui précede, le Probl. de la pag.* 244. *ſe trouvera n'être qu'un* Co*rollaire de celui-ci dont les deux Solutions avec leurs Corollaires deviendront alors propres & particulieres à ce Problême-là exprimé dans la Fig.* 1. 4. 7. *de celui-ci : de ſorte qu'on auroit pû l'omettre en concluant ainſi de ce qui précede tout ce qu'on a démontré dans les pag.* 245. *&c. Mais les Solutions particulieres qu'on en a données là, ont paru utiles pour l'intelligence de ces générales-ci.*

Voilà pour les mouvemens primitivement accelerés en raiſon des tems écoulés, c'eſt à-dire, dont les viteſſes dans le vuide auroient eu des accroiſſemens egaux en tems égaux: leſquels mouvemens ſeroient faits dans des milieux réſiſtans


Fig. 3.
N
Q
Z
M
P
Y
K
H
B
D
A
L
b
F
λ
E
S
T
G
R
X
V
C
Fig. 6.
L
Z
δ
β
B
Δ
N
D
A
M
F
φ
ψ
μ
ν
π
T
R
X
V
P
Q
p
q
O
C
K
X
Y
y
s
S
V
G
ω
Fig. 9.
λ
ψ
n
υ



Mem. de 1710. Pl. XIII pag. 518
Fig. 1re
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9

en raiſon des ſommes faites des viteſſes que ces milieux permettroient au mobile, & des quarrés de ces mêmes viteſſes effectives ou reſtantes des primitives malgré les réſiſtances de ces milieux. On verra dans un autre Memoire ce qui concerne les mouvemens primitivement retardés en raiſon des tems à écouler juſqu'à leur entiere extinction dans le vuide: leſquels mouvemens ſeroient auſſi faits dans des milieux réſiſtans comme ci-deſſus.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De M. Herman à M. Bernoulli, datée de Padoüe le 12. Juillet 1710.

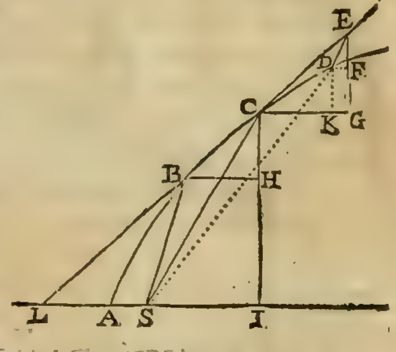
Reçû de M. Bernoulli le 1. Novembre 1710. & lû à l'Acad. le 13. Dec. 1710.

JE ſuis bien aiſe, Monſieur, que vous ayez pleinement réſolu le Problême inverſe des Forces centripetes, pour *trouver la Courbe qu'elles doivent faire décrire, la loy de ces forces étant donnée:* Problême que je croy incomparablement plus difficile que le direct. C'eſt ce qui m'a porté à eſſayer auſſi mes forces ſur cette queſtion, & aſſez heureuſement, ayant trouvé par mon Analyſe que les Sections Coniques ſont les ſeules Courbes que les Planetes puiſſent décrire avec des forces centripetes réciproquement proportionelles aux quarrés des diſtances de ces Planetes au centre de ces forces : vous en jugerez par l'Analyſe que voici (ce me ſemble) aſſez courte.

Voyez la Fig. de la page ſuivante.

Soient *ABC* la Courbe cherchée, *LI* ſon axe, *S* le centre des forces, *BC* une particule infiniment petite de la Courbe, ſur laquelle particule prolongée ſoit *CE*=*BC* ; du point *E* ayant tiré *ED* parallele à *CS*, & qui rencontre la Courbe en *D*, ſoient *DF*, *CG*, *BH*, paralleles à *LI*, leſquelles rencontrent en *F*, *G*, la petite droite *EG* parallele à *CI* perpendiculaire ſur *LI*, & en *H*

la droite CI; soit enfin la droite DK parallele aussi à CI, & qui rencontre CG en K.



Cela fait, soient $SI = x$, $IC = y$: l'on aura $SC = \sqrt{xx+yy}$, BH ou $CG = dx$, CH ou $EG = dy$; & conséquemment KG ou $DF = -ddx$, $EF = -ddy$; ce qui donnera le double du triangle BSC ou $CSD = ydx - xdy$, que je suppose constant: de sorte que les triangles (*Constr.*) semblables EDF, CSI, rendront $ED = \frac{-ddx\sqrt{xx+yy}}{x}$

Presentement puisque le triangle BSC est (*hyp.*) constant, l'on aura DE en raison de la force centripete au point C, c'est-à-dire, en raison de $\frac{1}{xx+yy}$, ou en raison de $\frac{\overline{ydx-xdy}^2}{xx+yy}$: d'où résulte cette équation differentio-differentielle $-addx = \frac{x \times \overline{ydx - xdy}^2}{xx+yy \times \sqrt{xx+yy}} = \overline{ydx - xdy} \times \frac{xydx - xxdy}{xx+yy \times \sqrt{xx+yy}}$, dont l'intégrale est $-adx = \frac{-y}{\sqrt{xx+yy}} \times \overline{ydx - xdy} = \frac{xydy - yydx}{\sqrt{xx+yy}}$, ou $-\frac{abdx}{xx} = \frac{bxydy - byydx}{xx\sqrt{xx+yy}}$, dont l'intégrale est aussi $\frac{ab}{x}$ ou plus généralement $\frac{ab}{x} \pm c = \frac{b\sqrt{xx+yy}}{x}$, ou $a \pm \frac{cx}{b} = \sqrt{xx+yy}$, qui est une équation aux trois Sections Coniques: sçavoir à la Parabole si $b = c$, à l'Ellipse si $b > c$, & à l'Hyperbole si $b < c$.

J'ay aussi tiré delà une maniere facile de déterminer la force centripete sur une Courbe donnée quelconque Car si (pour abreger) l'on prend $z = SC = \sqrt{xx+yy}$ dans cette Courbe; $r = SL$ segment de son axe, compris entre sa touchante EL & le centre S des forces centripetes, en prenant toûjours $SI = x$, $IC = y$, & de plus

la

là ſoûtangente $IL = s$: ſi après cela on differentie juſqu'aux ſecondes differences l'équation de la Courbe donnée, & qu'on y ſubſtituë $\frac{vrrxyy}{z}$ au lieu de ddx, $\frac{vrry^3}{z}$ au lieu de ddy, s au lieu de dx, & y au lieu de dy ; il en réſultera une équation en grandeurs toutes finies, dont v déſignera la force centripete, laquelle étant regardée comme inconnuë, les autres grandeurs x, y, r, s, z, doivent toutes être priſes pour connuës.

Si vous voulez bien, Monſieur, me faire part de votre Analyſe de ce Problême des Forces centripetes inverſes, que je crois très-élegante, vous me ferez beaucoup de plaiſir, &c.

Extrait de la Réponſe de M. Bernoulli à M. Herman, datée de Baſle le 7. Octobre 1710.

Permettez-moi, Monſieur, d'examiner tant ſoit peu votre Solution du Problême inverſe des Forces centripetes, quoique bonne & digne de votre pénétration ; après quoi je vous expliquerai plus au long ma maniere de le réſoudre, que vous me marquez ſouhaiter. A vous parler franchement, votre Solution paroît faite à deſſein, accommodée à ce que vous cherchiez, & à ce que vous connoiſſiez déja. En effet, comment ſans cela auriez-vous vû que pour trouver l'intégrale de votre équation $\frac{-ddx\sqrt{xx+yy}}{x} = \frac{\overline{ydx-xdy}^2}{xx+yy}$, il falloit la réduire à $-addx = \overline{ydx-xdy} \times \frac{xydx-xxdy}{\overline{xx+yy} \times \sqrt{xx+yy}}$? De plus, comment ſans cela auriez-vous pû tirer l'intégrale de celle-ci, & enſuite l'intégrale de l'intégrale ? Puiſque les indéterminées x, y, dx, dy, ddx, y ſont ſi mêlées & ſi compliquées que de les vouloir ſéparer, ſeroit entreprendre un travail à ſe déſeſperer ; & qu'il vous auroit été impoſſible de les intégrer toutes mêlées, comme vous avez fait, ſi vous n'euſſiez pas ſoupçonné que les Sections Coniques, que vous aviez en vûë, ſatisfaiſoient à votre équation differentio-differentielle ; que vous

avez pour cela ſi heureuſement accommodée au but où vous tendiez, que vous l'avez enfin réduite à une équation algebrique. Je ſouhaiterois fort que vous eſſayaſſiez votre methode ſur l'hypotheſe générale, c'eſt-à-dire, pour trouver la Courbe trajectoire dans quelque hypotheſe que ce ſoit des forces centripetes, du moins en ſuppoſant la quadrature des eſpaces curvilignes : vous verriez que le mélange des indéterminées vous engageroit alors dans un embarras, d'où je ne crois pas que vous ſortiſſiez ſans prendre un autre chemin que celui-là.

De plus il ne ſuit pas encore de votre Solution particuliere qu'elle ne convienne qu'aux ſeules Sections Coniques : après la premiere intégration de votre équation differentio-differentielle vous avez oublié d'y ajoûter de part ou d'autre une quantité conſtante ; ce qui pourroit laiſſer quelqu'un en doute, ſi outre les Sections Coniques, il n'y auroit point encore quelqu'autre genre de Courbes qui ſatisfiſt à votre queſtion : pour lever ce doute vous deviez faire voir que l'addition ou le retranchement d'une quantité conſtante dans un des membres de l'integrale d'une équation differentielle quelconque, ne change rien à la nature de la Courbe exprimée par ces deux équations. Voici comment je ſupplée à cette omiſſion.

Dans votre équation differentio-differentielles $-addx = \overline{ydx - xdy} \times \frac{xydx - xxdy}{\overline{xx+yy} \times \sqrt{xx+yy}}$ je ne mets pas ſeulement (comme vous) $-adx$ pour l'intégrale de $-addx$) mais $-adx \pm$ une quantité conſtante, c'eſt-à-dire, $-adx \pm c \times \overline{ydx - xdy}$; pour le reſte je le fais comme vous : de ſorte qu'en intégrant votre précedente équation differentio-differentielle, je trouve $-adx \pm c \times \overline{ydx - xdy} = -\frac{y}{\sqrt{xx+yy}} \times \overline{ydx - xdy} = \frac{xydy - yydx}{\sqrt{xx+yy}}$, ou $-\frac{abdx}{xx} \pm \frac{cb}{xx} \times \overline{ydx - xdy} = \frac{bxydy - byydx}{xx\sqrt{xx+yy}}$, dont l'intégrale eſt $\frac{ab}{x} \pm \frac{cby}{x} \pm c = \frac{b\sqrt{xx+yy}}{x}$,

c'eſt-à-dire en prenant $h = eb$, & en réduiſant l'équation) $ab \pm hy \pm cx = b\sqrt{xx + yy}$: laquelle équation, quoiqu'elle renferme hy que la votre ne renfermoit pas, eſt cependant (comme elle) aux trois Sections Coniques. Quant à la grandeur conſtante $ex\overline{ydx - xdy}$, que vous avez négligée, ſi elle n'eût pas été intégrable étant diviſée par xx ; ou ſi étant auſſi intégrable, elle eût donné des y de pluſieurs dimenſions ; vous voyez, Monſieur, qu'outre les Sections Coniques il y auroit eu encore d'autres Courbes qui auroient ſatisfait à votre queſtion ſans que vous vous en fuſſiez aperçû : ce qui me fait eſperer que vous conviendrez avec moi que votre Sotion eſt défectueuſe faute d'être aſſez générale.

Voici preſentement ma Solution que vous me marquez ſouhaiter : j'eſpere auſſi qu'elle ne vous déplaira pas, 1°. étant générale pour quelque hypotheſe que ce ſoit, & donnant la conſtruction de la Courbe, les quadratures des eſpaces curvilignes étant données ; 2°. en ce que j'y arrive à une équation ſans mêlange d'indéterminées ; 3°. & parce qu'il n'y entre que des premieres differentielles ſans avoir beſoin de differentio-differentielles. Pour vous faire voir le tout d'un bout à l'autre, & dans une étenduë qui (quoique longue) ne vous déplaira pas ; je commence par le Lemme ſuivant.

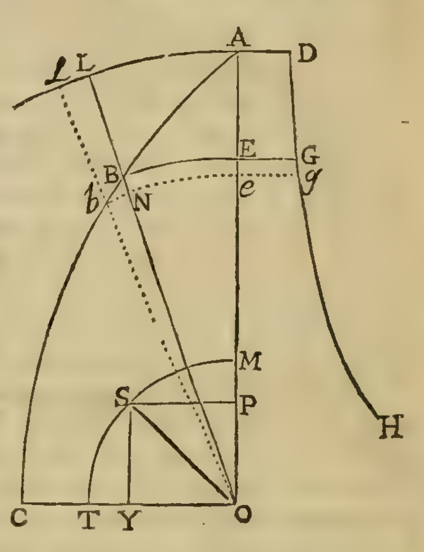
LEMME.

Si deux corps de maſſes proportionelles à leurs peſanteurs, commencent à deſcendre d'un même point A *avec des viteſſes égales, & avec des forces égales vers un même point* O ; *l'un directement ſuivant la droite* AO, *& l'autre obliquement ſuivant la trajectoire* ABC *qu'il décrira : je dis que dans toutes les diſtances égales de part & d'autre du centre* O *des forces, comme en* B, E, *en imaginant l'arc de cercle* BE *décrit de ce centre* O ; *ces deux corps auront toûjours des viteſſes égales : de ſorte que ſi* EG *marque la viteſſe acquiſe en* E *du corps qui deſcendroit ſuivant* AO, *la même* EG *marquera auſſi la viteſſe en* B *du corps qui décrit la trajectoire* ABC.

Voyez la Fig. de la page ſuivante.

La démonstration de ce Lemme se trouve dans le Livre de M. Newton *De Princ. Math. Phil. Nat. pag.* 125. Mais elle y est trop embarrassée : la voici plus simplement.

Concevons la Courbe *ABC* & la droite *AO* divisées en leurs élemens *B b*, *E e*, par une infinité de cercles *BE*, *b e*, infiniment proches les uns des autres, tous décrits du centre *O*. Cela conçû, les Mechaniques font voir que par tout la force en chaque point *E* suivant *EO*, qui (*hyp.*) est la même qu'en chaque point correspondant *B* suivant *BO*, est à ce qu'il en résulte de celle-ci au mobile suivant chaque élement correspondant *Bb* de la Courbe qu'il trace, comme *Bb* est à *Ee*. Or les Mechaniques faisant voir aussi que les accroissemens de vitesses, qui résultent de ces forces dans des corps égaux, sont entr'eux en raison composée de ces mêmes forces, & des tems élementaires employés par elles à produire ces accroissemens de vitesses, c'est-à-dire, employés à faire parcourir à ces corps les élemens lineaires *Ee*, *Bb*; & qu'au commencement en *A*, où les vitesses sont supposées égales de part & d'autre, ces élemens de tems sont entr'eux comme les premieres de ces petites lignes *E e*, *Bb* : il suit delà que ces accroissemens de vitesses suivant les premieres *Ee*, *Bb*, sont ici entr'eux en raison composée de *Bb* à *E e*, & de *E e* à *Bb*, c'est-à-dire comme $Bb \times Ee$ est à $Ee \times Bb$. Donc à la fin de ces premiers élemens des lignes *AO*, *ABC*, les accroissemens de vitesses



ſuivant les premiers élemens lineaires ſeront ici égaux entr'eux. On les démontrera de même égaux entr'eux à la fin des ſeconds élemens de ces lignes *AO*, *ABC*, à la fin des troiſiémes, à la fin des quatriémes, &c. pris ainſi deux à deux à diſtances égales du point *O*. Donc à diſtances égales quelconques de ce point *O*, les viteſſes ſuivant chacune des lignes *AO*, *ABC*, ſe trouvant ainſi faites des premiere(*hyp.*) égales entr'elles, & d'un égal nombre d'accroiſſemens égaux deux à deux de part & d'autre, ſeront auſſi égales entr'elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROL. Delà voici la Courbe *DGH* de ces viteſſes, c'eſt-à-dire une Courbe qui par chacune de ſes appliquées *EG* déſigne la viteſſe que le corps qui deſcend droit de *A* vers *O*, a en chaque point *E* correſpondant de la droite *AO*; & conſéquemment auſſi (*Lem.*) celle que le corps qui trace la Courbe *ABC*, a en chaque point *B* correpondant de cette Courbe. Pour cela ſoit $OE = x$, $EG = v$, & la force en *E* ou en *B* vers *O*, c'eſt-à-dire la force centripete $= \varphi$, laquelle ſoit donnée en x & en conſtantes ſuivant quelque loi de forces que ce ſoit. Cela poſé, puiſque le tems par *Ee* eſt $= \frac{dx}{v}$, & que ce tems multiplié par la force centripete φ, donne l'augmentation ou la diminution momentanée de viteſſe ſelon que le corps deſcend ou monte, c'eſt-à-dire, ſelon qu'il s'approche ou qu'il s'éloigne du point *O*; l'on aura ici $\frac{\varphi dx}{v} = -dv$, ou $\varphi\, dx = -v\, dv$, dont l'intégrale eſt $\int \varphi\, dx = ab - vv$: j'entens par ab une quantité conſtante quelconque, laquelle ſe peut ajoûter à volonté aux intégrales ſimples. Donc $v = \sqrt{ab - \int \varphi dx}$, qui eſt l'équation cherchée de la Courbe *DGH* des viteſſes.

C'eſt pour éviter les fractions que je prends vv *pour* $\frac{1}{2}$ vv, *la grandeur arbitraire* ab *me le permettant. Voici preſentement le Problême en queſtion, en vûë de qui tout ce qui précede a été fait.*

PROBLÊME.

Les quadratures étant ſuppoſées, & la loi des forces centripetes φ *étant donnée à volonté en* x *& en conſtantes, trouver la trajectoire* ABC *qu'elles doivent faire décrire au mobile.*

Voyez la Fig. de la page précedente.

SOLUT. Soit $OA = a$, & de ce rayon l'arc de cercle $AL = z$, $Ll = dz$; & par conſéquent $Nb = \frac{xdz}{a}$. Soit auſſi le tems par Bb en raiſon de $Nb \times BO$ (double du triangle BOb) $= \frac{xxdz}{a}$. Vous ſçavez que ce tems multiplié par la viteſſe, c'eſt-à-dire (ſuivant le Corollaire du Lemme précedent) par $\sqrt{ab - \int \varphi dx}$, donne l'eſpace Bb. Donc $\frac{xxdz}{a} \times \sqrt{ab - \int \varphi dx} = Bb = \sqrt{dx^2 + \frac{xxdz^2}{aa}}$: d'où réſulte l'équation $dz = \frac{aacdx}{\sqrt{abx^4 - x^4 \times \int \varphi dx - aaccxx}}$ qui exprime la nature de la trajectoire cherchée ABC, dans laquelle équation c eſt une conſtante arbitraire pour rendre le tout homogéne. *Ce qu'il falloit trouver.*

Vous voyez, Monſieur, que j'arrive tout d'un coup à une équation differentielle du premier degré, dans laquelle il n'y a aucun mêlange des indéterminées entr'elles; & qu'ainſi la conſtruction geometrique s'en peut aiſément déduire, les quadratures des eſpaces curvilignes étant données, & même plus commodément que M. Newton ne l'a trouvée dans la pag. 127. &c. de ſes Princ. Math.

Mon équation fait voir de plus ſi la trajectoire cherchée eſt Algebrique ou non dans quelque hypotheſe que ce ſoit des forces données. Car ſi l'intégrale de $\frac{aacdx}{\sqrt{abx^4 - x^4 \times \int \varphi dx - aaccxx}}$ ſe trouve réductible à un arc de cercle dont le rayon ſoit OA (a) comme nombre à nombre; la Courbe cherchée ſera néceſſairement alors Algebrique. Ainſi l'hypotheſe ordinaire des forces centripetes en raiſon réciproque des quarrez des diſtances du mobile à leur centre, c'eſt-à-dire l'hypotheſe

de $\varphi = \frac{aag}{xx}$ changeant l'équation précedente en $dz =$ $\frac{aacdx}{\sqrt{abx^4 + aagx^3 - aaccxx}} = \frac{aacdx}{x\sqrt{abxx + aagx - aacc}}$, qui se peut réduire à un tel arc de cercle ; je vois tout d'un coup que votre Courbe *ABC* doit être Algebrique dans cette hypothese.

Pour voir presentement que cette Courbe *ABC* dans cette hypothese est toûjours une Section Conique, ainsi que M. Newton l'a supposé pag. 55. Corol. 1 sans le démontrer ; il y faut bien plus d'adresse : voici comme j'en viens à bout. Afin de réduire cette valeur de dz à une formule differentielle ordinaire d'arc circulaire, soit $x = \frac{aa}{y}$: la substitution de cette valeur de x donnera $\frac{aacdx}{x\sqrt{abxx + aagx - aacc}}$ $= \frac{-acdy}{\sqrt{a^3b + aagy - ccyy}}$ (en supposant $y = \frac{aag}{2cc} - t$) $=$ $\frac{acdt}{\sqrt{a^3b + \frac{a^4gg}{4cc} - cctt}}$ (en supposant $cchh = a^3b + \frac{a^4gg}{4cc}$ pour abreger) $= \frac{adt}{\sqrt{hh - tt}} = dz$; & par conséquent $\frac{dz}{a} = \frac{dt}{\sqrt{hh - tt}}$ $= \frac{1}{h} \times \frac{hdt}{\sqrt{hh - tt}}$, qui est une differentielle d'arc de cercle (dont le rayon est $= h$, & le sinus $= t$) divisé par son rayon.

Cela étant, puisqu'un arc de cercle divisé par son rayon exprime l'angle qui lui est opposé, & que suivant cela l'angle $LOl = \frac{dz}{a}$, l'on aura aussi $\frac{1}{h} \times \frac{hdt}{\sqrt{hh - tt}}$ pour la quantité d'une angle differentiel d'un qui auroit son rayon $= h$, & son sinus $= t$. Donc à cause de l'égalité de ces deux angles differentiels, les angles intégraux en seront aussi égaux, ou (pour plus de généralité) l'un surpassera l'autre d'un angle constant. Si donc on décrit un cercle *MST* d'un rayon $OM = h$, & que l'angle *AOL* $\left(\int \frac{dz}{a}\right)$ soit diminué ou augmenté d'un angle constant *LOS* pour avoir l'angle *MOS* $\left(\int \frac{1}{h} \times \frac{hdt}{\sqrt{hh - tt}}\right)$; il est manifeste que

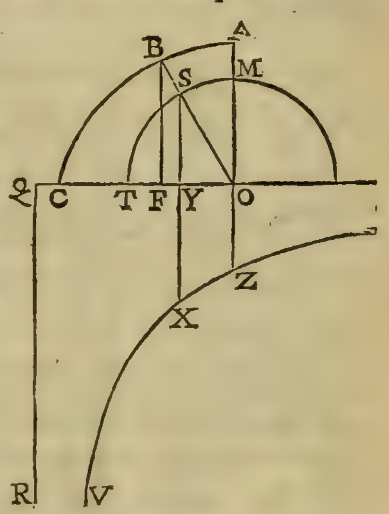
Voyez la Figure précedente de la pag. 524.

Voyez la Fig. de la pag. 524.

la perpendiculaire *SP* sur *AO* sera $= t$, & que delà (en rétrogradant) on trouvera y, & ensuite x ou *OE* qui sera $= \frac{2aacc}{aag - 2cct}$. Donc en décrivant du rayon *OE* l'arc *EB* qui coupe *OL* en *B*, ce point *B* sera un de ceux de la trajectoire *ABC* que je prétens être une Section Conique : je le démontre.

Tout Geometre attentif verra que l'angle constant *LOS*, dont on augmente ou diminuë l'angle *AOL*, ne change point la nature de la Courbe *ABC* ; mais seulement sa situation ; en l'avançant ou en l'arrierant autour du point *O*, tous les points *B* s'avançant ou s'arrierant ainsi dans leurs arcs *EB*, de même que si tout le plan de cette Courbe *ABC* tournoit avec elle autour de ce centre fixe *O*. Cependant pour rendre le calcul plus facile, je vas supposer que l'angle *AOL* n'augmente ni diminuë, c'est-à-dire que l'angle *MOS* lui est égal.

Soit donc ici (où les mêmes lettres marquent les mêmes choses que dans la Fig. précedente) perpendiculairement en *O* sur *AO* la droite $OQ = \frac{aag}{2cc}$; & du centre *Q* entre les asymptotes *QO*, *QR*, une hyperbole équilatere *VXZ*, dont le rectangle (des coordonnées) *QYX* ou *QOZ* $= aa$; soit prolongée une ordonnée quelconque *XY* de l'hyperbole jusqu'à ce qu'elle rencontre le cercle *MST* en *S*, par lequel point *S* soit menée *OS*, sur laquelle

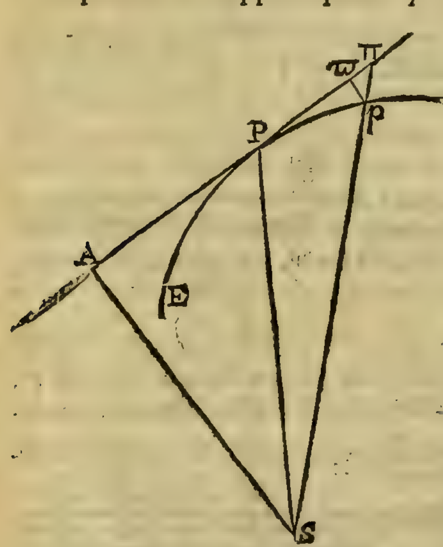


(prolongée s'il en est besoin) soit prise $OB = XY$. Je dis que le point *B* sera un de ceux de la trajectoire *ABC* ; puisque

puiſque (*hyp.*) $OB = XY = \frac{QOZ}{QY} = \frac{aa}{\frac{aag}{2cc} - t} = \frac{2aacc}{aag - 2cct}$: & que la conſtruction preſente rend ABC une Section Conique, ainſi qu'on s'en convaincra ſi l'on cherche l'équation qui exprime le raport de ſes coordonnées OF, FB ; car en les appellant x, y, on trouvera l'équation $\overline{a^4gg - 4c^4hh} \times xx = 8aac^4hx - a^4ggyy + 4a^4c^4$, qu'on ſçait exprimer une Section Conique : ſçavoir une Parabole, lorſque $OQ \left(\frac{aag}{2cc}\right) = OT\ (h)$; une Ellipſe, lorſque $OQ > OT$; & une Hyperbole, lorſque $OQ < OT$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Préparation à une autre Solution.

Quant à la maniere de trouver les forces centripetes, les Courbes étant données, voici un aſſez beau Theorême dont je trouvai autrefois la Solution indépendemment de l'inverſe précedente : je la communiquai à M. Moivre dans une Lettre du 16. Fevrier 1706. en ces termes après avoir ſuppoſé que EPp eſt la Courbe donnée, S le centre ou le foyer des forces centripetes, & SA une perpendiculaire ſur la tangente $A\Pi$ de cette Courbe en P : voici, dis-je, en quels termes je lui écrivis.



« Soit tirée du centre S des forces une droite $S\Pi$ infiniment proche de SP, & qui coupe la tangente prolongée en Π, & la Courbe en p ; ſoit auſſi tirée la petite perpendiculaire $p\varpi$. Suppoſant donc que

Voyez la Fig. précedente de la pag. 529.

» le triangle PSp, qui marque le tems que le mobile em-
» ploïe à parcourir l'élement Pp de la Courbe, soit con-
» stant, on pourra faire $SA \times Pp = 1$. Or vous sçavez que
» le diametre de la dévelopée en P (que je nomme R)
» est à Pp comme Pp à $p\varpi = \frac{\overline{Pp}^2}{R}$; mais à cause des trian-
» gles semblables $SA\Pi$ & $p\varpi\Pi$, on fait $SA . S\Pi (SP) :: p\varpi$
» $\left(\frac{\overline{Pp}^2}{R}\right) . p\Pi$ Ainsi on trouvera $p\Pi$ ou l'éloignement mou-
» ventain de la tangente, $= \frac{SP \times \overline{Pp}^2}{SA \times R} = \frac{SP \times \overline{SA}^2 \times \overline{Pp}^2}{\overline{SA}^3 \times R}$ (à cause
» de $SA \times Pp = 1$) $= \frac{SP}{\overline{SA}^3 \times R}$: ensorte que la force centri-
» pete est en raison directe des distances, & en raison ré-
» ciproque composée du diametre des dévelopées & du
» cube des perpendiculaires sur les tangentes, &c.

De cette maniere la force centripete se trouve généralement exprimée en terme tous finis.

Ce Théorême sert à trouver encore une autre Solution du Problême inverse des forces centripetes, que je trouvai (si je m'en souviens bien) il y a environ 15. ans, dès mon arrivée en Hollande. Il est vrai qu'elle renferme des secondes differences; mais j'ai une maniere particuliere de les séparer, & ensuite d'intégrer l'équation, & de la réduire à celle du Problême précédent : voici cette autre Solution que je veux bien vous communiquer.

Voyez la Fig. de la pag. 524.

Soient ici comme-là dans la Figure de la page 524. $OB = OE = x$, $AL = z$, $OA = a$, $BN = dx$, $Nb = dy$, la force centripete en $B = \varphi$ (par le Theorême que je viens de démontrer) $= \frac{x}{p^3 r}$, en appellant p, la perpendiculaire menée du point O sur la touchante en B; & r, le diametre de la dévelopée en B. Or les formules ordinaires donnent $p = \frac{xdy}{\sqrt{ax^2 + dy^2}}$; & sans faire aucune differentielle constante, on trouve $r = \frac{2 \times \overline{xdx^2 + xdy^2} \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^2 dy + dy^3 + xdxddy - xdyddx}$

Donc on aura ici $\frac{x}{p^3 r}$ ou $\varphi = \frac{dy^3 + dx^2 dy - xdyddx + xdxddy}{2x^3 dy^3}$.

L'artifice dont je me sers pour séparer ici les indéterminées (ce qui seroit difficile autrement) consiste à abreger cette longue formule ; ce qu'on pourra faire en considérant laquelle des differentielles (cela est arbitraire) étant faite constante, & substituée dans cette équation, n'y laissera que deux termes en y détruisant les deux autres. Or je vois que cela se peut facilement faire en deux manieres, sçavoir en prenant xdy ou $\frac{dx}{y}$ pour constante, quoiqu'on ait déja pris le tems xdy ($SA \times Pp$)constant dans le Theorême précedent pour arriver à $p\Pi$ (proportionnelle à la force centrale en P) $= \frac{SP}{SA^3 \times R} = \frac{x}{p^3 r}$, cette formule étant la même que si l'on n'y eût fait rien de constant.

Voyez la Fig. de la pag. 529.

1°. $S\, xdy = c$, l'on aura $\varphi = \frac{dy^3 - xdyddx}{2c^3}$; ce qui s'intégre en differentiant la constante xdy, qui donne $xddy + dxdy = 0$ ou $dy = \frac{-xddy}{dx}$, & substituant cette valeur de dy dans la précedente équation $\varphi = \frac{dy^3 - xdyddx}{2c^3}$, il en proviendra $\varphi = \frac{-dyddy - dxddx}{2ccdx}$, ou $\varphi\, dx = \frac{-dyddy - dxddx}{2cc}$, dont l'intégrale est $\int \varphi\, dx = \frac{-dy^2 - dx^2}{4cc} \pm n$: j'entens encore ici par n une quantité constante quelconque.

On peut encore arriver autrement à cette équation, en multipliant $\varphi = \frac{dy^3 - xdyddx}{2cc^3}$ par dx, & en la prenant par parties pour avoir $\varphi\, dx = \frac{dy^3 dx}{2c^3}\left(\frac{dx}{2x^3}\right) - \frac{xdxdyddx}{2c^3}\left(\frac{-dxddx}{2xxdy^2}\right)$, dont l'intégrale est $\int \varphi dx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4xxdy^2} \pm n = \frac{-dy^2 - dx^2}{4xxdy^2} \pm n$, comme ci-devant.

2°. Soit presentement $\frac{dx}{x}$ constante. Cette autre supposition changera l'équation précedente $\varphi = \frac{dy^3 + dx2dy - xdyddx + xdxddy}{2x^3dy^3}$ en $\varphi = \frac{dy^3 + xdxddy}{2x^3dy^3}$, qui peut encore s'intégrer en deux manieres ; mais pour me servir seulement de la seconde, soit cette derniere équation multipliée par dx, & distribuée en plusieurs parties tel-

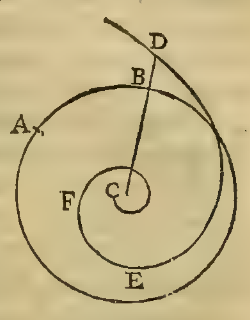
les que $\varphi dx = \frac{dx}{2x^3} + \frac{dx^2 ddy}{2xxdy^3}$, dont les intégrales (à cause de $\frac{dx^2}{xx}$ constante) donnent $\int \varphi dx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4xxdy^2} \pm n = \frac{-dy^2 - dx^2}{4xxdy^2} \pm n$ comme ci-dessus.

Nôtre équation differentio-differentielle étant ainsi réduite à une équation differentielle ordinaire, si l'on s'y prend bien (en suppléant les homogenes) l'on en déduira $\frac{bbdx}{\sqrt{axx - xx \times \int \varphi dx - b^4}} = dy = \frac{xdz}{a}$, & conséquemment aussi $dz = \frac{bbdz}{\sqrt{nx^4 - x^4 \times \int \varphi dx - b^4 xx}}$, équation semblable à celle que j'ai trouvée par la premiere Méthode, & de laquelle par conséquent suit encore (comme de celle-là) la construction universelle de la trajectoire, & sa détermination aux Sections Coniques dans l'hypothese particuliere des forces centripetes réciproquement proportionnelles aux quarrés des distances du mobile au centre de ces forces.

REMARQUE.

J'ai dit ci-devant que M. Newton, après avoir démontré que les forces centrales d'un corps, dirigées par un des foyers d'une Section Conique quelconque décrite par ce corps, sont toujours entr'elles en raison renversée des quarrés des distances de ce même corps à ce foyer; suppose l'inverse de cette proposition sans la démontrer: sçavoir que lorsque les forces centrales d'un corps qui décrit une Courbe, sont en raison réciproque des quarrés des distances de ce corps à quelque point du plan de cette Courbe, elle est toujours une Section Conique dont ce point est le foyer ou un des foyers. Pour voir encore la necessité de la démonstration que je viens de donner de cette inverse, il n'y a qu'à considerer que de ce qu'un corps pour se mouvoir sur une Spirale logarithmique, requiert des forces centrales en raison réciproque des cubes de ses distances au foyer ou centre de cette Courbe; ce n'est pas une conséquence qu'avec de telles forces il décrivît toûjours une telle Courbe: Puisqu'il

eſt aiſé de ſe convaincre par les formules directes des forces centrales, que ce corps auroit auſſi ces forces en cette raiſon s'il décrivoit une Spirale hyperbolique *CFED* dont la nature fût d'avoir égaux entr'eux, ou conſtans, tous les rectangles ou produits $AB \times CD$ faits chacun de chacun des rayons *CD* de cette Spirale, par l'abſciſſe correſpondante *AB* de la circonférence du cercle *ABL* décrit du centre *C* de cette même Spirale hyperbolique.



DES FORCES

CENTRALES INVERSES.

PAR M. VARIGNON.

1710. 13. Decemb.

ON peut faire deux queſtions ſur les forces centrales : la premiere de *trouver ces forces, les Courbes qu'elles font décrire, étant données*; & la ſeconde au contraire, *ces forces étant données, trouver les Courbes qu'elles doivent faire décrire.* La premiere de ces deux queſtions, s'appellera ici *des Forces centrales directes*; & la ſeconde, *des Forces centrales inverſes.*

L'Ecrit que je viens de lire de M. Bernoulli renferme deux Solutions de la ſeconde de ces deux queſtions, & une de la premiere : Dans leſquelles Solutions paroît ſa ſagacité ordinaire, ſur-tout dans la maniere dont il déduit de la premiere de ces deux-là, que dans l'hypotheſe des Forces centrales en raiſon réciproque des quarrés des diſtances du mobile à leur centre ou foyer, ce mobile doit toujours décrire quelque Section Conique.

A l'occaſion de ces deux Solutions du Problême inverſe des Forces centrales, & d'une auſſi générale que je reçus de M. Herman peu de jours après celles-là; il me prît envie d'eſſayer ſi les formules directes que j'ai données de ces forces, & qui réſolvent toutes le premier des deux Problêmes précedens, ne me donneroient point auſſi la même inverſe que ces deux Meſſieurs ont trouvées pour la Solution du ſecond, & de 18. de ces formules directes qui ſe voïent dans les Mem. de 1701. pag. 31. 32. deux me donnerent tout d'un coup cette inverſe; & tant le ſoir que le lendemain douze autres d'entr'elles me la donnerent auſſi, preſque toutes avec la même facilité, les unes immédiatement, & les autres en les transformant en celles-là, même ſans avoir beſoin (pour les intégrer) d'en ſéparer les indéterminées, qu'elques compliquées qu'elles y ſoient, & même auſſi dans pluſieurs ſans y ſuppoſer aucune differentielle conſtante, c'eſt-à-dire, d'une maniere indéterminée.

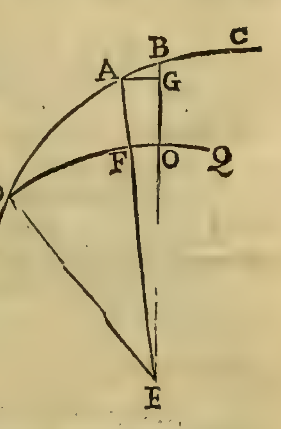
De ces 18. formules directes des Mem. de 1701. pag. 31. 32. dont quatorze me donnerent ainſi l'inverſe de M[rs]. Bernoulli & Herman, il y en a ſix infiniment générales qui donnent les douze autres en y ſuppoſant quelques differentielles conſtantes: d'autres differentielles, que j'y ai pareillement ſuppoſé conſtantes, m'ont encore donné pluſieurs autres formules directes, deſquelles intégrées m'eſt auſſi venu la même inverſe de ces deux ſçavans Geometres.

Cette inverſe n'étant que pour l'hypotheſe des tems en raiſon des aires centrales, que M. Newton a démontré dans ſes Princ. Math. pag. 37. être la veritable dans un eſpace ſans réſiſtance où le mobile auroit (par quelque cauſe que ce fût (la force centrale ſuppoſée; la cinquiéme des Solutions qui m'ont donné cette même inverſe, fut ſuivie d'une vûë qui me les rendit toutes générales pour des hypotheſes quelconques des tems, & auſſi générales en y ſuppoſant des differentielles conſtantes qu'en n'y en ſuppoſant pas. En voici quelques-unes de l'une & de l'autre maniere, leſquelles ſerviront

à trouver de mêmes les autres par le moyen de mes formules directes, à ceux qui voudront en avoir le plaisir. Pour y préparer le Lecteur voici aussi en peu de mots ce que j'y vas supposer des Mem. 1701.

PREPARATION.

Soit ici la Fig. 5. du Memoire qui commence à la pag. 20. de ceux de l'Acad. de 1701. dans laquelle Figure *E* est le centre ou le foyer des forces centrales quelconques qui font décrire au mobile *A* ou *B* une Courbe aussi quelconque *DABC*; *AE*, *BE*, sont deux rayons de ces forces, infiniment proches l'un de l'autre; *AG* est une perpendiculaire en *G* sur *BE*, ou un petit arc de cercle décrit du centre *E* par *A*; & *DQ* est un autre arc de cercle décrit du même centre *E* d'un rayon quelconque *ED*, & qui rencontre *AE*, *BE*, en *F*, *O*: les arcs, *DF*, *DO*, &c. s'en appelleront *arcs de révolution* du mobile pendant qu'il décrit les correspondans *DA*, *DB*, &c. de la Courbe *DABC* qu'il parcourt; & les aires correspondantes *DEA*, *DEB*, &c. s'appelleront (comme cidessus) *aires centrales*.



Soient encore ici, comme dans le Mem. de 1701. que je viens de citer, $ED = a$, DF ou $DO = z$, EA ou $EB = y$, $AG = dx$, $AB = ds$; dt, chaque instant ou élement de tems emploïé par le mobile à parcourir chaque élement *AB* de la Courbe *DABC*; & f, chaque force centrale de ce mobile en chaque point *A* ou *B* suivant chaque *AE* ou *BE*, laquelle force (f) soit donnée à volonté en y & en constantes. Soit de plus n une grandeur constante quelconque. Nous marquerons ici à l'ordinaire les sommes ou integrales par la caracteristique $\int$.

PROBLÊME.

Les Quadratures étant supposées, & la loi quelconque des Forces centrales f *étant donnée à volonté en* y *& en constantes; Trouver en général la nature de la Courbe que ces forces doivent faire décrire au mobile pendant des tems ou des élemens des tems* dt *donnés aussi à volonté en* y *& en constantes multipliées par* dx *ou par* dz *variables ou non.*

SOLUTION I.

Dans l'hypothese de ydx *constante.*

I. Dans cette hypothese les Mem. de 1701. pag. 32. art. 19. donnent $f = \frac{dsdds}{dydt^2}$, d'où résulte $\frac{2fdydt^2}{yydx^2} = - \frac{2dsdds}{yydx^2}$, dont l'intégrale (à cause de ydx supposée constante) est $2 \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2} = - \frac{ds^2}{yydx^2} + n$, ou $2yydx^2 \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2} = nyydx^2 - ds^2 = nyydx^2 - dx^2 - dy^2$, ou bien aussi $dy^2 = nyydx^2 - dx^2 - 2yydx^2 \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2}$; ce qui donne $dy = dx\sqrt{nyy - 1 - 2yy \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2}}$ (à cause de $EF(a). EA(y) :: FO(dz). AG(dx) = \frac{ydz}{a}$.) $= \frac{ydz}{a}\sqrt{nyy - 1 - 2yy \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2}}$, ou $dz = \frac{ady}{y\sqrt{nyy - 1 - 2yy \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2}}}$, qui est l'équation de la Courbe cherchée *DABC*, aussi-bien que $dx = \frac{dy}{\sqrt{nyy - 1 - 2yy \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2}}}$ résultante de $dy^2 = nyydx^2 - dx^2 - 2yydx^2 \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2}$ trouvée ci-dessus: Dans lesquelles équations on substituëra une valeur constante de n, & d'autres constantes aux degrés qu'exigera l'homogeneité des termes suivant les valeurs données de f & de $\frac{dt}{dx}$ en y & en constantes. *Ce qu'il falloit trouver.*

II. En substituant la valeur de $dx = \frac{ydz}{a}$ dans ces deux équations $dx = \frac{dy}{\sqrt{nyy - 1 - 2yy \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2}}}$, $dz = =$

=

$= \frac{ady}{y\sqrt{nyy - 1 - 2yy \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2}}}$, elles se changeront en $dx =$

$= \frac{dy}{\sqrt{nyy - 1 - 2aayy \times \int \frac{fdydt^2}{y^4dz^2}}}$, $dz = \frac{ady}{y\sqrt{nyy - 1 - 2aayy \times \int \frac{fdydt^2}{y^4dz^2}}}$,

qui exprimeront encore chacune la nature de la même Courbe $DABC$, en y substituant aussi des constantes au degré qu'exigera l'homogeneité des termes suivant les valeurs données de f & de $\frac{dt}{az}$ en y & en constantes. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

SOLUTION II.

Dans la même hypothese de ydx *constante.*

Dans cette hypothese les Mem. de 1701. pag. 32. art. 19. donnent aussi $f = \frac{dx^2 - yddy}{ydt^2}$; & conséquemment $\frac{2fdydt^2}{yydx^2} = \frac{2dydx^2 - 2ydyddy}{y^3dx^2} = \frac{2ydy}{y^4} - \frac{2dyddy}{yydx^2}$, dont l'intégrale (à cause de ydx supposée constante) est $2 \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2} = -\frac{1}{yy} - \frac{dy^2}{yydx^2} + n = \frac{nyydx^2 - dx^2 - dy^2}{yydx^2}$; d'où résulte $dy^2 = nyydx^2 - dx^2 - 2yy \times dx^2 \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2}$, & le reste comme dans la Solut. 1.

SOLUTION III.

Dans l'hypothese de dx *constante.*

Dans cette hypothese le nomb. 1. de l'art. 18. pag. 31. des Mem. de 1701. donne $f = \frac{dyds^2 - ydsdds}{ydydt^2}$, & conséquemment $\frac{2fdydt^2}{yydx^2} = \frac{2ydyds^2 - 2yydsdds}{y^4dx^2}$, dont l'intégrale (à cause de dx supposée constante) est $2 \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2} = -\frac{ds^2}{yydx^2} + n = \frac{nyydx^2 - ds^2}{yydx^2} = \frac{nyydx^2 - dx^2 - dy^2}{yydx^2}$; d'où résulte $dy^2 = nyydx^2 - dx^2 - 2yydx^2 \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2}$, & le reste comme dans la Solut. 1.

SOLUTION IV.

Dans la même hypothese de dx *constante.*

Dans cette hypothese le nomb. 1. de l'art. 18. de la pag. 31. des Mem. de 1701. donne aussi $f = \frac{ds^2 - yddy}{ydt^2} = \frac{dyds^2 - ydyddy}{ydydt^2}$ (dx constante rendant $dyddy = dsdds$) $= \frac{dyds^2 - ydsdds}{ydydt^2}$; d'où l'on aura les formules requises comme dans la précedente Solut. 3.

SOLUTION V.

Dans l'hypothese du $y^m dx$ *constante.*

Cette hypothese générale donnant $my^{m-1}dydx + y^m ddx = 0$, & conséquemment $yddx = -mdydx$; la substitution de cette valeur de $yddx$ en sa place dans la premiere $f = \frac{dxdyds^2 + yds^2ddx - ydxdsdds}{ydxdydt^2}$ des formules infiniment générales directe de la pag. 31. des Memoires de 1701. réduira cette formule à $f = \frac{\overline{1-m} \times dxdyds^2 - ydxdsdds}{ydxdydt^2}$; d'où résulte $\frac{2fdydt^2}{yydx^2} = \frac{\overline{2-2m} \times y^{1-2m}dyds^2 - 2y^{2-2m}dsdds}{y^{4-2m}dx^2} = \frac{\overline{2-2m} \times y^{1-2m}dyds^2 - 2y^{2-2m}dsdds}{y^{4-4m}} \times \frac{1}{y^{2m}dx^2}$, dont l'intégrale (à cause de $y^m dx$ supposée constante) est $2 \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2} = -\frac{ds^2}{y^{2-2m}} \times \frac{1}{y^{2m}dx^2} + n = -\frac{ds^2}{yydx^2} + n = \frac{nyydx^2 - ds^2}{yydx^2} = \frac{nyydx^2 - dx^2 - dy^2}{yydx^2}$; ce qui donne $dy^2 = nyydx^2 - dx^2 - 2yydx^2 \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2}$ & le reste comme dans la Solut. 1.

SOLUTION VI.

Sans supposer aucune differentielle constante.

La premiere des formules infiniment générales di-

rectes de la pag. 31. des Memoires de 1701. eſt $f = \frac{dx\,dy\,ds^2 + y\,ds^2\,ddx - y\,dx\,ds\,ds}{y\,dx\,dy\,dt^2}$; ce qui donne $\frac{2f\,dy\,dt^2}{yy\,dx^2} = \frac{2ydydx^2ds^2 + 2yyds^2dxddx - 2yydx^2dsdds}{y^4dx^4}$, dont l'intégrale eſt $2 \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2} = -\frac{ds^2}{yydx^2} + n = \frac{nyydx^2 - ds^2}{yydx^2} = \frac{nyydx^2 - dx^2 - dy^2}{yydx^2}$;
d'où réſulte $dy^2 nyydx^2 - dx^2 - 2yydx^2 \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2}$, & le reſte comme dans la Solut. 1.

COROLLAIRE I.

Il ſuit des deux formules générales trouvées dans l'art. 1. de la Solut. 1. & pareillement dans les autres Solutions: c'eſt-à-dire, des formules

$$dz = \frac{ady}{y\sqrt{nyy - 1 - 2yy \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2}}}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{yny - 1 - 2yy \times \int \frac{fdydt^2}{yydx^2}}}$$

1°. Que ſi l'on prend $dt = ydx$, c'eſt-à-dire, les tems en raiſon des aires centrales, ainſi que Mrs Bernoulli & Herman les prennent avec M. Newton après Kepler pour les Planetes ; les deux précedentes formules générales ſe changeront pour ce cas en $dz = \frac{ady}{y\sqrt{nyy - 1 - 2yy \times \int fdy}}$, $dx = \frac{dy}{\sqrt{nyy - 1 - 2yy \times \int fdy}}$, dont la premiere ſera celle de Mrs Bernoulli & Herman, aux noms près, en y ſubſtituant $ab = n$, & $ac = 1$, pour l'homogeneité des termes, & de plus $f = \frac{aag}{2yy}$ pour l'hypotheſe particuliere des Sections Coniques: Hypotheſe des forces centrales que M. Newton (dans ſes Princ. Math. pag. 50. 51.) a démontrée, & moy enſuite (dans les Mem. de l'Acad. de 1700. pag. 223. par le moyen de la formule directe $f = -\frac{dsdds}{aydt^2}$, qui vient de donner la premiere des Solutions précedentes) convenir aux Planetes ſuppoſées tracer des Ellipſes à un des foyers deſquelles ſoit le centre de ces forces.

2°. Que si l'on prend en général $dt = pdx$, dont p (aussi bien que f) soit donnée à volonté en y & en constantes, les deux précedentes formules générales se changeront en

$$dz = \frac{ady}{y\sqrt{nyy - 1 - 2yy \times \int \frac{fppdy}{yy}}}, dx = \frac{dy}{\sqrt{nyy - 1 - 2yy \times \int \frac{fppdy}{yy}}},$$

lesquelles donneront encore les deux particulieres du précedent nomb. 1. en y prenant $p = y$ conformément à leur hypothese de $ydx = dt = pdx$.

COROLLAIRE II.

Il suit aussi des deux autres formules générales trouvées dans l'article 2. de la Solut. 1. & pareillement dans toutes les autres Solutions précédentes : c'est-à-dire, des formules.

$$dz = \frac{ady}{y\sqrt{nyy - 1 - 2aayy \times \int \frac{fdydt^2}{y^4dz^2}}},$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{nyy - 1 - 2aayy \times \int \frac{fdydt^2}{y^4dz^2}}}.$$

1°. Que si, pour exprimer les tems (t) par les arcs (z) de révolution, l'on y prend $dt = dz$; ces deux formules générales se changeront pour ce cas en $dz = \frac{ady}{y\sqrt{nyy - 1 - 2aayy \times \int \frac{fdy}{y^4}}}$, $dx = \frac{dy}{\sqrt{nyy - 1 - 2aayy \times \int \frac{fdy}{y^4}}}$

2°. Que si en général on prend $dt = qdz$, dont q (aussi bien que f) soit donnée à volonté en y & en constantes, les deux précedentes formules générales se changeront en

$$dz = \frac{ady}{y\sqrt{nyy - 1 - 2aayy \times \int \frac{fqqdy}{y^4}}}, dx = \frac{dy}{\sqrt{nyy - 1 - 2aayy \times \int \frac{fqqdy}{y^4}}},$$

lesquelles donneront encore les deux particulieres du précedent nomb. 1. en y prenant $q = 1$, conformément à leur hypothese de $dz = dt = qdz$.

SCOLIE.

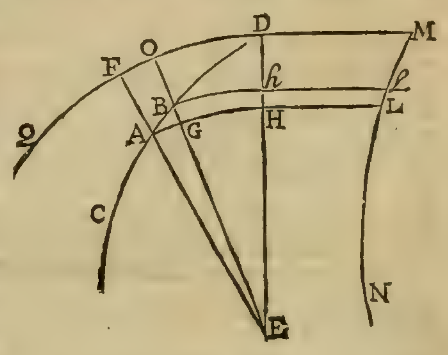
I. Il eſt manifeſte que l'uſage le plus commode des quatre formules générales inverſes des Solutions précedentes, rapportées dans les Corol. 1. 2. eſt de les réduire aux générales des nomb. 2. de ces Corollaires, pour delà y ſubſtituer des valeurs de p, q, f, données (*hyp.*) en y & en conſtantes, & pour juger après cela ſi les intégrations de $\int\frac{fdydt^2}{yydx^2}$, $\int\frac{fdydt^2}{y^4dz^2}$, y ſont poſſibles.

II. Des ſix formules infiniment générales directes de la pag. 31. des Mem. de 1701. dont la premiere, ſans y faire aucune differentielle conſtante, vient de donner dans la Solut. 6. les quatre générales inverſes rapportées dans les précedens Corol. 1. 2. les cinq autres les donnent auſſi ſans y ſuppoſer aucune differentielle conſtante : ſçavoir la quatriéme immédiatement de même que la premiere, & les quatre autres en les transformant en ces deux-là. Après cela ſi l'on veut y employer des differentielles conſtantes, comme dans les cinq premieres des Solutions précedentes ; les huit formules directes déduites des ſix infiniment générales dans les pag. 31. 32. des Mem. de 1701. en y ſubſtituant ſucceſſivement ds, dz, conſtantes, donneront encore autant d'autres Solutions du même Problême inverſe. Outre ces formules directes, pluſieurs autres qu'on peut déduire encore des infiniment générales en y ſubſtituant auſſi ſucceſſivement $\frac{dy}{y}$, $\frac{ds^2}{y}$, $y^m ds$, &c. conſtantes, donneront de même encore tout autant d'autres Solutions de ce Problême. Je n'en mets ici que ſix pour laiſſer le plaiſirs aux jeunes Geometres de trouver les autres ; je n'y en mets même tant que pour leur en marquer plus ſûrement la maniere, & pour leur en faire mieux preſſentir la facilité qui eſt preſque la même pour toutes, ainſi qu'ils l'eſſayeront ſi, à portée de cette matiere, ils l'aiment aſſez pour vouloir s'y appliquer.

CONSTRUCTION GENERALE.

De la Courbe DAC *requiſe dans le Problême précedent.*

Imaginons une autre Courbe *MLN*, qui ait ſes appliquées $HL = \frac{aa}{2y\sqrt{nyy - 1 - 2yy \times \int \frac{fppdy}{yy}}}$ toutes perpendiculaires en autant de points *H* ſur le rayon arbitraire *ED* du cercle *DFQ* décrit du centre *E* des forces *f*, par le point *D*, auquel point *D* ſoit auſſi perpendiculairement ſur *DE* l'appliquée *DM* de cette Courbe *MLN* Cela fait, puiſqu'on ſuppoſe ici les quadratures données, les poſſibles ne ſe pouvant ici trouver que dans le détail, & non dans ce général; ſoit le ſecteur circulaire quelconque *DEF* = *DHLM* aire correſpondante auſſi quelconque de la Courbe *MLN*: je dis que ſi du centre *E* par *H*, l'on décrit l'arc de cercle *HA* qui rencontre en *A* le rayon *EF* du concentrique *DFQ*; ce point *A* ſera un de ceux de la Courbe cherchée *DBC*, & ainſi des autres.



DEMONSTR. Cette conſtruction donnant ainſi par tout les aires correſpondantes *DEF*, *DHLM*, égales entr'elles, leurs élemens correſpondans *FEO*, *HhlL*, ſeront auſſi par tout égaux entr'eux. Donc (les noms demeurant ici les mêmes que dans la préparation de la pag. 535.) l'arc *Bh* (*hyp.*) concentrique à *AH*, & infiniment près de lui rendant $Hh = GB = dy$, & ayant de plus (*hyp.*) $HL = \frac{aa}{2y\sqrt{nyy - 1 - 2yy \times \int \frac{fppdy}{yy}}}$; l'on aura par tout ici

$$\frac{nady}{2y\sqrt{nyy-1-2yy\times\int\frac{fppdy}{yy}}}=Hh\times HL=HhlL\ (hyp.)=FEO$$

$=\frac{adz}{z}$, c'eſt-à-dire, $dz=\frac{ady}{y\sqrt{nyy-1-2yy\times\int\frac{fppdy}{yy}}}$ pour l'équation de la Courbe *DBC* qu'on vient de décrire. Donc cette équation étant auſſi (*Corol.* 1. *nomb.* 2.) celle de la Courbe cherchée dans le Problême précedent ; cette Courbe *DBC* ainſi décrite, ſera auſſi la générale qu'exige ce Problême. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUES.

I. Dans la conſtruction précedente ſi, au lieu de prendre $HL=\frac{aa}{2y\sqrt{nyy-1-2yy\times\int\frac{fppdy}{yy}}}$ conformément au nomb. 2. du Corol. 1. l'on eût pris $HL=\frac{aa}{2y\sqrt{nyy-1-2yy\times\int\frac{fdydt^2}{yydx^2}}}$ conformément aux Solutions d'où l'on a conclu ce Corollaire ; il eſt viſible que cette conſtruction de la Courbe *DBC* auroit été préciſément la même : l'on n'a préféré la premiere de ces deux expreſſions à la ſeconde, que par la raiſon rapportée dans l'art. 1. du Scholie précedent.

II. Les quatre équations générales rapportées des Solutions dans les Corollaires précedens, exprimant la même Courbe en général ; il eſt viſible auſſi que la conſtruction précedente ſatisfait à toutes.

III. Il eſt encore à remarquer que les quadratures ſuppoſées dans cette conſtruction générale, la rendent beaucoup plus facile que les conſtructions particulieres pour leſquelles il faut trouver ces quadratures, ou les éviter quand les Courbes ſont Algebriques, comme M. Bernoulli a fait dans le cas ordinaire des tems en raiſon des aires centrales, & des forces en raiſon réciproque

des quarrés des diſtances du mobile au centre de ces forces : la conſtruction qu'il vient de donner de la Courbe requiſe en ce cas, & la maniere dont il fait voir que cette Courbe doit toujours être une Section Conique, ſont d'une ſagacité & d'une adreſſe qui répondent à ce qu'il en paroît dans tout ce qu'il a donné juſqu'ici au Public.

EXPERIENCES

DE L'EFFET DU VENT

A L'EGARD DU THERMOMETRE.

PAR M. CASSINI le fils.

1710. 13. Decemb.

ENtre diverſes obſervations Phyſiques que M. l'Abbé Teinturier Archidiacre de Verdun m'a envoyées depuis ſon retour de Paris ; il a remarqué que lorſqu'on excite du vent contre un Thermometre avec un ſoufflet, la liqueur qui y eſt enfermée augmente de hauteur ; ce qui lui paroît contraire à l'impreſſion que le vent fait ſur nous, qui paroît y exciter un ſentiment de froid.

Pour examiner ſi le même effet arrive à nos Thermometres, j'ay appliqué un ſoufflet ordinaire à un Thermometre renfermé dans une Chambre, qui dans les Caves de l'Obſervatoire ſe tient à la hauteur de 50 degrés, & qui étoit alors à la hauteur de 52 degrés, c'eſt-à-dire deux degrés au-deſſus du temperé ; & après avoir ſoufflé contre la boule pendant 7 ou 8 minutes, le Thermometre eſt monté d'un degré.

J'ay réïteré quelques jours après la même experience, le Thermometre étoit à la hauteur de 46 degrés, & il eſt monté auſſi d'un degré pendant le même intervalle de temps.

Je me ſuis ſervi d'un Thermometre de M. Amontons, que

que j'ai appliqué au foyer d'une forge où il y a plusieurs années qu'on n'a fait de feu. Ce Thermometre est monté de près d'une ligne dans l'espace de six minutes que j'ay soufflé contre le Thermometre.

Enfin j'ay mis le même Thermometre au foyer de la forge, où je l'ay laissé pendant l'espace de trois heures ou environ. Je l'ay ensuite retiré pour voir la hauteur où il étoit, que j'ay marqué de 53 pouces $2\frac{2}{3}$. J'ay soufflé contre ce Thermometre pendant l'espace de 5 minutes, & l'ayant retiré je l'ay trouvé à la hauteur de $53^p\ 4^l\ \frac{1}{3}$, c'est à dire une ligne & $\frac{2}{3}$ plus haut. Je l'ay remis aussi-tôt, & après avoir soufflé pendant l'espace de 5 minutes je l'ay trouvé à la hauteur de $53^p\ 5^l\ \frac{1}{4}$. Ayant enfin soufflé pendant 5 autres minutes, il est monté à la hauteur de $53^p\ 5^l$ & $\frac{5}{6}$; ensorte que dans l'espace d'un quart-d'heure le Thermometre est monté de plus de trois lignes.

On peut apporter pour raison de cette expérience que tout mouvement produit de la chaleur, & qu'ainsi l'air excité avec violence acquiert quelque degré de chaleur, quoiqu'en effet il paroisse nous causer un sentiment de froid, à cause que les particules de l'air poussées avec violence s'appliquent avec plus de force & en plus grande quantité contre notre corps qui est plus chaud que l'air que nous respirons.



EXPERIENCES

SUR LES THERMOMETRES.

PAR M. DE LA HIRE le fils

1710.
17. Dec.

MOn Pere avoit obſervé autrefois qu'ayant couvert de neige la boule d'un Thermometre à eſprit de vin expoſé à l'air, mais non-pas au vent, l'eſprit de vin n'avoit pas changé de hauteur dans le tuyau, & qu'enſuite ayant ſoufflé fortement avec un ſoufflet contre cette neige, l'eſprit de vin étoit toujours demeuré à la même hauteur; d'où il ſembloit que l'on pouvoit conclure que la temperature de l'air qui agit ſur l'eſprit de vin n'y pouvoit cauſer aucune alteration y étant fortement pouſſé; cependant il a paru le contraire par une expérience rapporté à l'Academie par M. Caſſini le fils. C'eſt pour tâcher de découvrir la raiſon de cet effet contraire, que nous avons refait l'expérience qu'il a rapportée, mais dans differentes circonſtances & ſur 4 Thermometres, dont 3 à eſprit de vin, & 1 à air de M. Amontons.

Le 27 Novembre 1710 vers les 11 heures du matin, nous ſoufflâmes fortement avec un ſoufflet contre la boule d'un Thermometre à eſprit de vin expoſé depuis un grand nombre d'années dans la Tour orientale de l'Obſervatoire, laquelle eſt découverte, enſorte qu'il y eſt à l'abri du vent, & l'eſprit de vin qui étoit à 35 parties dans le tuyau, ce qui marque un air un peu plus chaud que le commencement de la gelée, ayant remarqué que lorſqu'il eſt à 32 il commence à geler dans la campagne, ne monta pas ſenſiblement dans le tuyau; nous avions pris la précaution devant que de nous ſervir du ſoufflet de le mettre pendant deux heures dans le même endroit où étoit le Thermometre, de peur que ſi tout le ſoufflet

étoit un peu plus chaud que l'air qui y entroit il ne s'y échauffât, & venant ensuite à rencontrer la boule du Thermometre, il ne l'échauffât & ne fît monter la liqueur; & au contraire si le soufflet avoit été dans un lieu où l'air eût été plus froid que celui où étoit le Thermometre il ne la fît descendre comme nous le remarquâmes en soufflant avec le même soufflet, & aussi-tôt après l'experience rapportée cy-dessus, contre la boule d'un autre Thermometre qui étoit dans le Cabinet de mon Pere, où l'air étoit beaucoup plus chaud que l'air exterieur où le soufflet avoit été exposé; car aussi-tôt la liqueur descendit environ d'une demie ligne, & remonta ensuite à la même hauteur à peu près, quoique l'on continuât de souffler.

Nous avons fait encore un autre experience sur un Thermometre à air, qui est un de ceux que M. Amontons avoit fait d'abord pour l'experience de la chaleur de l'eau boüillante. La boule qui est au bas du petit tuyau recourbé est fort grosse, & a dans sa partie inferieure assez de mercure pour fournir à la dilatation de l'air de la boule, qui le fait élever dans le tuyau qui est ouvert par le haut, & qui a environ quatre pieds de hauteur, ensorte que l'air n'entre point dans le tuyau.

Le 27 Novembre 1710 sur les 4 heures après midy, le Thermometre & le soufflet étant restés dans le même lieu plus de 5 heures, & ayant marqué exactement la hauteur du mercure dans le petit tuyau, nous soufflâmes pendant 3′ contre la boule qui est remplie d'air, lequel étoit comprimé par 25 pouces de mercure, & nous ne remarquâmes aucun changement de hauteur au mercure qui étoit dans le tuyau.

Le lendemain 28 sur les 10 heures du matin, nous réïterâmes la premiere experience sur le Thermometre qui est dans la Tour orientale, & l'esprit de vin ne monta point sensiblement; il y avoit un autre Thermometre à esprit de vin proche de celui-là dont la boule étoit beaucoup plus petite & le tuyau fort délié, que nous ôtâmes

& que nous mîmes dans un lieu à côté qui est fermé & où il y avoit un soufflet double; & après l'y avoir laissé 3 ou 4 heures, nous soufflâmes contre la boule de ce second Thermometre pendant 7′ avec le soufflet double, & l'esprit de vin monta de trois lignes dans le tuyau.

Nous prîmes ensuite le Thermometre à air de M. Amontons qui étoit depuis long-tems dans ce même lieu, & nous soufflâmes avec le soufflet double contre la boule pendant 7′, & le mercure monta aussi de trois lignes; à la verité nous étions 3 ou 4 personnes un peu éloignés du Thermometre pendant l'experience.

Nous eûmes peur que la quantité de personnes que nous étions n'eût causé cet effet; c'est pourquoy nous laissâmes les Thermometres l'un proche de l'autre pendant 2 ou 3 heures, & ensuite avec un soufflet ordinaire nous soufflâmes pendant 3′ contre chacune des boules de ces deux Thermometres, l'esprit de vin & le mercure qui étoient redescendus à la hauteur où ils étoient avant la précedente experience remonterent chacun environ d'une ligne, mais celui à esprit de vin un peu moins que l'autre.

Nous eûmes peur que ce ne fût à cause que nous avions commencé par celui à esprit de vin, & que le soufflet ne se fût échauffé dans nos mains; c'est pourquoy nous les laissâmes dans la même position & le soufflet proche d'eux, & sur les six heures du soir nous soufflâmes encore pendant 3′ contre chacune de ces deux boules; en commençant par celui à esprit de vin qui monta peu, mais celui à air ne monta point du tout.

Ensuite avec le même soufflet nous soufflâmes contre la boule d'un autre Thermometre à esprit de vin qui est de M. Amontons, & qui est placé dans le Cabinet de mon Pere, où l'air étoit plus chaud que celui où étoit le soufflet, & l'esprit de vin monta dans le tuyau de $\frac{2}{3}$ de ligne, & ne descendit point d'abord comme il avoit fait la veille.

Le 4 à 7 heures du matin le Thermometre à air & le

gros Thermometre à esprit de vin & le soufflet ayant passé toute la nuit dans la Tour orientale, nous soufflâmes pendant 4′ contre la boule de celui à air, & il ne monta point; ensuite nous soufflâmes contre la boule de celui à esprit de vin, & il monta environ d'une ligne. Ensuite nous soufflâmes pendant plus de 4′ contre la boule d'un autre Thermometre à esprit de vin qui est plus petit, que nous avions laissé proche des vitres d'un lieu à côté qui est fermé, & qui est exposé au midy, les trous du soufflet étant tournés contre les vitres, la liqueur ne monta presque pas; mais en continuant de souffler, les trous du soufflet tournés de l'autre côté, il monta davantage.

L'après-midy sur les 2 heures le même Thermometre étant resté dans la même place, & ayant reçû l'impression du Soleil pendant 3 heures & demie, & le soufflet étant resté dans le même lieu sur un siege à six pieds de distance environ du Thermometre, le Soleil ayant aussi donné dessus, nous soufflâmes contre la boule de ce Thermometre, la liqueur descendit de plus de 6 lignes, les trous du soufflet n'étant pas tournés contres les vitres, & les ayant tournés contre les vitres & continuant de souffler, l'esprit de vin descendit encore considerablement, quoiqu'il y fît fort chaud, le Ciel ayant été fort serein toute la journée, & le Soleil y donnant pendant l'experience.

Le 5 au matin nous portâmes le Thermometre à air & le petit à esprit de vin dans la cave de l'Observatoire; & après les y avoir laissé près de trois quarts-d'heure & le soufflet aussi, & avoir ouvert & fermé le soufflet pendant du tems pour lui faire prendre par dedans la même chaleur que celle de l'air de la cave, nous soufflâmes pendant 5′ contre la boule du Thermometre à air, & le mercure monta environ de 3 lignes: mais comme les deux Thermometres étoient à un pied de distance l'un de l'autre, & qu'auparavant de souffler contre celui à air nous avions remarqué aussi la hauteur de celui à es-

prit de vin, nous nous apperçûmes que celui à esprit de vin étoit aussi monté d'une ligne, quoiqu'on n'eût point soufflé contre; ensuite nous soufflâmes pendant le même tems contre celui à esprit de vin, & il monta aussi d'environ 3 lignes, & pendant ce tems-là le Thermometre à air ne monta point.

Nous avions pris la précaution de les porter dans la cave, craignant que la lumiere répanduë dans l'air pendant le jour ne fît dessus quelque impression qui eût du rapport à ce qui arrive à la pierre de Boulogne & autre phosphore.

Ensuite nous appliquâmes un morceau de drap en 2 ou 3 doubles contre la boule du Thermometre à air, & soufflant avec violence contre, il ne monta que d'une ligne, & pendant ce tems-là le Thermometre à esprit de vin qui étoit resté à la même place monta d'une demie ligne; ensuite nous appliquâmes le drap contre la boule du Thermometre à esprit de vin, & après avoir soufflé contre pendant le même tems, il monta encore d'une demie ligne: mais le Thermometre à air ne monta point pendant ce tems-là, non plus que dans l'experience précedente.

Quoiqu'il paroisse en general que les experiences que nous venons de rapporter détruisent l'ancienne que mon Pere avoit faite, cependant il semble qu'elles fournissent un moyen d'en rendre raison & d'expliquer les differences qui se trouvent entr'elles.

Car la neige qui étoit sur la boule du Thermometre & au travers de laquelle passoit l'air poussé par le soufflet, étoit assez froide pour refroidir les particules de l'air un peu moins froides que la neige, qui se seroient appliquées en grande quantité & en peu de tems par le moyen du soufflet contre la boule du Thermometre, & qui auroient fait monter la liqueur. L'on ne peut quasi douter que ce ne soit la veritable raison de cette derniere experience, & il semble que par son moyen on peut rendre raison de toutes les differences que nous avons remarqué

dans celles que nous avons faites. Cependant avant que de décider absolument, nous croyons qu'il faut attendre qu'on ait fait les deux experiences suivantes : la premiere, qui seroit de souffler contre la boule d'un Thermometre pendant un très-grand froid ; & la seconde, d'y souffler pendant un très-grand chaud, afin de voir si ce qui arrivera dans les extrêmes, sera conforme à ce qui est arrivé dans l'état moyen & autour du moyen.

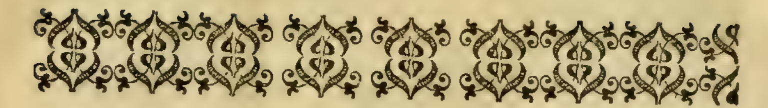
Le 16 à 8 heures du matin un Thermometre à esprit de vin & de l'eau dans un vaisseau étant restés toute la nuit dans un même lieu, nous mîmes ce Thermometre dans cette eau, & après l'y avoir laissé assez de tems, nous ne remarquâmes point que l'esprit de vin eût changé de hauteur dans le tuyau ; ensuite nous retirâmes le Thermometre de l'eau, nous moüillâmes un linge dans cette eau, nous l'appliquâmes en deux ou trois doubles sur la boule de ce Thermometre, & nous soufflâmes fortement avec un soufflet ordinaire contre ce linge pendant 4 à 5′ sans que l'esprit de vin changeât de hauteur.

Ayant laissé le Thermometre dans cet état pendant une heure, nous voulûmes refaire l'experience. Nous ôtâmes le linge de dessus la boule du Thermometre pour faire prendre à l'esprit de vin le même degré de chaleur de que l'air du lieu où il étoit ; & en attendant qu'il l'eût repris, nous voulûmes voir si en l'agitant dans l'air il ne lui arriveroit pas la même chose qu'en soufflant dessus, ce qui nous réüssit ; car l'ayant agité fortement dans l'air pendant 8′, l'esprit de vin monta de 2 lig. dans le tuyau, ensuite l'ayant laissé reposer quelque tems, il ne changea point de hauteur. Nous le mîmes ensuite pendant 8′ dans la même eau où il avoit été d'abord, & la liqueur descendit quasi d'une ligne, mais ce ne fut que pendant les quatre dernieres minutes ; ensuite nous le retirâmes de l'eau, & ayant appliqué le linge moüillé dessus, nous soufflâmes avec force pendant 8′ contre le linge, & l'esprit de vin remonta à la même hauteur où il étoit devant que d'avoir été plongé dans l'eau.

Le 17 au matin ſur les 9 heures le même Thermometre à eſprit de vin ayant paſſé toute la nuit dans la Tour orientale de l'Obſervatoire, & pluſieurs morceaux de marbre que nous y avions mis, nous les appliquâmes contre la boule de ce Thermometre, & en une demie heure l'eſprit de vin deſcendit dans le tuyau de plus d'une ligne, & enſuite continuant de l'examiner, nous nous apperçûmes qu'il étoit un peu remonté. Pendant cette experience le grand Thermometre à eſprit de vin qui demeure toujours dans cette Tour étoit remonté d'environ 2 lignes $\frac{1}{2}$. Cette experience ſembleroit prouver que le marbre ſe refroidit plus que l'eſprit de vin.



MESSIEURS



MESSIEURS DE LA SOCIETE' Royale des Sciences établie à Montpellier, ont envoyé à l'Académie l'Ouvrage qui suit, pour entretenir l'union intime qui doit être entr'elles, comme ne faisant qu'un seul Corps, aux termes des Statuts accordez par le Roi au mois de Fevrier 1706.

OBSERVATION

Sur les petits œufs de Poule sans jaune, que l'on appelle vulgairement œuf de Coq.

PAR M. LAPEYRONIE.

LEs préjugez de la naissance & de l'éducation entretiennent les hommes dans des erreurs si grossieres, souvent même en matiere de fait, qu'il n'est pas moins digne des Compagnies de les en desabuser que de leur annoncer de nouvelles verités.

On les accoûtume par-là à un sage pyrrhonisme qui les tient en suspens, & qui ne leur permet d'admettre pour veritable que ce qui est clairement & distinctement connu.

Beaucoup de personnes, d'ailleurs raisonnables, croïent avec le peuple que les Coqs pondent des œufs, que ces œufs étant couvés dans du fumier ou ailleurs, on en voit

éclore des Serpens aîlés qu'on appelle Basilics *. Ils poussent plus loin la fable, & assurent que les regards de ces Basilics font mourir les hommes. Cette erreur n'a d'autre fondement qu'une ancienne tradition, dont la fausseté sera démontrée par les faits suivans.

Un Fermier m'apporta plusieurs œufs un peu plus gros que ceux de Pigeon (*Fig.*) 1. disant qu'ils avoient été pondus par un jeune Coq, qui étoit le seul de sa basse-cour, dans laquelle il y avoit aussi quelques Poules. Il doutoit si peu de ce fait, qu'il m'assura positivement que si je faisois éclore quelqu'un de ces œufs, il naîtroit de chacun d'eux un Serpent; & pour me persuader ce qu'il avançoit, il me dit que je n'avois qu'à ouvrir un de ces œufs, que je le trouverois sans jaune, & qu'au défaut du jaune j'y verrois en petit, mais fort distinctement, la figure d'un Serpent.

Je fis l'ouverture de l'un de ces œufs en presence de M. Bon Premier President de la Chambre des Comptes, Aydes & Finances, Associé honoraire, & de plusieurs autres personnes. Nous fûmes tous également surpris de voir cet œuf sans jaune, & de voir au défaut du jaune un Corps qui ressembloit assez bien à un petit Serpent entortillé. (*Fig.* 2.)

Je le développai sans peine après en avoir raffermi la substance dans de l'esprit de vin. (*Fig.* 3.)

J'en ouvris ensuite quelques autres que je trouvai en gros semblables au premier; toute la difference qui s'y trouvoit, c'est que le prétendu Serpent n'étoit pas dans

* Sunt etiam quædam ova majora, alia minora, alia etiam minima quæ vulgo in Italia *Centinina* dicuntur & mulieres nostræ hodie (ut olim) à Gallo edita & Basiliscos productura fabulantur. Vulgus (inquit Fabricius) putat exiguum hoc ovum esse ultimum Gallinarum, cum jam centum ova Gallina pepererit (unde *Centininum* vocant (quod sine vitello est: habet tamen cætera, ut chalazas, albumen, membranas, & corticem, verisimile enim est tunc generari, cum vitelli omnes jam in ova migrarunt, neque amplius in vitellario aliquis superest vitellus, qui in ovum evadere possit: ex altera tamen parte, albuminis adhuc modicum superest: ex hoc enim modico credibile est ovulum propositum creari. *Harvæus in tractatu generationis animalium, exercitatione* XII. *de ovorum differentiis*.

tous également bien representé. J'ai eu l'honneur de faire voir plusieurs de ces œufs à la Compagnie; j'en ai trouvé quelques-uns dans lesquels on voyoit une tache jaune, ronde, d'une ligne de diametre, sans épaisseur, située sur la membrane qu'on trouve sous la coque cette tache répondoit à l'extremité obtuse de l'œuf.

La difference de ces œufs aux œufs ordinaires qui ont tous un jaune, me donna la curiosité d'approfondir cette matiere, étant très-persuadé que si ces œufs avoient été pondus par un Coq, il falloit que celui-ci eût un organe particulier, & qu'outre les testicules ou les deux verges il eût un ovaire & une trompe, ce qui l'auroit rendu hermaphrodite; plusieurs animaux le sont de leur nature, & nous lisons les observations de tant de Monstres qu'on dit l'avoir été, qu'on auroit bien pû penser qu'il peut se trouver un Coq qui le fût aussi.

Cette reflexion excitant ma curiosité, j'ouvris le jeune Coq que l'on prétendoit avoir pondu nos petits œufs, & par la dissection que j'en fis, j'y trouvai deux gros testicules qui donnoient origine à des vaisseaux de semence bien conditionnés, qui se terminoient chacun de leur côté par une petite verge dans la cloaque: le Coq nous parut très-vigoureux, mais incapable de ponte par le défaut d'organes. Je ne laissai pas que de faire couver quelques-uns de ces œufs que j'avois ramassés, je les ouvris après un mois de couvée, & je n'y trouvai aucun changement, si ce n'est que le blanc étoit plus divisé & plus fluide qu'à l'ordinaire.

Le Fermier n'ayant plus de Coq fut bien surpris de continuer à trouver des œufs semblables à ceux qu'il m'avoit apportés; il fut attentif à découvrir d'où ils venoient, gueri de son erreur, il voulut en connoître la source, & s'assura qu'ils étoient pondus par une Poule qu'il m'apporta.

J'apperçus pendant tout le temps que je la gardai qu'elle chantoit à peu près comme un Coq enroüé, mais qu'elle chantoit avec beaucoup de violence.

Qu'elle rendoit par la cloaque des matieres jaunes fort délayées qui ressembloient à du jaune d'œuf détrempé dans de l'eau, & qu'elle pondoit de petits œufs semblables à ceux que j'avois ouverts.

Convaincus de ces faits il n'étoit plus question que d'en trouver la cause; je la cherchai dans les entrailles de la Poule, & je fis voir à la Compagnie une vessie de la grosseur du poing pleine d'eau fort claire representée par *CCCCC* dans la Fig. 4. attachée par la racine superieure *G* de son col au ligament *E E* qui attache à l'ovaire le pavillon de l'*oviductus*, & par la racine inferieure au centre *G* du mezentere de l'*oviductus*, ce qui étrangloit considerablement les deux parties de l'*oviductus* que cette attache *FF* embrassoit.

Cette hydropisie particuliere étrangloit si fort les deux endroits de l'*oviductus* marqués par *FF*, que leur cavité enflée avec violence n'avoit qu'environ cinq lignes de diametre; ainsi un œuf ordinaire, tels qu'ils sont en tombant dans la trompe, ne pouvoit pas y passer sans la crever, ou sans crever lui-même.

Le ventre de la Poule parut rempli d'une liqueur jaune dans laquelle nageoient de petites concretions semblables à du jaune d'œuf durci, ce qui formoit une autre espece d'hydropisie assez singuliere.

La grosse vessie remplie d'eau étoit la veritable cause de tous ces faits.

Lorsqu'un œuf embrassé par le pavillon s'étoit détaché de l'ovaire & qu'il étoit engagé dans l'*oviductus*, il passoit quoiqu'avec beaucoup de peine au-delà du premier étranglement, & ne pouvoit absolument pas passer au-delà du second, 1°. parce qu'il étoit plus grand que le premier, 2°. parce que le blanc de l'œuf l'avoit grossi, l'humeur lui ayant été fournie par les membranes du canal qu'il avoit parcouru, l'œuf engagé entre les deux étranglemens irritoit les membranes du canal, qui ne pouvant le chasser redoubloit ses contractions, & obligeoit la Poule à se donner de grands mouvemens, & à

faire de violens efforts qu'elle exprimoit par des cris qui imitoient, comme il a été déja dit, le chant d'un Coq enroüé. Ces efforts pressoient la vessie pleine d'eau, celle-ci s'appliquoit contre ces attaches; & dans les concours de toutes ces differentes forces, l'œuf dont les membranes étoient encore très-minces, qui n'avoit que très-peu de blanc, & point de coque, se crevoit, le jaune s'échappoit tantôt dans l'abdomen, tantôt dans la cloaque, selon le côté vers lequel la crevasse répondoit, l'un & l'autre étoit arrivé à la Poule, comme on l'a déja observé.

Le volume de l'œuf étant diminué par la perte d'une grande partie du jaune, descendoit malgré l'étranglement & continuoit son chemin.

Il est à remarquer que l'éponge du blanc qui environne le jaune ne laissoit pas de se remplir, quoiqu'elle fût percée dans l'endroit par où le jaune s'échapoit, & qu'elle manquât par-là de la tension qu'on auroit jugé devoir lui être nécessaire pour son accroissement, malgré cela l'humeur du blanc toujours fournie par les membranes de l'*oviductus* * grossissoit son éponge; à mesure qu'elle augmentoit, elle exprimoit le reste de la liqueur fluide du jaune qui ne pouvoit résister à cause de son issuë, & qui sortoit presque toûjours entierement; il laissoit quelquefois des traces à un des coins de l'œuf sous la forme d'une tache jaune; il pouvoit se faire aussi qu'il restât une petite portion du jaune ramassé, quoique je n'en aye jamais ouvert où il s'en soit trouvé.

Pendant que le jaune se vuidoit peu à peu les *calazas* se rengoient differemment selon l'endroit de la crevasse

* Plusieurs personnes prétendent que le blanc de l'œuf est fourni par le jaune. Cette Observation démontre non-seulement que le jaune n'est pas la source du blanc (car comme le jaune qui augmente plûtôt que de diminuer dans l'*Oviductus*, auroit-il pû suffire à produire toute la substance du blanc qui a beaucoup plus de volume que le jaune même, s'il ne recevoit d'ailleurs?) mais encore que la liqueur qui le fait ne passe point par le jaune, mais qu'après avoir passé par la membrane exterieure de l'œuf, elle entre immédiatement dans le corps spongieux où elle s'arrête: si cela étoit autrement, l'humeur du blanc se seroit écoulée avec le jaune, & son éponge n'auroit pas grossi.

de l'œuf, si elle se trouvoit à côté d'un *chalaza*, les cellules des environs du *chalaza* opposé grossissant choisissoient l'autre qui se colloit à l'angle obtus de l'œuf, où il trouvoit une moindre résistance; aussi je l'ai souvent trouvé collé à cet endroit, plusieurs fois même ensemble avec la tache jaune.

Mais lorsque l'ouverture se faisoit dans un endroit du jaune également éloigné des deux *chalazas*, ils travailloient alors de concert à chasser le jaune & se réünissoient ensuite au centre de l'œuf par le resserrement de la membrane du jaune, aux bouts de laquelle ils sont fortement attachés, ce qui representoit un serpent beaucoup plus entortillé que l'orsqu'il n'y avoit qu'un seul *chalaza*.

Après que le jaune étoit entierement vuidé, & qu'il avoit été suivi de ce qui se trouvoit de plus fluide dans le blanc, son ouverture étoit bien-tôt cicatrisée par la viscosité du blanc enfermé dans un corps spongieux, aussi-bien que par les matieres grasses dont l'interieur de l'*oviductus* est enduit, & enfin par la matiere de la coque de l'œuf qui se trouve au bas de ce conduit.

J'ai ramassé de cette humeur, & l'ayant exposée à une douce chaleur, elle a fait une substance semblable à la coque.

Il y a apparence qu'une partie du blanc s'échapoit avec le jaune, puisqu'il n'y en avoit dans chaque petit œuf qu'environ le tiers de ce qu'on en trouve dans un œuf ordinaire.

J'ai trouvé quelquefois la cicatrice de l'ouverture de la membrane par où le jaune s'étoit échapé, si intimement collée à la partie de la coque qui y répondoit qu'on n'auroit pû l'en détacher sans la déchirer, ce qui n'arrivoit pas dans tout le reste de la circonference.

S'il y a des Poules qui pondent quelquefois des œufs sans coque, cela vient ou de quelque maladie, qui irritant la trompe, leur fait chasser l'œuf avant le temps.

Ou bien par une grande fécondité qui ne leur donne

pas le loisir de les meurir tous, il y a des Poules qui font le même jour un œuf bien conditionné, & un autre sans coque.

Le défaut d'une suffisante quantité de cette humeur dans certaines Poules peut encore en être la cause.

Il peut y avoir des Poules qui pondent quelquefois des œufs semblables à ceux dont je donne la description, lorsque dans des efforts, ou par quelque cause exterieure le jaune d'œuf est crevé dans l'*oviductus ;* mais la cause n'étant pas constante, elles en font aussi de bien conditionnés.

Des étranglemens ou des compressions à peu près semblables, qui anéantissent les petits des ovipares en leur ôtant la matiere de leur nourriture, ne rendroient que monstrueux ceux des vivipares, qui ne la portent pas avec eux, & qui vont la puiser dans la matrice, pourvû que la compression ne détruisît pas aucune partie essentielle à la vie de l'animal.

On ne doit donc pas être surpris de ce que ceux-ci nous fournissent beaucoup plus de monstres que les autres.

EXPLICATION DES FIGURES.

La Figure 1. represente au naturel l'œuf sans jaune, couvert de sa coque, ayant un angle aigu, & l'autre obtus.

La Fig. 2. represente le même œuf ouvert.

AAA. Le blanc clair.

BB. Le blanc épais au centre duquel on voit le *chalaza*, ou la figure du prétendu serpent.

La Fig. 3. represente le même *chalaza* tiré du centre du blanc épais, & regardé avec une loupe.

La Fig. 4. fait voir l'interieur du ventre de la Poule qui faisoit les œufs representés dans les Figures précedentes.

AAAAA. L'ovaire.

BBBBBBBB. L'*oviductus.*

CCCCC. Vessie contre nature remplie d'eau claire située au milieu de l'abdomen, & que l'on a couchée de côté pour découvrir ses attaches; elle couvre une partie de l'*oviductus*, & l'étrangle dans les deux endroits marqués *FF.*

D. Le pavillon ou l'entrée de l'*oviductus.*

EE. Ligament qui attache le côté du pavillon derriere l'ovaire.

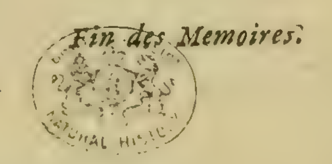
FF. Ligament du col de la vessie *CCCCC* qui étrangle deux endroits de l'*oviductus.*

GG. Attache dudit ligament l'une, sçavoir la superieure au ligament *EE*, & l'inferieure au centre du mezentère de l'*oviductus.*

H. La cloaque dans laquelle on voit deux ouvertures, dont l'une répond à l'*oviductus*, & l'autre à l'intestin.

IIIII. Plusieurs concretions jaunes semées dans l'abdomen semblables à des parcelles de jaunes d'œuf durci.

Fin des Memoires.



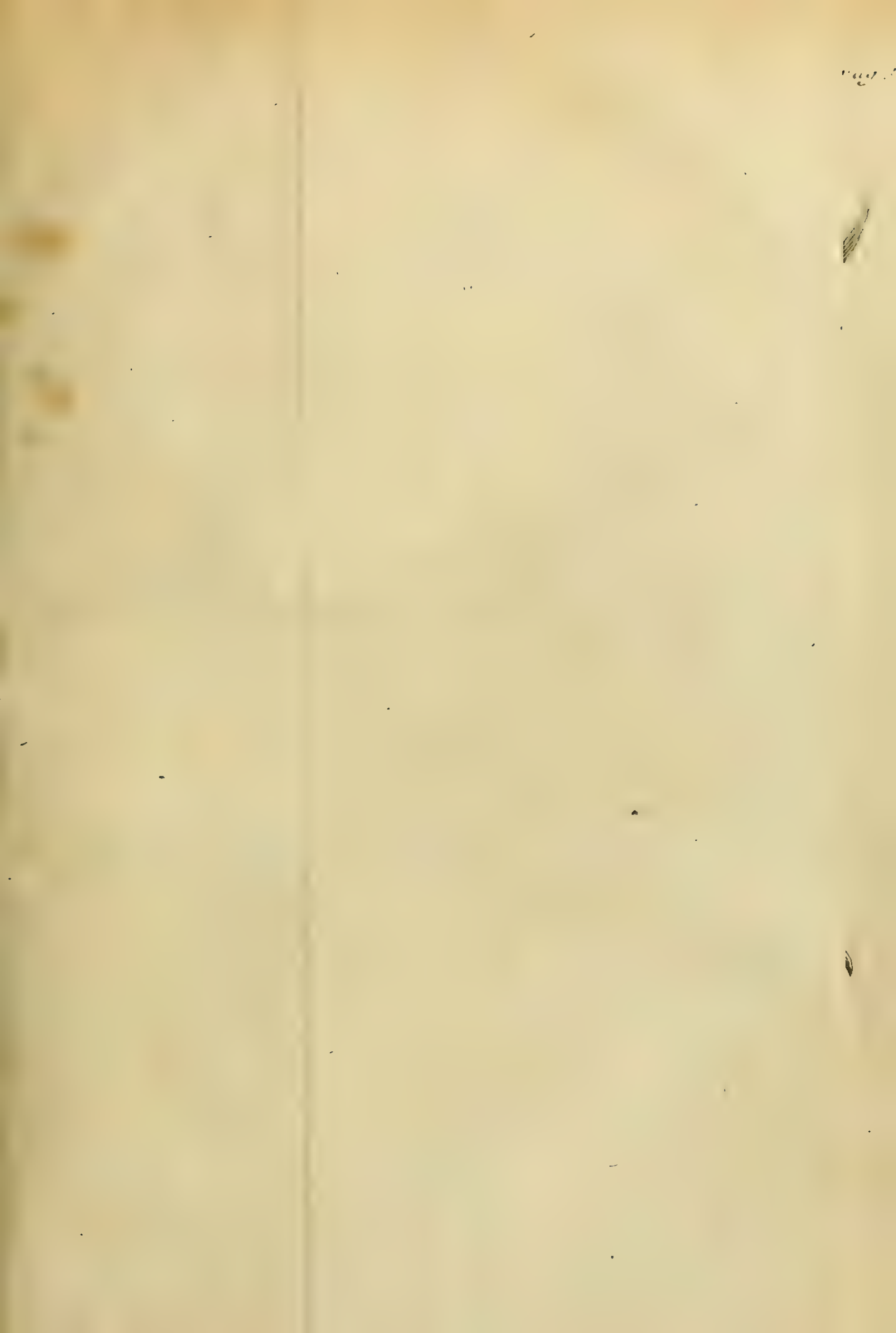



fig 1
fig 2
fig 3
fig 4
A
B
C
D
E
F
G
H
I

